ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: BUDOWNICTWO z. 21 Nr kol. 202

JÓZEF GŁĄBIK

O PEWNYCH METODACH OBLICZENIA STATYCZNIE WYZNACZALNYCH KOPUŁ SIATKOWYCH

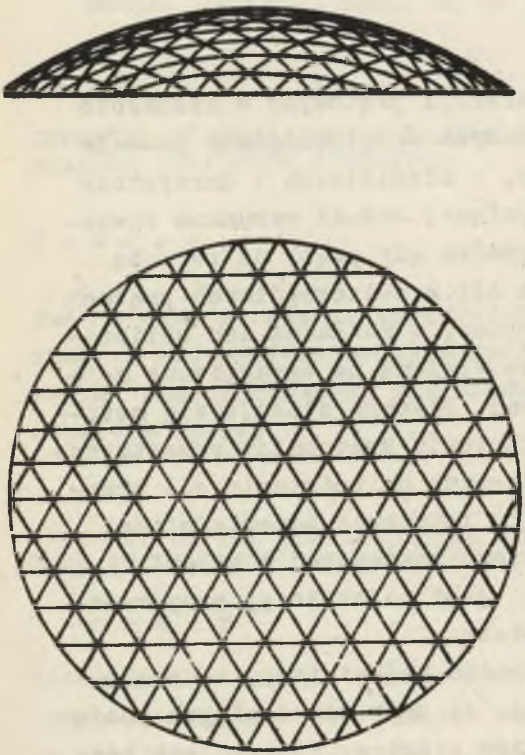
Streszczenie. W pracy rozpatrzono trzy sposoby obliczania sił w prętach małowyniosłej kopuły siatkowej założonej na sześcioboku. Dla obciążenia równoległego do osi z, rozłożonego na symetryczne i antysymetryczne oraz przegubowego połączenia prętów otrzymano układ statycznie wyznaczalny. Siły w prętach wyznaczono w oparciu o równania równowagi teorii błonowej powłok oraz w oparciu o równania równowagi teorii błonowej powłok małowyniosłych.

1. Wstęp

Zastosowanie przestrzennych konstrukcji prętowych w kształcie kopuły, do przekrycia budowli o dużych rozpiętościach pozwala na otrzymanie konstrukcji lekkiej, o niewielkich i korzystnie rozłożonych siłach w prętach, czyniącej zadość warunkom równowagi przestrzennej nawet w przypadku gdy pręty są ze sobą połączone przegubowo. Wyznaczenie sił w poszczególnych prętach wymaga jednak znacznego nakładu pracy, a dokładne ich obliczenie [1] jest często niemożliwie ze względu na ograniczone możliwości posiadanej maszyny cyfrowej. Dlatego stosuje się metody przybliżone polegające na zastąpieniu kratownicy przestrzennej powłoką i wyznaczeniu sił w prętach na podstawie sił przekrojowych w powłoce zastępczej [2]. Istnienie odpowiedniości pomiędzy siłami przekrojowymi powłoki zastępczej a siłami w prętach kratownicy przestrznnej jest najczęściej przyjmowane intuicyjnie lub w postaci hipotezy.

Podane w pracy [3] równania ośrodka włóknistego, ze względu na swą budowę pozwalają przyjąć, że zachodzi analogia pomiędzy ośrodkiem włóknistym i ośrodkiem ciągłym, którym jest również powłoka. W przypadku kratownicy przestrzennej mamy siatkę

dyskretną, która wychodzi poza założenia ośrodka włóknistego, jednak dla otrzymania wyników przybliżonych możemy skorzystać z równań tego ośrodka pod warunkiem, że przebieg prętów jest regularny i ich gęstość jest odpowiednia [4]. Stosuje się również postępowanie odwrotne [5] polegające na wyznaczeniu bezmomentowego stanu napięcia w powłoce na podstawie sił w prętach odpowiednio skonstruowanej kratownicy zastępczej. Oprócz tego istnieje cały szereg sposobów rozwiązywania kratownic przestrzennych w przemieszczeniach, z których można wyróżnić sposób oparty na równaniach różnicowych [6], [7] oraz sposób polegający na wykorzystaniu równań ośrodka włóknistego [3]. Sposobów tych nie rozpatrywano w przedstawionej pracy ze względu na ich większą złożoność wynikającą z faktu, że obejmują one swym zasięgiem stronę geometryczną zagadnienia.



Rys. 1

W przedstawionej pracy rozpatrzono trzy sposoby wyznaczania sił w małowyniosłej kopule kratowej o przegubowo połączonych prętach, sprowadzonej przez rozkład obciążeń na symetryczne i antysymetryczne, do układu statycznie wyznaczalnego. Przyjmując, że węzły kratownicy znajdują się w punktach przecięcia trzech rodzin krzywych leżących na sferze, a osiami prętów są proste przechodzące przez dwa sąsiednie węzły otrzymano kopułę siatkową (rys.1).

W pierwszej części pracy badano możliwość uproszczenia rachunków w przypadku zastosowania równań równowagi sił w węzłach kratownicy

przestrzennej. W drugiej części do wyznaczenia sił w prętach kopuły zastosowano równania równowagi teorii błonowej powłok. Do rozwiązania równań zastosowano różnice skończone funkcji naprężeń, której wartości określa się w węzłach siatki trójkątnej założonej na rzucie kopuły. Przyjęto, że siły przekrojowe obliczone w punktach połowiących długości boków oczek siatki trójkątnej odpowiadają siłom przekrojowym w punktach połowiących długości odpowiednich prętów kopuły.

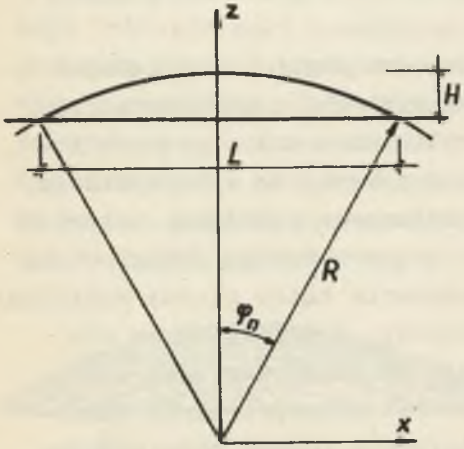
Pochodne określone w układzie współrzędnych prostokątnych wyrażono przez pochodne w trzech kierunkach, odpowiadających bokom siatki oraz podano wzór na obliczenie sił w prętach kopuły na podstawie znanych sił przekrojowych, do wykorzystania którego potrzebna jest znajomość wzajemnego położenia czterech węzłów kopuły leżących w otoczeniu rozpatrywanego pręta. Unika się w ten sposób konieczności wyznaczania kątów między rodzinami krzywych w węzłach, odwracania macierzy współczynników dla danego węzła, a następnie obliczania średnich wartości sił w prętach [4]. Zastosowanie teorii powłok małowyniosłych znacznie upraszcza rachunki przy rozwiązywaniu równań różnicowych, a jednocześnie daje możliwość wyznaczenia sił w prętach kopuły w zależności od rozpiętości kopuły, jej wyniosłości, gęstości podziału oraz obciążenia bez potrzeby wyznaczania współrzędnych węzłów kopuły. Przy układaniu równań równowagi teorii powłok małowyniosłych brano pod uwagę trzy składowe obciążenia, a nie jedną składową normalną do powłoki jak to jest najczęściej spotykane w literaturze. Możliwość zastosowania omówionych rozwiązań potwierdzają wyniki załączonego przykładu.

2. Geometria konstrukcji

Przyjęto sferę o równaniu w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ oraz wprowadzono kąt $\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ między osią z i promieniem kuli R, i kąt $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ między osią x i rzutem promienia R na płaszczyznę xy. Przecinając sferę trzema płaszczyznami przechodzącymi przez oś z i obróconymi względem siebie o kąt $\pi/3$ wyznaczamy na sferze krzywe θ_m: $\theta_m = m.\pi/3$ (m = 0,1,2,3,4,5). Współrzędne wę-

złów określamy w układzie współrzędnych sferycznych (Θ,φ) wychodząc z warunku minimalnej różnicy pomiędzy długościami prętów. Dla przyjętej czaszy o danych L i $\frac{H}{L}$ (rys. 2) wyznaczamy R i φ_n ze wzorów

$$R=L\,\frac{1+4(\frac{H}{L})^2}{8\,(\frac{H}{L})} \quad \text{i} \quad \sin\varphi_n = \frac{L}{2R},$$



Rys. 2

otrzymując dla przyjętego podziału "n", współrzędne węzłów $(\Theta_m, \varphi_{k,0})$ na krzywej Θ_m oraz $(\Theta_{m+1}\varphi_{0,l})$ na krzywej Θ_{m+1}, gdzie $\varphi_{k,0} = k \cdot \varphi_1$, $\varphi_{0,l} = l\cdot\varphi_1$ $(k,l = 0,1,2,\ldots n)$, $\varphi_1 = \frac{\varphi_n}{n}$.

Współrzędne węzłów między krzywymi Θ_m i Θ_{m+1} określono przy założeniu, że każdy nowy węzeł $(\Theta_{kl}, \varphi_{kl})$ leży w odległości $a = 2R\sin\frac{\varphi_1}{2}$ od dwóch wyżej położonych węzłów $(\Theta_{k,l-1}, \varphi_{k,l-1})$ i $(\Theta_{k-1,l}, \varphi_{k-1,l})$ (rys. 3). Współrzędne $(\Theta_{kl}, \varphi_{kl})$ możemy określić korzystając ze wzorów trygonometrii sferycznej (przyjmujemy, że krzywe łączące każde dwa leżące obok siebie węzły są łukami wielkiego koła). Przyjmując R = 1 i oznaczając przez Θ_{kl} krzywą otrzymaną z przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez oś z i przez punkt $(\Theta_{kl}, \varphi_{kl})$ (rys. 3) możemy dla ustalonego l, i k przebiegającego wartości 0,1,2...i obliczyć współrzędne Θ_{kl} i φ_{kl} $(k,l = 0,1,2,3\ldots)$ ze wzorów rekurencyjnych:

$$\operatorname{ctg}(\Theta_{kl}-\Theta_{k,l-1}) = \frac{\operatorname{ctg}\varphi_1 \cdot \sin(\varphi_{k,l-1}) - \cos(\varphi_{k,l-1}) \cdot \cos(A_{k,l-1}+C_{k,l-}}{\sin(A_{k,l-1} + C_{k,l-1})}$$

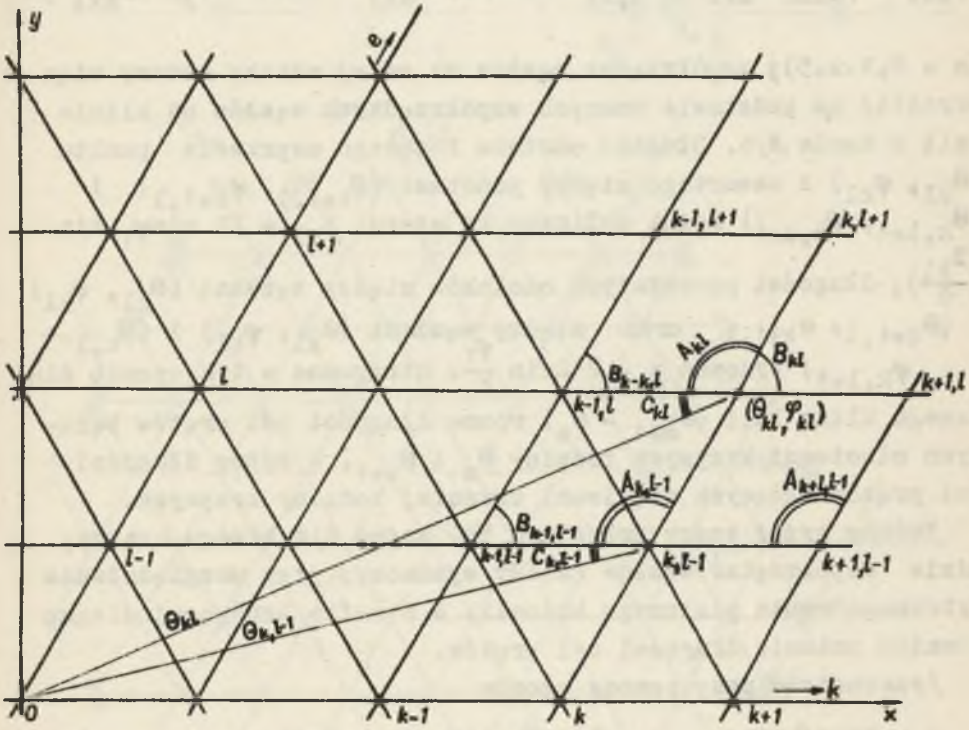
oraz

$$\sin\varphi_{kl} = \sin\varphi_1\,\frac{\sin(A_{k,l-1} + C_{k,l-1})}{\sin(\Theta_{kl} - \Theta_{k,l-1})},$$

gdzie:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{A_{kl}}{2}\right) = \cos\varphi_1 \operatorname{tg}\left(\frac{B_{k-1,l}}{2}\right)$$

$$B_{0,0} = \frac{\pi}{3}, \quad B_{k,0} = \pi - A_{k,0}$$



Rys. 3

oraz dla $l \neq 0$

$$B_{kl} = 2\pi - B_{k-1,l-1} - A_{k+1,l-1} - A_{kl},$$

dla $k = 1$ $\qquad A_{kl} = A_{k+1,l-1},$

$$C_{k,0} = 0$$

$$\sin(B_{k-1,l-1} - C_{kl}) = \frac{\sin(\varphi k,l-1)}{\sin\varphi_1} \cdot \sin(\theta_{kl} - \theta_{k,l-1}).$$

Dla danego k przy ustalonym l obliczamy kolejno θ_{kl}, φ_{kl}, A_{kl}, B_{kl}, C_{kl}.

Ze względu na symetrię ustroju mamy

$$\varphi_{mkl} = \varphi_{mlk},\ \theta_{mkl} = \theta_{0,kl} + m.\pi/3,\ \theta_{mkl} = (2m+1)\frac{\pi}{3} - \theta_{mkl}$$

(m = 0,1...5); współrzędne węzłów na całej czaszy możemy więc określić na podstawie znanych współrzędnych węzłów na klinie kuli o kącie $\pi/6$. Długość odcinka leżącego naprzeciw punktu $(\theta_{kl}, \varphi_{kl})$ i zawartego między punktami $(\theta_{k+1,l}, \varphi_{k+1,l})$ i $(\theta_{k,l+1}, \varphi_{k,l+1})$ można obliczyć ze wzoru $b_{kl} = 2R \sin\varphi_1 \sin(\frac{B_{kl}}{2})$, długości pozostałych odcinków między węzłami $(\theta_{kl}, \varphi_{kl})$ i $(\theta_{k+1,l}, \varphi_{k+1,l}$ oraz między węzłami $(\theta_{kl}, \varphi_{kl})$ i $(\theta_{k,l+1}, \varphi_{k,l+1})$ wynoszą $a = 2R\sin\frac{\varphi_1}{2}$. Otrzymano w ten sposób dla danego klina kuli $(\theta_{m+1} - \theta_m)$ równe długości osi prętów będących cięciwami krzywych rodziny θ_m i θ_{m+1}, a różne długości osi prętów będących cięciwami trzeciej rodziny krzywych.

Podane wyżej wzory przestają być ważne dla brzegu czaszy, gdzie współrzędne węzłów należy wyznaczyć przy uwzględnieniu wybranego rzutu poziomego budowli. W strefie brzegowej ulegną również zmianie długości osi prętów.

Przechodząc przy pomocy wzorów

$$x = R\cos\theta \sin\varphi, \quad y = R\sin\theta \sin\varphi, \quad z = R\cos\varphi \tag{1}$$

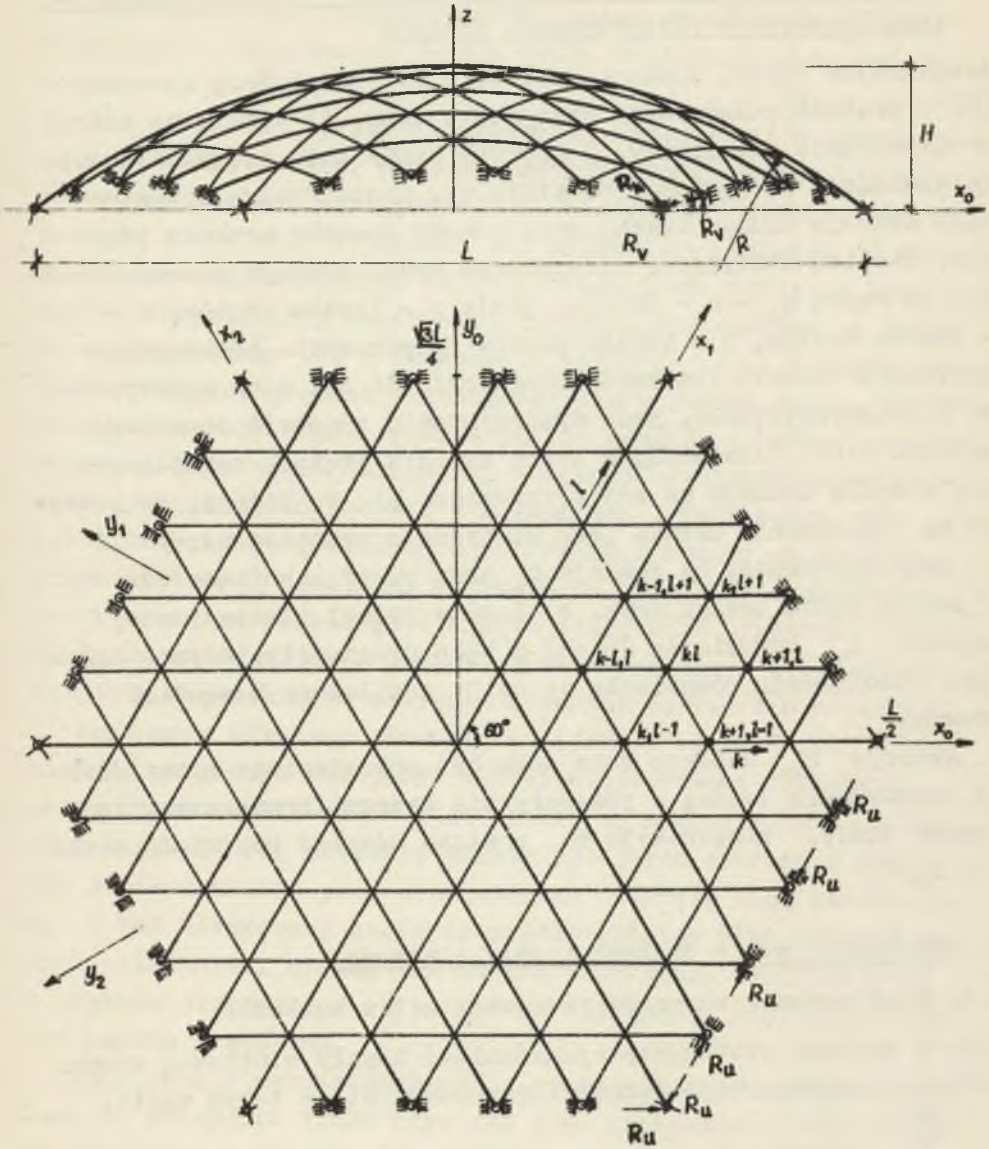
do układu współrzędnych prostokątnych możemy określić w tym układzie współrzędne węzłów oraz kosinusy kierunkowe osi prętów. W układzie tym współrzędne węzłów $P_{kl}(x_{kl}, y_{kl}, z_{kl})$ leżących między krzywymi θ_m i θ_{m+1} możemy również określić z trzech równań wektorowych:

$$\overrightarrow{OP}_{k,l-1} \cdot \overrightarrow{OP}_{kl} = \overrightarrow{OP}_{k,l-1} \cdot \overrightarrow{OP}_{k-1,l-1}$$

$$\overrightarrow{OP}_{k-1,l} \cdot \overrightarrow{OP}_{kl} = \overrightarrow{OP}_{k-1,l} \cdot \overrightarrow{OP}_{k-1,l-1}$$

$$\overrightarrow{OP}_{k,1,l-1} + \overrightarrow{OP}_{kl} = \lambda(\overrightarrow{OP}_{k-1,l} + \overrightarrow{OP}_{k,l-1})$$

gdzie $|\overrightarrow{OP}| = R$.


z
H
x_0
L
R_v
R_v
R
x_2
$\frac{\sqrt{3}L}{4}$
y_0
x_1
l
y_1
k-1,l+1
k,l+1
k-1,l
kl
k+1,l
60°
k,l-1
k+1,l-1
k
$\frac{L}{2}$
x_0
R_u
R_u
y_2
R_u
R_u
R_u
R_u

Rys. 4

3. Kopuła siatkowa założona na sześcioboku o prętach podporowych leżących w płaszczyznach brzegów

Rozpatrując kopułę siatkową założoną na sześcioboku foremnym [8] o prętach połączonych przegubowo (rys. 4) otrzymano ustrój geometrycznie niezmienny, 3-krotnie statycznie niewyznaczalny (niezależnie od gęstości podziału n). Geometryczną niezmienność ustroju możemy zbadać przy pomocy sposobu wymiany prętów. Stopień statycznej niewyznaczalności ustroju możemy określić ze wzoru $n_s = p - 3w + r$, gdzie p - liczba prętów, w - - liczba węzłów, r - liczba prętów podporowych. Rozkładając obciążenie kopuły siatkowej równoległe do osi z na symetryczne i antysymetryczne, przy wykorzystaniu symetrii obrotowej ustroju ilość niewiadomych sił w sześciu prętach schodzących się w węźle leżącym na osi z sprowadza się do jednej, co pozwala na obliczenie układu jako statycznie wyznaczalnego.

Przy założeniu, że reakcja R_u oraz pręty schodzące się w jednym węźle brzegu (rys. 4) leżą w jednej płaszczyźnie, reakcje R_v równoległe do osi z będą przenosiły jedynie składowe obciążenia równoległe do osi z przyłożone w węzłach brzegu.

Reakcje R_u każdego boku mogą być przeniesione przez płaską konstrukcję leżącą w płaszczyźnie brzegu (kratownica, łuk, tarcza itd.). Konstrukcja ta powinna również przenieść reakcje R_v.

4. Obliczenie sił w prętach kopuły siatkowej

4.1. Zastosowanie warunków równowagi sił w węzłach.

Siły w prętach statycznie wyznaczalnej kopuły siatkowej możemy obliczyć wykorzystując warunki równowagi sił w i-tym węźle:

$$\sum_{j}^{j\leq 6} S_{ji} \cos\alpha_j + X_i = 0,$$

$$\sum_{j}^{j\leq 6} S_{ji} \cos\beta_j + Y_i = 0,$$

$$\sum_{j}^{j\leq 6} S_{ji} \cos\gamma_j + Z_i = 0.$$

gdzie: X_i, Y_i, Z_i są rzutami siły P_i obciążającej i-ty węzeł na osie układu współrzędnych; $\cos\alpha_j$, $\cos\beta_j$, $\cos\gamma_j$, są kosinusami kierunkowymi j-tego pręta dochodzącego do i-tego węzła.

Dla ustalonej liczby niewiadomych wynikającej z symetrii ustroju i obciążenia, wprowadzamy kolejność numerowania prętów odpowiadającą występowaniu niewiadomych w równaniach równowagi. W tym celu wybieramy dwa najbardziej odległe od siebie węzły rozpatrywanego klina ustroju i od jednego z tych węzłów rozpoczynamy numerowanie prętów. Przechodząc od węzła do węzła staramy się o zachowanie możliwie małej różnicy numerów pomiędzy prętami schodzącymi się w jednym węźle. Korzystając z metody Gaussa rozwiązywania równań, w każdej grupie równań i-tego węzła dokonujemy wstępnej eliminacji niewiadomych występujących jedynie w równaniach i-tego węzła oraz niewiadomych występujących w pierwszym równaniu na miejscu przedostatnim i ostatnim, w drugim na pierwszym i ostatnim, a w trzecim na pierwszym i drugim miejscu (w przypadku otrzymania dwóch równań dla danego węzła eliminujemy w pierwszym równaniu ostatnią, a w drugim równaniu pierwszą niewiadomą).

Następnie układamy równanie macierzowe niewiadomych i obciążeń, przy czym kolejność występowania równań w równaniu macierzowym ustala się w taki sposób by numery kolumn, w których znajdują się ostatnie wyrazy kolejnych wierszy w macierzy współczynników przy niewiadomych tworzyły ciąg niemalejący. W tak utworzonej macierzy współczynników przy niewiadomych eliminujemy wyrazy nad główną przekątną. Wielkości sił w prętach otrzymujemy po wykonaniu eliminacji współczynników pod główną przekątną.

Inny sposób wyznaczania sił w prętach kopuły siatkowej polega na przyjęciu tylko tych sił jako niewiadome, które możemy wyznaczyć z równań równowagi danego węzła. Pozostałe niewiadome traktujemy jako dodatkowe obciążenia węzłów. Rozpoczynając od jednego ze skrajnych węzłów i przechodząc od węzła do węzła (zgodnie z wcześniej wprowadzoną numeracją prętów) wyznaczamy wielkości sił w prętach zależne od obciążeń ze-

wnętrznych i dodatkowych. Dodatkowe obciążenia określimy z równań otrzymanych z grupy równań i-tego węzła, w których występuje mniej niewiadomych niż ilość niespełniających się tożsamościowo równań równowagi [2]. W równaniu macierzowym sposób ten odpowiada przerzuceniu pewnych kolumn do macierzy współczynników przy obciążeniach tak, by w otrzymanej prostokątnej macierzy współczynników przy niewiadomych nad główną przekątną występowały tylko zera. Eliminując współczynniki pod główną przekątną otrzymamy wielkości sił w prętach zależne od obciążeń zewnętrznych i dodatkowych oraz wielkości obciążeń dodatkowych. W teorii obliczania sił w prętach kratownic sposób ten odpowiada sposobowi wymiany prętów.

4.2. Zastosowanie równań równowagi teorii błonowej powłok

4.2.1. Obliczenie sił w kopule siatkowej wg teorii błonowej powłok

Dla obliczenia sił błonowych w powłoce o równaniu jej powierzchni środkowej $z = f(x,y)$, wprowadza się funkcję naprężeń $\Phi = \Phi(x,y)$ [9] określającą rzuty sił przekrojowych na płaszczyznę xy:

$$n_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \int X dx; \qquad n_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \int Y dy \quad \text{i} \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Siły przekrojowe w powłoce otrzymamy z zależności

$$N_x = n_x \frac{\cos\beta_y}{\cos\alpha_x}; \quad N_y = n_y \frac{\cos\alpha_x}{\cos\beta_y} \quad \text{i} \quad N_{xy} = n_{xy};$$

gdzie: $\cos\alpha_x = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2}}, \qquad \cos\beta_y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}}$

Funkcję naprężeń możemy wyznaczyć z równania

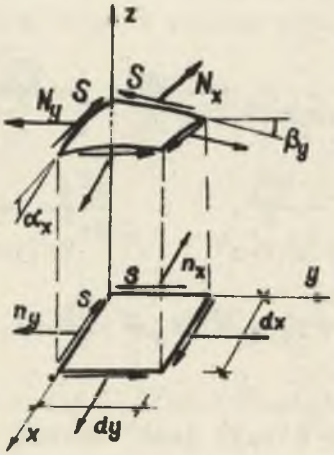
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} -$$

$$- Z - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\int X dx - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\int Y dy - X\frac{\partial z}{\partial x} - Y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

otrzymanego z warunków równowagi elementu powłoki poddanego obciążeniom, których wielkość określa się na jednostkę pola w płaszczyźnie xy za pomocą trzech składowych obciążenia X, Y, Z (rys. 5). W przypadku obciążenia powłoki tylko siłami równoległymi do osi z otrzymamy

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - Z = 0 \qquad (2)$$

wtedy $n_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$, $n_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, $n_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$



Rys. 5

Dla powłoki, której powierzchnią środkową jest czasza kulista o równaniu

$$z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2 - R^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - R^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{-xy}{(R^2 - x^2 - y^2)^{3/2}},\quad Z = -p - g\,\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

gdzie: p - odpowiada obciążeniu równomiernie rozłożonemu, a g - ciężarowi własnemu powłoki.

Podstawiając otrzymane wielkości do wzoru (2) otrzymamy

$$\left[1-\left(\frac{y}{R}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-2\left(\frac{x}{R}\cdot\frac{y}{R}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\left[1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+$$

$$+\left(\frac{z}{R}\right)^2\cdot p\cdot z+\left(\frac{z}{R}\right)^2\cdot g\cdot R=0 \qquad (3)$$

Przyjmując, że siły zewnętrzne normalne do brzegu powłoki, założonej na rzucie kopuły siatkowej są równe zeru mamy (rys.4) dla

$$y_o=-\sqrt{3}\,x_o+\frac{\sqrt{3}L}{2} \quad \text{i} \quad y_o=-\sqrt{3}\,x_o-\frac{\sqrt{3}L}{2}: \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}=0,$$

$$y_o=\frac{\sqrt{3}L}{4} \quad \text{i} \quad y_o=-\frac{\sqrt{3}L}{4} \quad : \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o^2}=0,$$

$$y_o=\sqrt{3}\,x_o+\frac{\sqrt{3}L}{2} \quad \text{i} \quad y_o=\sqrt{3}\,x_o-\frac{\sqrt{3}L}{2}: \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}=0,$$

co oznacza, że na brzegu $\Phi(x,y)$ jest funkcją liniową. Wprowadzając układy współrzędnych Ox_1y_1 oraz Ox_2x_2 (rys. 4) możemy pochodne $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_o^2}$ i $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o\partial y_o}$ wyrazić przez pochodne $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}$;

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_o^2}=\frac{2}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{2}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o^2} \qquad \text{oraz}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o\partial y_o}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\right).$$

Równanie (3) przyjmie wtedy postać

$$\left[1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o^2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{R} \cdot \frac{y}{R}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\right) +$$

$$+ \left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_o^2} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 \cdot p \cdot z + \left(\frac{z}{R}\right)^2 \cdot g \cdot R = 0 \qquad (4)$$

Dla rozwiązania równania różniczkowego (4) zastosowano różnice skończone funkcji $\Phi(x,y)$ której wartości określa się w węzłach siatki trójkątnej o oczkach wielkości $\delta = \frac{L}{2n}$.

Siatka ta założona na rzucie kopuły na płaszczyznę xy w przybliżeniu pokrywa się z rzutem kopuły siatkowej na tę płaszczyznę (rys. 4)

Przyjmując $\psi = \frac{\Phi}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\delta\right)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\Phi}{\delta^2}$ otrzymano różnice skończone

$$\Delta x_o \Phi_{kl} = \frac{3}{4}\left(\psi_{k+1,l} - 2\psi_{kl} + \psi_{k-1,l}\right),$$

$$\Delta x_1 \Phi_{kl} = \frac{3}{4}\left(\psi_{k,l+1} - 2\psi_{kl} + \psi_{k,l-1}\right),$$

$$\Delta x_2 \Phi_{kl} = \frac{3}{4}\left(\psi_{k-1,l+1} - 2\psi_{kl} + \psi_{k+1,l-1}\right);$$

wstawiając je do równania (4) mamy

$$6(\alpha_{kl} + \gamma_{kl}) \cdot \psi_{kl} = \psi_{k,l-1}(2\alpha_{kl} - \beta_{kl}) + \psi_{k-1,l}(3\gamma_{kl} - \alpha_{kl}) +$$

$$+ \psi_{k+1,l-1}(2\alpha_{kl} + \beta_{kl}) + \psi_{k-1,l+1}(2\alpha_{kl} + \beta_{kl}) +$$

$$+ \psi_{k+1,l}(3\gamma_{kl} - \alpha_{kl}) + \psi_{k,l+1}(2\alpha_{kl} - \beta_{kl}) +$$

$$+ \delta_{kl}(pz_{kl} + gR) \qquad (5)$$

gdzie:

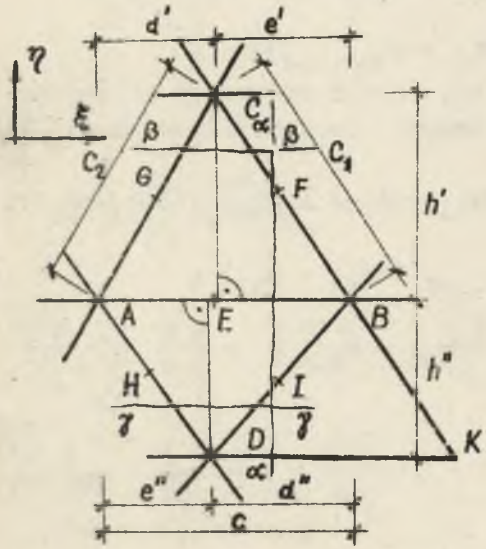
$$\alpha_{kl} = \left[1 - \left(\frac{y_{kl}}{R}\right)^2\right], \quad \beta_{kl} = 2\sqrt{3}\left(\frac{x_{kl} \cdot y_{kl}}{R^2}\right),$$

$$\gamma_{kl} = \left[1 - \left(\frac{x_{kl}}{R}\right)^2\right], \quad \delta_{kl} = 4\left(\frac{z_{kl}}{R}\right)^2$$

Geometria i rodzaj przyjętej powłoki, jej obciążenia i warunki brzegowe odpowiadają geometrii i sposobowi połączenia prętów kopuły siatkowej, jej obciążeniom oraz warunkom brzegowym.

W przypadku gdy osie dwóch sąsiednich prętów będące cięciwami jednej rodziny krzywych są w przybliżeniu równoległe, a zmiany sił przekrojowych w powłoce na łuku równym podwójnej odległości między prętami są nieznaczne, korzystając z powyższej odpowiedniości możemy siły w prętach kopuły siatkowej wyznaczyć na podstawie sił przekrojowych w powłoce.

Dla obliczenia siły w pręcie AB kopuły siatkowej rozpatrzono układ prętów kopuły tworzących dwa trójkąty - ABC i ABD o wspólnym boku AB (rys. 6). Przyjmując, że trójkąty te leżą w jednej płaszczyźnie wprowadzono w tej płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych $\xi\eta$ o osi ξ równoległej i osi η prostopadłej do pręta AB. Obliczając siły przekrojowe N_ξ, N_η i $N_{\xi\eta}$ w punkcie powłoki odpowiadającym punktowi połowiącemu długość pręta AB kopuły siatkowej i przyjmując, że w obszarze ABCD stan naprężeń jest jedno-



Rys. 6

rodny, możemy siły przekrojowe równomiernie rozłożone zastąpić siłami skupionymi leżącymi w osiach prętów AC, CB, BD, DA, AB i DK (rys. 6)

Jeśli przez $\alpha-\alpha$ oznaczymy przekrój równoległy do osi η a przez $\beta-\beta$ i $\gamma-\gamma$ przekroje równoległe do osi ξ dla $N\xi$ mamy z warunku równowagi sił w przekroju $\beta-\beta$ i $\gamma-\gamma$ $S'_{AC} = S'_{CB} = S'_{BD} = S'_{AD} = 0$; z warunku równowagi sił w przekroju $\alpha-\alpha$

$$S'_{AB} + S'_{DK} = N\eta\,(h' + h'').$$

Podobnie dla $N\varrho$ z warunku równowagi sił w przekroju $\beta-\beta$ i $\gamma-\gamma$ wyznaczymy S'''_{AC}, S'''_{CB}, S'''_{AD} i S'''_{BD}, a następnie rzutując wszystkie siły w prętach w przekroju $\alpha-\alpha$ na oś ξ otrzymamy

$$S''_{AB} + S''_{DK} = -\,N\eta\left(\frac{e'd'}{h'} + \frac{e''d''}{h''}\right).$$

Dla $N\xi\eta$ otrzymamy z warunku równowagi sił w przekroju $\beta-\beta$ i $\gamma-\gamma$ S'''_{AC}, S'''_{BC}, S'''_{AD} i S'''_{BD}, a następnie rzutując wszystkie siły w przekroju $\alpha-\alpha$ na oś ξ wyznaczymy

$$S'''_{AB} + S'''_{DK} = 2N\xi\eta(e'' - d').$$

Z założenia jednorodności naprężeń w rozpatrywanym obszarze wynika, że $S_{AB} = S_{DK}$

Stąd całkowita siła w pręcie AB wynosi

$$S_{AB} = N\xi\,\frac{h' + h''}{2} - N\eta\left(\frac{e'd'}{2h'} + \frac{e''d''}{2h''}\right) + N\xi\eta(e'' - d')$$

gdzie: h', h'' – wysokości odpowiednio trójkąta ABC i ABD; d', e' – rzuty boków AC i CB na bok AB, d'', e'' – rzuty boków BD i DA na bok AB.

W szczególnym przypadku gdy boki trójkąta są równe mamy [10] $S_{AB} = \frac{a}{2\sqrt{3}}(3N\xi - N\eta)$. Przyjmując, że różnice pomiędzy utworzoną na rzucie kopuły na płaszczyznę xy siatką trójkątną a rzutem kopuły siatkowej na tę płaszczyznę są małe w stosunku do

długości boków oczka siatki trójkątnej oraz pomijając różnicę pomiędzy kątem zawartym między osiami ξ i η, i kątem zawartym między rzutami osi ξ i η na płaszczyznę xy możemy siły przekrojowe N_ξ, N_η i $N_{\xi\eta}$ obliczyć na podstawie wielkości n_ξ, n_η i $n_{\xi\eta}$ wyznaczonych w środku boku oczka siatki trójkątnej. Wtedy dla obliczenia

$$N_\xi = n_\xi \frac{\cos\beta_\xi}{\cos\alpha_\xi}, \quad N_\eta = n_\eta \frac{\cos\alpha_\xi}{\cos\beta_\eta} \quad \text{i} \quad N_{\xi\eta} = n_{\xi\eta}$$

mamy

$$n_\xi = \psi_{C^o} - 2\,\psi_{E^o} + \psi_{D^o}$$

$$n_\eta = 3(\psi_{A^o} - 2\psi_{E^o} + \psi_{B^o}),$$

$$n_{\xi\eta} = \sqrt{3}\,(\psi_{G^o} + \psi_{I^o} - \psi_{F^o} - \psi_{H^o}),$$

gdzie przez A^o, B^o, C^o, D^o oraz E^o, F^o, G^o, H^o, I^o oznaczono odpowiednio węzły i środki boków oczęk siatki trójkątnej odpowiadające węzłom i środkom prętów kopuły siatkowej (rys. 6); oraz

$$\frac{\cos\alpha_\xi}{\cos\beta_\eta} = \frac{\sqrt{(c_x^2 + c_y^2)(\bar{K}^2 + \bar{L}^2 + \bar{M}^2}}{c \cdot \sqrt{\bar{K}^2 + \bar{L}^2}},$$

gdzie:

$$\left\{c_x,\ c_y,\ c_z\right\} = \left\{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\right\},$$

$$\bar{K} = \begin{vmatrix} y_E & z_E \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{vmatrix} z_E & x_E \\ c_z & c_x \end{vmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{vmatrix} x_E & y_E \\ c_x & c_y \end{vmatrix},$$

(x_E, y_E, z_E) obliczamy ze wzorów (1)

dla $\Theta_E = \frac{\Theta_A + \Theta_B}{2}$, $\varphi_E = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$ lub w przybliżeniu

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_E = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Wartości funkcji naprężeń w środkach boków oczek siatki trójkątnej możemy wyznaczyć ze wzorów interpolacyjnych Lagrange'a przez interpolację względem trzech (przy brzegu) lub czterech punktów.

4.2.2. Obliczenie sił w kopule siatkowej wg teorii błonowej powłok małowyniosłych

W przypadku małej wyniosłości kopuły siatkowej $(H/L < \frac{1}{5})$ do obliczenia sił w prętach możemy wykorzystać równania równowagi elementu powłoki teorii błonowej powłok małowyniosłych [11] Mamy

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_2 = 0,$$

$$\frac{N_x}{R} + \frac{N_y}{R} - p_3 = 0;$$

gdzie: przez p_1, p_2, p_3 oznaczono składowe obciążenia. Wprowadzając funkcję naprężeń spełniającą pierwsze dwa równania

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int p_1 d_x, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int p_2 d_y \quad \text{i} \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y},$$

po podstawieniu do trzeciego równania mamy

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - Rp_3 - \int p_1 d_x - \int p_2 d_y = 0 .$$

Dla obciążenia równoległego do osi z, równomiernie rozłożonego

$$p_1 = p\,\frac{x}{R}\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2}\,,\quad p_2 = p\,\frac{y}{R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2},\quad p_3 = -\,p\,\frac{z}{R},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+p\left[z-\frac{x^2}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2}-\frac{y^2}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right]=0$$

Wyrażając jak w punkcie 4.2.1 pochodną $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$ przez pochodne $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}$ i $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_0^2}$ oraz wprowadzając różnice skończone otrzymamy układ równań różnicowych dla określenia funkcji naprężeń w węzłach (rys. 4).

$$6\psi_{kl} = \psi_{k,l-1}+\psi_{k-1,l}+\psi_{k+1,l-1}+\psi_{k-1,l+1}+\psi_{k+1,l}+\psi_{k,l+1}+$$
$$+\,2p\left[z_{kl}-\frac{x_{kl}^2}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{y_{kl}}{R}\right)^2}-\frac{y_{kl}^2}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{x_{kl}}{R}\right)^2}\right]. \qquad (6)$$

Wprowadzając parametry $f = \frac{H}{L}$ oraz L, dla $\frac{H}{L} < \frac{1}{5}$ pozostałe wielkości możemy przedstawić w postaci

$$x = \frac{L}{2}\,s,\qquad y = \frac{\sqrt{3}L}{4}\,t,\qquad (0 \leqslant s,\ t \leqslant 1);$$

$$R = L\,.\,\frac{1+4f^2}{8f} = L\,(0{,}125\,f^{-1}+0{,}5\,f),$$

$$Z = R\cos\varphi = R\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}},$$

korzystając z rozwinięcia w szereg potęgowy mamy (pominięto wyrazy zawierające f wyższego rzędu niż czwartego)

$$\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}} \approx \left[1-2(4\,s^2+3t^2)\,f^2+8(4s^2+3t^2)f^4\right],$$

stąd

$$z \cong L\left[0{,}125\, f^{-1} - 0{,}25\,(4s^2+3t^2-2)f\right],$$

podobnie

$$\frac{x^2}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{y}{R}\right)^2} \cong L\, s^2\left[f - 2(2+3t^2)\, f^3\right],$$

oraz

$$\frac{y^2}{2R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2} \cong \frac{3}{4}\, Lt^2\left[f - 2(2+4s^2)\, f^3\right].$$

Po podstawieniu powyższych zależności do równania (6) otrzymamy

$$6\psi_{kl} = \psi_{k,l-1} + \psi_{k-1,l} + \psi_{k+1,l-1} + \psi_{k-1,l+1} + \psi_{k+1,l} + \psi_{k,l+1} +$$

$$+ pL\left[0{,}25\, f^{-1} - (4s^2_{kl}+3t^2_{kl}-1)f + 2(4s^2_{kl}+3t^2_{kl}+12s^2_{kl}t^2_{kl})f^3\right]$$

Siły przekrojowe obliczymy ze wzorów

$$N_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - pLs^2\left[f - 2(2+3t^2)f^3\right],$$

$$N_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{3}{4}\, pLt^2\left[f - 2(2+4s^2)f^3\right],$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.$$

Dla kopuły mało wyniosłej można przyjąć, że trójkąty utworzone przez pręty kopuły siatkowej nieznacznie różnią się do oczek siatki trójkątnej utworzonej na rzucie kopuły (największe różnice występują w środku kopuły a ich wielkość zależy od wyniosłości kopuły). Założenie to pozwala na wyznaczenie sił w prętach kopuły siatkowej odpowiadających równoległym do osi x bokom oczek siatki trójkątnej, bez konieczności wyznaczania długości prętów kopuły siatkowej wg wzoru

$$S_{AB} = \frac{L}{2n}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\,(3N_x - N_y).$$

Po podstawieniu N_x i N_y mamy

$$S_{AB} = \frac{\sqrt{3}L}{4n}\left\{\psi_{C^o} + \psi_{D^o} - \psi_{A^o} - \psi_{B^o} - pL\left[\left(s^2_{E^o} - \frac{1}{4}t^2_{E^o}\right)f - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 4\left(s^2_{E^o} - \frac{1}{4}t^2_{E^o} + s^2_{E^o}\cdot t^2_{E^o}\right)f^3\right]\right\}$$

gdzie: przez A^o, B^o, C^o, D^o oraz E^o oznaczono odpowiednio węzły i środek boku A^oB^o siatki trójkątnej odpowiadające węzłom i środkowi pręta AB kopuły siatkowej (rys. 6).

Otrzymany wzór zależny od obciążenia rozpiętości i wyniosłości kopuły dla przyjętej gęstości podziału kopuły siatkowej pozwala w prosty sposób wyznaczyć siły w prętach, co jest szczególnie korzystne gdy wielkości geometryczne kopuły nie są ustalone.

5. Uwagi końcowe

Siatka trójkątna założona na rzucie kopuły siatkowej na płaszczyznę xy, w węzłach której określa się funkcję naprężeń, nie pokrywa się z rzutem rozpatrywanego ustroju siatkowego na tę płaszczyznę. Różnice te jednak dla małej wyniosłości kopuły są małe w stosunku do wielkości oczka co pozwala na ich pominięcie w przypadku przybliżonych obliczeń. Z trzech sposobów obliczania sił w statycznie wyznaczalnej kopule siatkowej najbardziej racjonalny jest sposób polegający na wykorzystaniu teorii błonowej powłok małowyniosłych (prawie trzykrotne zmniejszenie ilości równań w stosunku do sposobu dokładnego oraz nie zachodzi potrzeba pracochłonnego obliczania kosinusów kierunkowych osi prętów).

Rozpatrywaną kopułę siatkową można założyć również na innych rzutach (kołowy, prostokątny itd.), wymaga to jednak każdorazowej analizy geometrycznej niezmienności i statycznej niewyznaczalności otrzymanego ustroju.

6. Przykład

Podany niżej przykład ma na celu pokazanie różnic pomiędzy, wynikami uzyskanymi przy obliczaniu kopuł siatkowych według wyżej omówionych metod. W przykładzie przyjęto: $\frac{H}{L} = \frac{1}{6}$, $n = 5$ oraz obciążenie równoległe do osi z,równomiernie rozłożone p. Otrzymano długości prętów $a = 0{,}128612$ R, przy długości najkrótszego pręta $\{3{,}1 - 3{,}2\}$ równej 0,114879 R; $L = 1{,}2$ R, $\delta = 0{,}12$ R, maksymalna odległość pomiędzy węzłami siatki trójkątnej utworzonej na płaszczyźnie xy a rzutami odpowiadających im węzłów kopuły siatkowej na tę płaszczyznę wynosi 0,017697R (węzeł (2.2)).

I. Korzystając z równań równowagi sił w węzłach otrzymano 21 równań o dwudziestu jeden niewiadomych.

II. Dla obliczenia sił według teorii błonowej powłok przyjęto dla funkcji naprężeń na brzegu (węzły (5.0), (4,1) i (3,2)) wartości równe zeru otrzymując 9 równań o dziewięciu niewiadomych. Dla napisania równań zachodzi jednak potrzeba obliczania współczynników przy niewiadomych.

III. Dla obliczenia sił w prętach kopuły siatkowej według teorii powłok małowyniosłych na wyznaczenie wartości funkcji naprężeń otrzymano 11 równań o jedenastu niewiadomych. Wielkości sił obliczono dla zmiennych parametrów H/L i L, a następnie podstawiono dane przyjęte w przykładzie.

Otrzymane siły w prętach zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Pręt	I	II	III
0,0-1,0	$-0{,}03708\ R^2p$	$-0{,}03718\ R^2p$	$-0{,}03483\ R^2p$
0,1-1,0	$-0{,}03599\ R^2p$	$-0{,}03660\ R^2p$	$-0{,}03397\ R^2p$
1,0-2,0	$-0{,}03887\ R^2p$	$-0{,}03877\ R^2p$	$-0{,}03739\ R^2p$
1,0-1,1	$-0{,}03536\ R^2p$	$-0{,}03554\ R^2p$	$-0{,}03365\ R^2p$
1,1-2,0	$-0{,}03357\ R^2p$	$-0{,}03414\ R^2p$	$-0{,}03263\ R^2p$

cd. tablicy 1

Pręt	I	II	III
2,0-3,0	-0,04826 R^2p	-0,04672 R^2p	-0,04898 R^2p
2,0-2,1	-0,02671 R^2p	-0,02741 R^2p	-0,02558 R^2p
1,1-2,1	-0,03656 R^2p	-0,03687 R^2p	-0,03589 R^2p
1,2-2,1	-0,03730 R^2p	-0,03896 R^2p	-0,03864 R^2p
2,1-3,0	-0,02909 R^2p	-0,02971 R^2p	-0,02995 R^2p
3,0-4,0	-0,07955 R^2p	-0,07605 R^2p	-0,08510 R^2p
3,0-3,1	-0,00204 R^2p	-0,00370 R^2p	-0,00044 R^2p
2,1-3,1	-0,04764 R^2p	-0,04691 R^2p	-0,04908 R^2p
2,1-2,2	-0,01902 R^2p	-0,02138 R^2p	-0,01905 R^2p
2,2-3,1	-0,04541 R^2p	-0,04859 R^2p	-0,05264 R^2p
3,1-4,0	-0,01738 R^2p	-0,01984 R^2p	-0,02767 R^2p
4,0-5,0	-0,17461 R^2p	-0,17586 R^2p	-0,20088 R^2p
4,0-4,1	+0,07109 R^2p	+0,06577 R^2p	+0,07931 R^2p
3,1-4,1	-0,07748 R^2p	-0,07439 R^2p	-0,08068 R^2p
3,1-3,2	+0,02102 R^2p	+0,01889 R^2p	+0,02231 R^2p
2,2-3,2	-0,02185 R^2p	-0,02131 R^2p	-0,02348 R^2p

Siły otrzymane według teorii błonowej powłok różnią się nieznacznie od wyników otrzymanych z warunków równowagi sił w węzłach. Większe różnice występują w przypadku zastosowania teorii błonowej powłok małowyniosłych. W prętach, w których występują największe siły, różnice pomiędzy wynikami wynoszą: dla pręta $\{4,0-5,0\}$ 15%, dla pręta $\{3,0-4,0\}$ 7,6%. Różnice pomiędzy wielkościami sił w pozostałych prętach nie przekraczają 0,01029 R^2p co w stosunku do siły w pręcie $\{4,0-5,0\}$ wynosi 5,9%.

LITERATURA

[1] Shu-T'ien Li: Matrix analysis of inderterminate space trusses "Mémoires Association Internationale des Ponts et Charpentes" 22 (1962) str. 129-143.

[2] Pagano M.: Theoretical experimental research on triangulated steel - vaults. Hanging roofs. Proceedings of the International Association of Shell Structures, Paris 1962, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1963, str. 265-275.

[3] Woźniak Cz.: Theory of Fibrous Media (II) "Archiwum Mechaniki Stosowanej" 6,17 (1965), str. 777-799.

[4] Peła R., Woźniak Cz.: Wstęp do teorii kratownic powierzchniowych "Archiwum Inżynierii Lądowej" XII (1966) Z. 4, str. 475-490.

[5] Grodecki Z.: Kratownice powierzchniowe w zastosowaniu do analizy bezmomentowego stanu napięcia otwartych powłok obrotowo-symetrycznych (Praca habilitacyjna) "Zeszyty Naukowe Politechniki Wrocławskiej" 59 (1962).

[6] Gutkowski W.: Walcowe powłoki prętowe "Archiwum Mechaniki Stosowanej" 3, 17 (1965), str. 481.

[7] Dean D.L.: On the Statics of Latticed Shells "Mémoires Association Internationale des Ponts et Charpentes" 25 (1965) str. 65-81.

[8] Makowski Z.S.: Construction spatiale en acier. 1963 Verlag Stahleisen m. b. H., Düsseldorf, Bruxelles 1964.

[9] Pucher A.: Die Berechnung von deppelt gekrümmten Schalen mittels Differenzengleichungen "Der Bauingenieur" 8 (1937) 9/10 str. 118-123.

[10] Wright D.T.: Membrane forces and bucling in reticulated shells "Journal of the Structural Division, ASCE" Vol. 91 (1965) ST 1, str. 173-201.

[11] Vlasov V.Z.: Obščaja teorija oboločeki ee priloženija v technike. Gostechizdat, 1949.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РАССЧИТЫВАНИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СЕТЧАТЫХ КУПОЛОВ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено три способа рассчитывания сил в стержнях пологого сетчатого купола основаного на шестиугольнике. Для нагрузки параллельной к оси z, разложеной на симметрическую и антисиметрическую а также шарнирного соединения стержей получаем статически определимую систему. Силы в стержнях определеио опираясь на уравнениях равновесия сил в узлах а также опираясь на уравнениях равновесия безмоментной теорни оболочек и опираясь на уравнениях равновесия безмоментной теории пологих оболочек.

ÜBER EINIGE METHODEN ZUR BERECHNUNG DER STATISCH BESTIMMTEN NETZKUPPELN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Der Artikel betrachtet drei Arten zur Berechnung der Stabkräften in einer auf einem Sechseck verbauten schwach gekrümmter Netzkuppel. Für Belastung parallel zu z Achse, zerlegte auf symmetrische und antisymmetrische hat man erhalten eine statisch bestimmte Anordnung. Die Stabkräften hat man bestimmt auf gründung der Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte im Knotenpunkt sowie auf gründung der Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie der Schalen und auf gründeng der Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie der schwach gekrümmter Schalen.