

RUDOLF KOPPEL

O OBLICZANIU MOMENTÓW POPRZECZNYCH
W PŁYTACH MOSTOWYCH METODĄ GUYONA-MASSONNETA

Streszczenie. W pracy dokonano analizy wpływu współczynnika odkształcalności poprzecznej na wielkość momentów zginających M_y płyty izotropowej o stosunku boków $B/l = 0,6$ w oparciu o metodę Guyona-Massonneta. Podano wykresy zależności między momentem M_y a współczynnikiem Poissona dla równomiernego obciążenia liniowego.

1. Wstęp

Z praktyki projektowania żelbetowych mostów płytowych wiadomo, że poprzeczne momenty zginające obliczone metodą Guyona-Massonneta (G-M) mogą być obarczone dość znacznym błędem. Wobec tego stosowane są do wyznaczania momentów poprzecznych zwykle metody powierzchni wpływowych.

Analizą momentów poprzecznych w ustrojach mostowych zajmował się K. Bieniek [1]. Z jego rozważań, dotyczących metody G-M, wynika między innymi, że

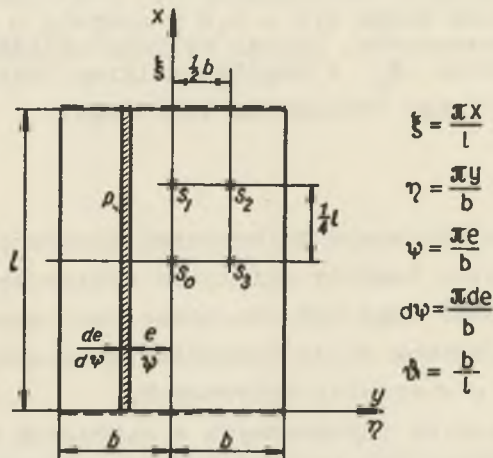
- przy obliczaniu momentów poprzecznych należy uwzględnić większą liczbę wyrazów szeregu określającego M_y
- momenty poprzeczne należy obliczać nie tylko w punkcie środkowym przęsła S_0 lecz również w innych, a co najmniej w punktach S_1, S_2, S_3 (rys. 1),
- stosunek $\varrho = \frac{\sum_{n=1}^n M_{y,n}}{M_{y,1}}$ maleje ze wzrostem parametru ϑ

W metodzie G-M określa się momenty poprzeczne w oparciu o zależność

$$M_y(x, y, e) = \sum_1^n \mu(n\vartheta, \alpha, y, e) \cdot t p_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1)$$

gdzie: oznaczono przez

- n - kolejny wyraz szeregu,
- x, y - współrzędne punktu w którym liczymy momenty M_y ,
- e - mimośród położenia obciążenia,
- $l, 2b$ - długość i szerokość płyty,
- p_n - n -ty wyraz rozwinięcia obciążenia w szereg w kierunku osi x o okresie $2l$,
- μ - współczynnik Massonneta (dla $\alpha = 1$ i $\alpha = 0$ odczytujemy wartości μ_1 i μ_0 z tablic [5]).



Rys. 1. Płyta mostowa oparta swobodnie na krawędziach $x = 0, l$

Dla dowolnych parametrów α wyznaczamy współczynniki Massonneta w przybliżeniu ze wzoru interpolacyjnego

$$\mu_\alpha = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0) \sqrt{\alpha}. \quad (2)$$

Należy tu podkreślić, że współczynniki μ_1 zostały obliczone przez Massonneta [2] bez uwzględnienia współczynnika Poissona ν . Z teorii płyt wiadomo jednak, że współczynnik odkształcalności poprzecznej ν ma istotny wpływ na wielkość momentów zginających M_y i według R.E. Rowe'a [3] należy go uwzględniać, gdy $\nu > 0,15$ - co dla ustrojów żelbetowych ra-

czej zawsze zachodzi [4]. I stąd pochodzą niewątpliwie błędy w wielkościach M_y wyznaczonych metodą G-M. Inna przyczyna tkwi również w samym wzorze interpolacyjnym (2) który wymaga ściślejszego ujęcia (np. z uwzględnieniem parametru δ , miejsca obciążenia, położenia badanego punktu, rodzaju obciążenia).

Poniżej dokonano analizy wpływu współczynnika Poissona na wielkości maksymalnych momentów poprzecznych w płytach izotropowych w oparciu o metodę G-M.

2. Podstawy teoretyczne

Na rys. 1 podano rzut poziomy swobodnie podpartego przęsła płytowego, systemy współrzędnych i położenie obciążenia liniowego

$$P(\xi) = \sum_n p_n \sin(n\xi)$$

lub pasmowego

$$p(\xi) = \frac{P(\xi)}{de} = \frac{\pi}{b \cdot d\psi} P(\xi) = \frac{\pi}{d\psi} \sum_n \frac{p_n}{b} \sin(n\xi).$$

Posługując się funkcją skoku

$$g(\eta) = \frac{d\psi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_m \cos m(\eta - \psi) \right]$$

$$g(\eta) = 1 \quad \text{dla } \psi \leq \eta < \psi + d\psi$$

$$g(\eta) = 0 \quad \eta < \psi \text{ i } \eta > \psi + d\psi$$

można wyrazić obciążenie $p(\xi)$ na jednostkę powierzchni płyty jako iloczyn $p(\xi) \cdot g(\eta)$ a równanie różniczkowe płyty ortotropowej w postaci:

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha \sqrt{B_x B_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(\xi) \cdot g(\eta)$$

gdzie: $\alpha = \frac{H}{\sqrt{B_x B_y}}$.

Rozwiązanie tego równania metodą szeregów dla $B_x = B_y = D$, czyli dla $\alpha = 1$, można przedstawić ogólnie w postaci

$$\begin{aligned} w &= \sum_n w_n = \sum_n (Z_n + W_n) = \\ &= \sum (Z_n + X_n Y_n), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$Z_n = \frac{16a^4}{n^4 \pi^4 D} \cdot \frac{P_n}{2b} \sin(n\xi)$$

przedstawia tzw. "ugięcie średnie" płyty wywołane n -tym wyrazem szeregu obciążenia rozłożonego równomiernie na szerokości $2b$. Przyjmując dalej

$$X_n = \frac{P_n}{bD} \cdot \frac{b^4}{\pi^4} \sin(n\xi)$$

otrzymamy dla funkcji $Y_n(\eta)$ wyrażenie

$$\begin{aligned} Y_n(\phi, \eta) &= A_1 \cosh(n\phi\eta) + A_2 \sinh(n\phi\eta) + A_3 n\phi\eta \cosh(n\phi\eta) + \\ &+ A_4 \cdot n\phi\eta \sinh(n\phi\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(\eta-\psi)}{(n^2\phi^2 + m^2)^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: stałe całkowania A_1 należy wyznaczyć z warunków brzegowych dla $y = \pm b$. W tym miejscu, tzn. poprzez warunki brzegowe na swobodnych krawędziach płyty wchodzi w poszukiwaną funkcję ugięcia w_n współczynnik rozszerzalności poprzecznej ν . Stosując dla funkcji rozwiniętych według m wzory sumacyjne R.E. Row e'a [3] możemy po wyznaczeniu stałych całkowania A_1 przedstawić wyrażenie (4) w postaci rozwiniętej

$$\begin{aligned} Y_n(\phi, \eta) &= -\frac{1}{2n^4\phi^4} + \frac{\sigma}{4n^4\phi^4 \sinh^2\sigma} \left\{ \left[(1-\nu)\sigma \cosh\sigma - (1+\nu)\sinh\sigma \right] \cosh(n\phi\eta) - \right. \\ &- (1-\nu)\sinh\sigma \cdot n\phi\eta \cdot \sinh(n\phi\eta) \Big\} M + \left\{ \left[(1-\nu)\sigma \cosh\sigma + 2\sinh\sigma \right] \sinh(n\phi\eta) - \right. \\ &- (1-\nu)\sinh\sigma \cdot n\phi\eta \cdot \cosh(n\phi\eta) \Big\} N + (\sigma \cosh\sigma + \sinh\sigma) \cosh(n\phi x) - \sinh\sigma \cdot n\phi x \cdot \\ &\quad \cdot \sinh(n\phi x), \end{aligned}$$

gdzie:

$$\sigma = n\delta l; \quad x = l - |\eta - \psi|$$

$$M = \frac{[(1-\nu)\sigma \cosh\sigma - (1+\nu)\sinh\sigma] \cosh(n\delta\psi) - (1-\nu)\sinh\sigma \cdot n\delta\psi \cdot \sinh(n\delta\psi)}{[(3+\nu)\sinh\sigma \cdot \cosh\sigma - (1-\nu)\sigma] \cdot (1-\nu)}$$

$$N = \frac{[(1-\nu)\sigma \cdot \cosh\sigma + 2\sinh\sigma] \sinh(n\delta\psi) - (1-\nu)\sinh\sigma \cdot n\delta\psi \cdot \cosh(n\delta\psi)}{[(3+\nu)\sinh\sigma \cdot \cosh\sigma + (1-\nu)\sigma] \cdot (1-\nu)}$$

Tym samym została określona funkcja ugięcia (3).

Znając funkcję ugięcia w możemy obliczyć poszukiwany moment poprzeczny ze znanej zależności

$$M_y = \sum_1^n M_{y,n} = -D \sum_1^n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (5)$$

Uwzględniając (3) i (5) otrzymamy dla momentu M_y związaną formę

$$M_y = b \sum_n \mu_n \cdot p_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (6)$$

gdzie: μ_n jest poszukiwanym współczynnikiem Massonneta o postaci

$$\mu_n = -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{RS}{H_1} + \frac{TU}{H_2} + \nu \right), \quad (7)$$

gdzie:

$$R = [(1-\nu)\sigma \cdot \operatorname{ctgh}\sigma - (1+\nu)] \cosh(n\delta\psi) - (1-\nu)n\delta\psi \cdot \sinh(n\delta\psi)$$

$$S = [(1-\nu)\sigma \cdot \operatorname{ctgh}\sigma - (3+\nu)] \cdot \frac{\cosh(n\delta\psi)}{\sinh\sigma} - (1-\nu) \cdot n\delta\psi \cdot \frac{\sinh(n\delta\psi)}{\sinh\sigma}$$

$$T = [(1-\nu)\sigma \cdot \operatorname{ctgh}\sigma + 2] \sinh(n\delta\psi) - (1-\nu)n\delta\psi \cdot \cosh(n\delta\psi)$$

$$U = (1-\nu)\sigma c \operatorname{ctgh} \sigma \frac{\sinh(n\delta\nu)}{\sinh\sigma} - (1-\nu) \cdot n\delta\eta \frac{\cosh(n\delta\eta)}{\sinh\sigma}$$

$$V = \left[(1-\nu)\sigma \cdot \operatorname{ctgh} \sigma - (1+\nu) \right] \frac{\cosh(n\delta\eta)}{\sinh\sigma} - (1-\nu)n\delta\eta \frac{\sinh(n\delta\eta)}{\sinh\sigma}$$

$$M_1 = (3+\nu)\cosh\sigma - (1-\nu) \cdot \frac{\sigma}{\sinh\sigma}$$

$$M_2 = (3+\nu)\cosh\sigma + (1-\nu) \cdot \frac{\sigma}{\sinh\sigma} .$$

W tabelicy 1 zestawiono wartości współczynników μ_1 dla płyty o parametrze $\delta = 0,3$. Poszczególne wartości obliczone zostały według wzoru (7) dla współczynników Poissona $\nu = 0,10; 0,20; 0,30; 0,40$ i $0,50$. W celu określenia μ_1 dla $\nu = 0$ korzystano z tabeli podanych w pracy [5].

3. Omówienie wyników numerycznych

Posługując się współczynnikami μ_1 z tabl. 1, wyznaczono na podstawie zależności (6) maksymalny i minimalny moment zginający M_y dla środkowego punktu płyty ($f = 0$) od obciążenia liniowego $p = \text{const}$. Wartości momentów poprzecznych określono dla trzech wyrazów szeregu ($n = 1,3,5$) uwzględniając, że $p_n = \frac{4p}{n^2}$. Wyniki naniesiono na rys. 2 w postaci wykresów przedstawiających stosunki wielkości momentów do wartości pierwszego wyrazu szeregu (6) w zależności od współczynnika Poissona ν . Definicje współczynników $r_1^{\pm}, r_5^{\pm}, \varrho_5^{\pm}, \xi_5^{\pm}$, podane są na rys. 2, przy czym znaki \pm wskazują do jakich momentów, maksymalnych (+) czy minimalnych (-) się one odnoszą.

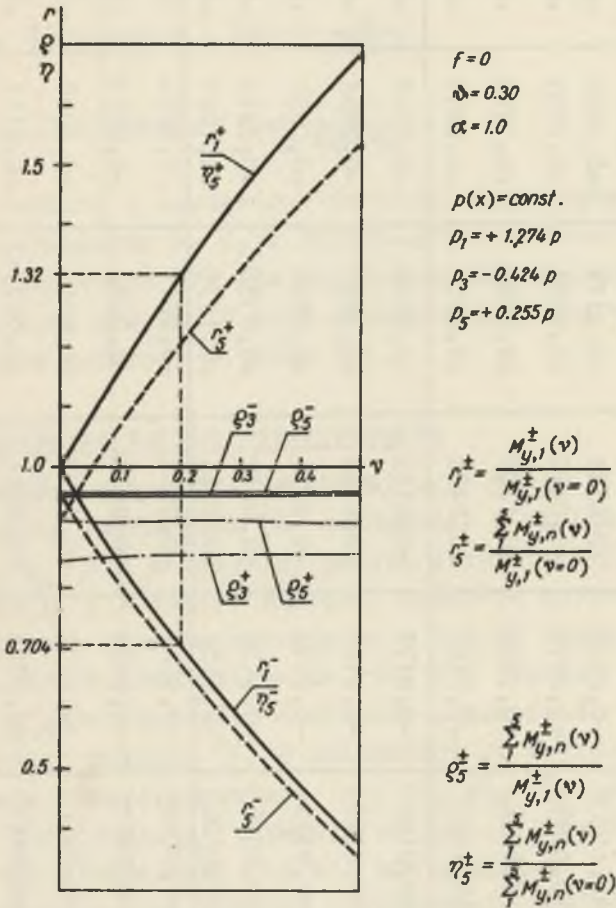
Przedstawione wykresy potwierdzają ogólnie znany fakt, że współczynnik Poissona ma istotny wpływ na wartości momentów poprzecznych w ustrojach płytowych i nie może być pominięty. Analizując wartości współczynników μ_1 dochodzimy do wniosku, że uwzględniając współczynnik Poissona otrzymamy większe momenty dodatnie. Odnośnie momentów ujemnych otrzymamy większe wartości posługując się współczynnikami $\mu_1 (\nu = 0)$.

Tablisa 1

Wartości współczynników μ_1 dla punktu $f = 0$

n	n δ	ϵ	Współczynnik Poissona ν					
			0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
1	0,30	$\pm \frac{3}{4} b$	-0,1401	+0,1184	-0,0991	-0,0819	-0,0666	-0,0527
		$\pm \frac{1}{4} b$	-0,0767	-0,0535	-0,0331	-0,0112	+0,0068	+0,0230
		$\pm \frac{1}{2} b$	-0,0102	+0,0178	+0,0427	+0,0651	+0,0853	+0,1037
		$\pm \frac{1}{4} b$	+0,0734	+0,1034	+0,1302	+0,1543	+0,1762	+0,1962
		0	+0,1820	+0,2127	+0,2403	+0,2651	+0,2877	+0,3083
3	0,30	$\pm b$	-0,0199	-0,0173	-0,0149	-0,0126	-0,0105	-0,0085
		$\pm \frac{3}{4} b$	-0,0188	-0,0146	-0,0106	-0,0067	-0,0031	+0,0004
		$\pm \frac{1}{2} b$	-0,0134	-0,0074	-0,0016	+0,0040	+0,0096	+0,0150
		$\pm \frac{1}{4} b$	+0,0096	+0,0176	+0,0257	+0,0335	+0,0412	+0,0488
		0	+0,0856	+0,0951	+0,1044	+0,1136	+0,1227	+0,1317
5	1,50	$\pm b$	-0,0049	-0,0026	-0,0022	-0,0019	-0,0016	-0,0013
		$\pm \frac{3}{4} b$	-0,0065	-0,0038	-0,0030	-0,0022	-0,0015	-0,0007
		$\pm \frac{1}{2} b$	-0,0082	-0,0054	-0,0037	-0,0019	-0,0002	+0,0015
		$\pm \frac{1}{4} b$	+0,0019	+0,0005	+0,0041	+0,0077	+0,0113	+0,0148
		0	+0,0577	+0,0583	+0,0636	+0,0689	+0,0742	+0,0796

Sprawa określenia wartości współczynnika Poissona dla danej konstrukcji jest w praktyce bardzo trudna. Do tego zaś współczynnik ten może się zmieniać w szerokich granicach, zależnie od rozpatrywanego punktu ustroju jak i w czasie.



Rys. 2. Wykresy zależności momentów M_y od współczynnika Poissona ν .

Stąd wydaje się, że w praktyce projektowania mostów płytowych można by trudność tą obejść posługując się obwiednią momentów poprzecznych wyznaczonych z uwzględnieniem współczynnika Poissona $\nu \neq 0$ oraz $\nu = 0$. Przy stosowaniu metody G-1 jest to bez większych trudności rachunkowych możliwe. W tym

celu trzeba opracować jedynie dodatkowe tablice współczynników μ_1 ($v \neq 0$).

Analizując współczynnik ρ dochodzimy do wniosku, że w praktyce projektowania wystarczy uwzględniać pięć wyrazów ($n = 5$) szeregu (6). Dla dalszych wyrazów współczynniki μ_n jak i p_n są zwykle dostatecznie małe aby można było pominąć iloczyny $\mu_n \cdot p_n$.

LITERATURA

- [1] Bieniek K.: O momentach poprzecznych w przęsłach mostowych. XII Konferencja Naukowa Komitetu Nauki PZITB i Komitetu Inżynierii Lądowej PAN, Krynica 1966.
- [2] Massonnet Ch.: Méthode de calcul des ponts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion. Mémoires Vol. 10. 1950.
- [3] Rowe R.E.: A load distribution theory for bridge slabs allowing for the effect of Poisson's ratio. Magazine of Concrete Research Vol. 7. July 1955.
- [4] Głomb J.: Wytrzymałość i odkształcalność betonu przy ścisnieniu dwukierunkowym. Archiwum Inżynierii Lądowej 1/1958.
- [5] Szczygieł J.: Mosty betonowe. Poznań-Warszawa-Lódź 1965.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ МОМЕНТОВ
В МОСТОВЫХ ПЛИТАХ МЕТОДОМ ГУИОНА-МАССОННЕ

Р е з ю м е

В статье подаётся анализ влиянию коэффициента поперечной деформации на величины изгибающих моментов M_y изотропной плиты при соотношениях боков $B/l = 0,6$ на основе метода Гуиона-Массонне. Подаётся график соотношений между моментам M_y и коэффициентом Пуассона для равномерно распределенной линейной нагрузки.

CALCULATION OF THE TRANSVERSAL BENDING MOMENTS IN
BRIDGE PLATES BY MEANS OF THE GUYON-MASSONNET'S METHOD

S u m m a r y

This paper discusses the influence of the Poisson coefficient ν on the values of the bending moment M_y for isotropic plates with the ratio $B/l = 0,6$; basing on Guyon-Massonnet's method.

There have been given the dependence diagrams between the M_y - moments and Poisson's ratio for line distributed load.