

LESZEK LITWINOWICZ

O ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ RÓWNOWAGI GRANICZNEJ
GRUNTU METODĄ PIERWSZEGO PRZYBLIŻENIA

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposoby numerycznego rozwiązywania równań opisujących stan równowagi granicznej gruntu umożliwiające zwiększenie skuteczności obliczeń. Uzupełnieniem niniejszej pracy jest praca autora [4].

1. Wstęp

Metoda pierwszego przybliżenia w numerycznym rozwiązywaniu równań równowagi granicznej gruntu polega na aproksymacji linii charakterystyk ich stycznymi, na odcinkach wynikających z wielkości przyjętego kroku obliczeniowego. Znalezione w ten sposób wartości współrzędnych węzłów siatki linii charakterystyk^{x)} oraz wartości poszukiwanych funkcji w tych węzłach poprawia się zwykle na drodze iteracji np. według schematów których bliższe omówienie można znaleźć w pracy [1].

U podstaw ogólnej metody numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej gruntu, którą podał W.W. SOKOŁOWSKI [6] leży schemat obliczeń zaproponowany przez J. MASSAU [1]. Poniżej przedstawimy możliwości innych rozwiązań w ramach metody pierwszego przybliżenia dla równań opisujących stan równowagi granicznej gruntu.

2. Równania wyjściowe

Stan równowagi granicznej gruntu opisuje następujący układ równań różniczkowych:

^{x)} Siatka linii charakterystyk na płaszczyźnie x, y przedstawia obraz linii poślizgu w gruncie.

$$(1 + \sin \varrho \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\sigma \sin \varrho \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \varrho \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + 2\sigma \sin \varrho \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = \gamma,$$

$$\sin \varrho \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\sigma \sin \varrho \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + (1 - \sin \varrho \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + 2\sigma \sin \varrho \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Równania (2.1) można zapisać w bardziej wygodnej, symetrycznej postaci:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\sigma \operatorname{tg} \varrho \frac{\partial \theta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ = -\gamma [\operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg}(\theta + \mu) - 1], \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\sigma \operatorname{tg} \varrho \frac{\partial \theta}{\partial x} + \operatorname{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ = \gamma [\operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg}(\theta - \mu) + 1].$$

W równaniach tych oznaczają:

ϱ - kąt tarcia wewnętrznego gruntu,

γ - ciężar objętościowy gruntu,

θ - kąt między kierunkiem większego naprężenia głównego a osią x,

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2},$$

zaś

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + k \operatorname{ctg} \varrho,$$

gdzie: σ_1 i σ_2 są to naprężenia główne, natomiast k oznacza współczynnik spójności gruntu.

W dalszych rozważaniach jako równania wyjściowe przyjmujemy równania równowagi granicznej gruntu w postaci (2.2). Należy dodać, że układ (2.2) jest układem quasiliniowych

równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, typu hiperbolicznego. Stąd też mamy dwie rzeczywiste i różne rodziny charakterystyk, których równania są następujące:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\Theta + \mu),$$

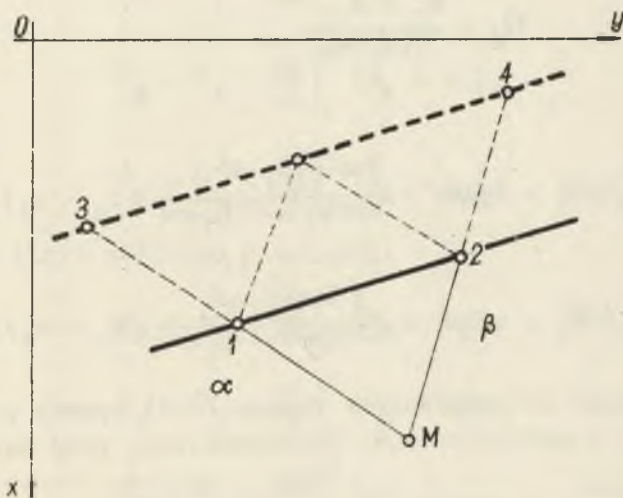
$$\sin 2\mu d\sigma + 2\sigma \cos 2\mu d\Theta - \gamma [\cos 2\Theta dy - \sin 2\Theta dx] = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\Theta - \mu),$$

$$\sin 2\mu d\sigma - 2\sigma \cos 2\mu d\Theta + \gamma [\cos 2\Theta dy - \sin 2\Theta dx] = 0.$$

3. Obliczeniowe wzory numeryczne dla metody pierwszego przybliżenia

Dany jest ośrodek gruntowy, którego każdy punkt znajduje się w stanie równowagi granicznej. Wybierzmy dwa blisko siebie położone punkty 1 i 2 (rys. 1), w których znane są wartości współrzędnych ich położenia x i y oraz wartości poszukiwanych funkcji σ i Θ . Punkty 1 i 2 mogą być punktami powierzchni



Rys. 1. Fragment siatki linii poślizgu w gruncie

gruntu lub znajdować się wewnątrz ośrodka. Wiadomo, że przez każdy z tych punktów przechodzą dwie płaszczyzny poślizgu. Poszukujemy współrzędnych punktu M oraz wartości σ_M i θ_M w tym punkcie.

3.1. Metoda W.W. Sokołowskiego

Równania charakterystyk (2.3) sprowadzone do postaci różnicowej dają układ czterech równań algebraicznych, z których można obliczyć wszystkie poszukiwane wartości w punkcie M. W ten sposób dla współrzędnych punktu otrzymujemy następujące wzory:

$$x_M = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}, \quad (3.1)$$

$$y_M = y_1 + (x_M - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu),$$

zaś dla wartości poszukiwanych funkcji σ oraz θ w tym punkcie otrzymujemy wzory w postaci:^{x)}

$$\sigma_M = \frac{w_I \sigma_2 + w_{II} \sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2) \operatorname{tg}^2 \mu} \quad (3.2)$$

$$\theta_M = \frac{w_I - w_{II}}{2(\sigma_1 + \sigma_2)},$$

gdzie:

$$w_I = \sigma_1 (2\theta_1 + \operatorname{tg} 2\mu) - \frac{\gamma \sin(\theta_1 - \mu)}{\cos 2\mu \cos(\theta_1 + \mu)} (x_M - x_1),$$

$$w_{II} = \sigma_2 (2\theta_2 - \operatorname{tg} 2\mu) + \frac{\gamma \sin(\theta_2 + \mu)}{\cos 2\mu \cos(\theta_2 - \mu)} (x_M - x_1).$$

Przedstawiony na przykładzie równań (2.3) sposób postępowania stosowany w metodzie W.W. SOKOŁOWSKIEGO, przy rozwiązywa-

^{x)} Indeksy oznaczone cyframi arabskimi oznaczają numery punktu.

niu podstawowego zagadnienia brzegowego dla układu równań równowagi granicznej gruntu, nie jest jedyną możliwością rozwiązania tego zagadnienia. Poniżej przedstawimy inne schematy rozwiązań mające tę zaletę, że dają podstawę do wprowadzenia znacznie skuteczniejszych sposobów zwiększania dokładności obliczeń w porównaniu z możliwościami jakie daje metoda W.W. SOKOŁOWSKIEGO [6].

3.2. Inne rozwiązania

Podane poniżej schematy rozwiązań wywodzą się z metody przedstawionej już wcześniej przez autora w pracy [3]. Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie w oparciu o przedstawioną tam teorię, wzorów numerycznych dla metody pierwszego przybliżenia dostosowanych do praktycznego stosowania i umożliwiających w łatwy sposób zwiększanie dokładności obliczeń.

Przyjmijmy, że płaszczyznę poślizgu α (rys. 1) opisuje pierwsza rodzina charakterystyk (2.3) zaś β , odpowiednio druga rodzina charakterystyk. Będziemy poszukiwali parametrów punktu M przyjmując, że wzdłuż poślizgu α są słuszne następujące związki:

$$\begin{aligned} y_M &= y_1 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_1^{\alpha} (x_M - x_1), \\ \sigma_M &= \sigma_1 + \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_1^{\alpha} (x_M - x_1), \\ \theta_M &= \theta_1 + \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_1^{\alpha} (x_M - x_1), \end{aligned} \quad (3.3)$$

zaś wzdłuż linii poślizgu β związki:

$$\begin{aligned} y_M &= y_2 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_2^{\beta} (x_M - x_2), \\ \sigma_M &= \sigma_2 + \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_2^{\beta} (x_M - x_2), \\ \theta_M &= \theta_2 + \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_2^{\beta} (x_M - x_2). \end{aligned} \quad (3.3')$$

Z równań (3.3) i (3.3) wartości współrzędnych x oraz y otrzymujemy bez trudu na podstawie znajomości kierunków linii poślizgu α i β w punktach 1 i 2. Są to wzory identyczne z wzorami (3.1). Aby obliczyć wartości funkcji δ_M i Θ_M wystarczy teraz skorzystać ze związków dotyczących tylko jednej z linii poślizgu. Niech to będzie linia poślizgu α

Wartości $\frac{d\delta}{dx}\Big|_1^\alpha$ oraz $\frac{d\Theta}{dx}\Big|_1^\alpha$ można obliczyć na podstawie zależności:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dx}\Big|_1^\alpha &= \frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{\partial\delta}{\partial y} \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu), \\ \frac{d\Theta}{dx}\Big|_1^\alpha &= \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial y} \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu).\end{aligned}\quad (3.4)$$

W wyniku rozwiązania układu równań utworzonego z (2.2) i różniczek zupełnych, dla znanych wzdłuż linii łączącej punkty 1 i 2, funkcji δ oraz Θ otrzymamy:^{x)}

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta}{\partial x} &= \frac{\left[\operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) + \operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu) \right] - 2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) \operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu)}{2 \left[\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \left[\operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) + \right. \right.} \\ &\quad \left. \left. - 2\delta_1 \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu) - \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) \right] \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{y_1 - y_2} + \left[\operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu) + \right. \right. \right.} \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu) - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) \operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu) \right] - \right.} \\ &\quad \left. + \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) \right] \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} - \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\Theta_1 - \mu) - \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) \right] - 2} - 1},\end{aligned}\quad (3.5)$$

^{x)} Linia łącząca punkty 1 i 2 jest fragmentem krzywej niecharakterystycznej na której podane są warunki brzegowe zagadnienia [1].

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \delta}{\partial y} = & \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2} - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \frac{\left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] -}{2 \left[\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \right. \right.} \\
 & \left. \left. - 2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2} - 2\sigma_1 \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \right. \right.} \\
 & \left. \left. + \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \right] \frac{\theta_1 - \theta_2}{y_1 - y_2} + \gamma \left[\left[\operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \right] \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] - \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \right] - 2 \right] \right. \\
 & \left. \left. - 1 \right] \right. \tag{3.5} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial x} = & \frac{2\sigma_1 \operatorname{tg} \left[\left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] - 2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \frac{\theta_1 - \theta_2}{y_1 - y_2} -}{4\sigma_1 \operatorname{tg} \left[\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \right. \right.} \\
 & \left. \left. - \left[\operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \right] \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2} - \gamma \left[\left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) - \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) + \right. \right. \right.} \\
 & \left. \left. \left. - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 2 \operatorname{tg} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} + \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \right] \right. \\
 & \left. \left. - 1 \right] \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial y} = & \frac{\theta_1 - \theta_2}{y_1 - y_2} - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \frac{2\sigma_1 \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \right.}{4\sigma_1 \operatorname{tg} \left[\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \right. \right.} \\
 & \left. \left. - 2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \frac{\theta_1 - \theta_2}{y_1 - y_2} - \left[\operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \right] \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2} - \right. \\
 & \left. + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) - \right. \\
 & \left. - \gamma \left[\left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) - \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) + 2 \operatorname{tg} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} + \right. \\
 & \left. - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] - \\
 & \left. + \operatorname{tg} \left[\operatorname{tg}(\theta_{1+\mu}) + \operatorname{tg}(\theta_{1-\mu}) \right] \right] . \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

W celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy dalej następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 A = \varphi O_4 - \frac{1 - \xi O_4}{\xi(O_3 - \xi O_1) - 1} \left\{ 2\xi \varphi O_1 + (1 + 26\psi) O_2 \operatorname{tg} \varphi - \right. \\
 \left. - (\varphi + \xi) O_3 + 2 \right\} , \\
 B = \varphi O_4 - \frac{1 - \xi O_4}{46 \operatorname{tg} \varphi [\xi(O_3 - \xi O_1) - 1]} \left\{ (1 + 26\psi) (2\xi O_1 - \right. \\
 \left. - O_3) \operatorname{tg} \varphi + (\varphi - \xi) O_2 \right\} . \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$O_1 = \operatorname{tg}(\theta_{+\mu}) \operatorname{tg}(\theta_{-\mu}) ,$$

$$O_2 = \operatorname{tg}(\theta_{-\mu}) - \operatorname{tg}(\theta_{+\mu}) ,$$

$$0_3 = \operatorname{tg}(\theta - \mu) + \operatorname{tg}(\theta + \mu),$$

$$0_4 = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)$$

W przypadku linii poślizgu α dla 0_4 bierzemy znak "+".
Wartości ξ , φ oraz ψ wynikają z warunków brzegowych:

$$\xi = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

$$\varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{y_1 - y_2},$$

$$\psi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{y_1 - y_2}$$

Ostatecznie poszukiwane wzory numeryczne otrzymujemy w następującej postaci:

$$\sigma_M = \sigma_1 + A_1 (x_M - x_1),$$

$$\theta_M = \theta_1 + B_1 (x_M - x_1). \quad (3.7)$$

We wzorach (3.7) współczynniki A i B dotyczą punktu 1 co zaznaczone zostało indeksem. Przyjęto tam również $k = 1$ oraz $\gamma = 1$ w celu uzyskania zapisu we współrzędnych bezwymiarowych.

Na podstawie (3.1) oraz (3.6) możemy obliczyć wartości x , y , σ oraz θ w punkcie M.

Obliczenie tych wartości w dalszych punktach wykonuje się analogicznie. Przedstawiona metoda^{x)} obliczeń jest prosta i posiada dodatkowo tę zaletę, że daje możliwość bezpośredniego i łatwego zastosowania w obliczeniach siatki utworzonej z kwadratowych parabol. Uzyskuje się to poprzez wprowadzenie poprawek do wartości x_M i y_M obliczonych z wzorów (3.1). Poprawioną wartość współrzędnej x_M^* otrzymujemy z zależności:

$$x_M^* = x_M + \varepsilon \quad (3.8)$$

^{x)} Uzupełnieniem przedstawionych wyprowadzeń jest praca [4].

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{e_{\beta} (x_M - x_2)^2 - e_{\alpha} (x_M - x_1)^2}{2 [e_{\alpha} (x_M - x_1) - e_{\beta} (x_M - x_2) + \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)]}$$

zaś

$$e_{\alpha} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu) B_1}{(1 - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \mu)^2 \cos^2 \theta_1},$$

$$e_{\beta} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu) B_2}{(1 + \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \mu)^2 \cos^2 \theta_2}.$$

Wartość B_2 oblicza się na podstawie (3.6) jak dla punktu 2.

Poprawioną wartość współrzędnej y_M^* otrzymujemy z wzoru:

$$y_M^* = y_1 + (x_M^* - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) + \frac{e_{\alpha}}{2} (x_M^* - x_1)^2. \quad (3.9)$$

Zastosowanie w obliczeniach poprawionych współrzędnych x_M^* oraz y_M^* , pozwala na zwiększenie dokładności obliczeń.

Wartości δ_M oraz θ_M można obliczać przy zastosowaniu równań (3.3) i (3.3') również w inny sposób, mianowicie drogą uzupełniania tych równań równaniami charakterystyk.

W efekcie otrzymujemy układ czterech równań, w których jako niewiadome występują pochodne funkcji δ i θ w punktach 1 oraz 2 liczone w kierunku odpowiednich charakterystyk. Pomijając związane z tym obliczenia, zauważymy że postępując w ten sposób otrzymuje się wzory identyczne z wzorami (3.2), a jeżeli w obliczeniach w podobny sposób uwzględnimy także punkty 3 i 4 (rys. 1), traktując je jako znane [3], otrzymujemy następujące proste wzory na wartości e_{α} oraz e_{β} :

$$e_{\alpha} = \frac{y_1 - y_3 - \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu)(x_1 - x_3)}{2 (x_1 - x_3)^2}, \quad (3.10)$$

$$e_{\beta} = \frac{y_2 - y_4 - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)(x_2 - x_4)}{2 (x_2 - x_4)^2}.$$

Należy stwierdzić, że przedstawione sposoby numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej gruntu metodą pierwszego przybliżenia, stwarzają możliwość zastosowania w obliczeniach nowych, praktycznych sposobów zwiększania efektywności obliczeń. O skuteczności takiego postępowania można sądzić na podstawie wyników uzyskanych przez A.J. GOWIADINOWA i S.W. FAIKOWICZA [2], którzy dzięki zastosowaniu w obliczeniach aproksymacji linii charakterystyk odcinkami odpowiednio poprowadzonych kół, otrzymali ponad pięćdziesięciokrotnie mniejszą ilość węzłów obliczeniowych w porównaniu z ilością jaką rozpatrywali J.S. MUCHIN i A.J. SRAGOWICZ [6], rozwiązując to samo zagadnienie ze stateczności skarp metodą stycznych.

LITERATURA

- [1] Березин И.С., Жидков Н.П.:— Методы вычисления (2) 1962.
- [2] Говядинов А.И., Фалькович С.В.: Устойчивость откосов при предельном состоянии равновесия Инж. Кур. 14, 1953.
- [3] Litwinowicz L.: w sprawie numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodka gruntowego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. — Budownictwo, 13, 1964.
- [4] Litwinowicz L.: Analiza numerycznego rozwiązania zagadnienia brzegowego typu mieszanego dla układu równań równowagi granicznej gruntu. Zesz. Nauk. Pol. Śl. — Budownictwo, 19, 1966.
- [5] Мухин И.С., Срагович А.И.: Форма контуров равноустойчивых откосов, Инж. Курн. 23, 1956.
- [6] Sokołowski W.W.: Statyka ośrodków sypkich. Warszawa 1958 (tłum. z ros.).

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В работе предлагается методы повышения точности численного решения уравнений предельного равновесия грунтовой среды. Дополнением настоящей работы есть статья [4].

SOLVEING ULTIMATE EQUILIBRIUM EQUATION OF SOIL BY FIRST
APROXIMATION METOD

S u m m a r y

The article presents new methods which give a better precision of numerical solution of equations describing the state of ultimate equilibrium of soil.

This article is supplementd by another paper by the some author [4].