ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968
Seria: BUDOWNICTWO z. 22 Nr kol. 209

STANISŁAW BIELAK

# O MOŻLIWOŚCI PRACY POWŁOKI ŚRUBOWEJ W BEZMOMENTOWYM STANIE NAPIĘCIA

Streszczenie. W pracy rozwiązano równania równowagi powłoki śrubowej w bezmomentowym stanie napięcia oraz określono warunki jej pracy.

## Wstęp

Rozwiązaniu powłok śrubowych poświęcono prace [7, 8, 9, 10]. Opracowania te zajmują się stanem momentowym powłok o małym skoku śruby - zbliżonych do tarczy kołowej. W praktyce inżynierskiej najczęściej jednak występują powłoki o dużym skoku śruby (np. zsuwanie spiralne, podajniki śrubowe, schody i pochylnie śrubowe), dlatego też poznanie pracy takich powłok ma duże znaczenie praktyczne. W niniejszym opracowaniu rozważono możliwość pracy takiej powłoki śrubowej w bezmomentowym stanie napięcia.

Powłoka śrubowa jest powierzchnią prostokreślną, można więc równania równowagi oraz równania małych przemieszczeń sprowadzić do kwadratur, jeżeli wprowadzi się odpowiednie współrzędne krzywoliniowe. Obierając za jedną rodzinę linii parametrycznych na powierzchni środkowej powłoki rodzinę tworzących prostoliniowych, a za drugą rodzinę przyjmując linie śrubowe, otrzymamy układy równań równowagi oraz małych przemieszczeń, które separują się i można je rozwiązać.

Tak przyjęta parametryzacja pozwala ponadto na proste formułowanie warunków brzegowych. Ogólne wzory na napięcia i przemieszczenia, uzyskane drogą całkowania równań równowagi i równań małych przemieszczeń zawierają cztery niewiadome funkcje, zależne od sposobu zamocowania powłoki. Funkcje te wyznaczymy z warunków brzegowych. Wyprowadzone wzory określające napięcia i przemieszczenia w powłoce śrubowej podano dla warunków

brzegowych zadanych w przemieszczeniach oraz w napięciach i przemieszczeniach.

## Ogólna teoria powłoki śrubowej w bezmomentowym stanie napięcia

### 1. Opis geometryczny

Na rys. 1 pokazana jest helikoida odniesiona do prostokątnego układu współrzędnych Oxyz. Jej równanie parametryczne wyraża się przez:

$$x = u^1 \cos u^2,$$

$$y = u^1 \sin u^2, \tag{1.1}$$

$$z = a\, u^2.$$

Równanie wektorowe helikoidy we współrzędnych ma postać:

$$\vec{r} = u^1 \cos u^2 \vec{i} + u^1 \sin u^2 \vec{j} + a u^2 \vec{k}, \tag{1.2}$$

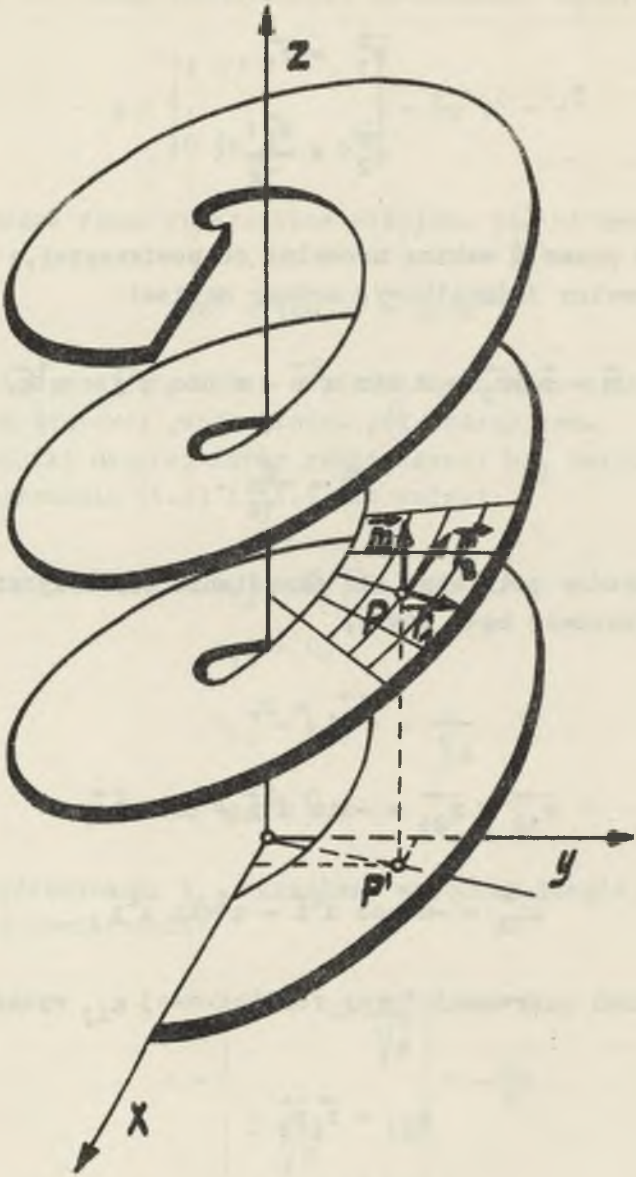
gdzie: zmienne $u^1$, $u^2$ są zawarte w przedziałach:

$$r \leqslant u^1 \leqslant R; \quad 0 \leqslant u^2 \leqslant 1\pi.$$

Wyznaczamy obecnie współczynniki pierwszej i drugiej formy kwadratowej powierzchni oraz symbole Christoffela drugiego rodzaju. Różniczkując równanie (1.2) względem parametrów $u^1$, $u^2$ otrzymamy wektory styczne do powierzchni śrubowej;

$$\vec{r}_1 = \cos u^2 \vec{i} + \sin u^2 \vec{j},$$

$$\vec{r}_2 = -u^1 \sin u^2 \vec{i} + u^1 \cos u^2 \vec{j} + a\vec{k}, \tag{1.3}$$




Rys. 1. Helikoida

oraz wektory styczne jednostkowe:

$$\vec{r}_1^* = \vec{r}_1 ,$$
$$\vec{r}_2^* = \frac{\vec{r}_2}{\sqrt{g}} . \tag{1.3'}$$

Oznaczając przez $\vec{m}$ wektor normalny do powierzchni, a przez $\vec{m}^*$ wektor normalny jednostkowy, możemy napisać:

$$\vec{m} = \vec{r}_1 x \vec{r}_2 = a \sin u^2 \vec{i} - a \cos u^2 \vec{j} + u^1 \vec{k},$$
$$\vec{m}^* = \frac{\vec{m}}{\sqrt{g}} . \tag{1.4}$$

Drugie pochodne potrzebne dla określenia współczynników drugiej formy kwadratowej będą równe;

$$\vec{r}_{11} = 0,$$
$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21} = -\sin u^2 \vec{i} + \cos u^2 \vec{j}, \tag{1.5}$$
$$\vec{r}_{22} = -u^1 \cos u^2 \vec{i} - u^1 \sin u^2 \vec{j} .$$

Współczynniki pierwszej formy różniczkowej $g_{ij}$ wyzaczymy z wzoru:

$$g_{ij} = \vec{r}_i \vec{r}_j .$$
$$g_{11} = 1,$$
$$g_{12} = g_{21} = 0, \tag{1.6}$$
$$g_{22} = (u^1)^2 + a^2 .$$

Wyróżnik tej formy różniczkowej powierzchni będzie równy:

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (u^1)^2 + a^2 \end{vmatrix} = (u^1)^2 + a^2$$

zaś pierwsza forma różniczkowa przyjmie postać kanoniczną:

$$ds^2 = (du^1)^2 + g(du^2)^2 .$$

Tak więc przyjęty układ współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni śrubowej jest układem półgeodezyjnym.
Współczynniki drugiej formy różniczkowej $b_{ij}$ znajdziemy podstawiając wyrażenia (1.3) i (1.4) do wzoru:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \vec{r}_{ij}\vec{m}^*, \\ b_{11} &= 0, \\ b_{12} &= b_{21} = -\frac{a}{\sqrt{g}} \\ b_{22} &= 0 . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Mając współczynniki $b_{ij}$ określamy wyróżnik drugiej formy różniczkowej powierzchni:

$$b = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{g}} \\ -\frac{a}{\sqrt{g}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{g} .$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju upraszczają się znacznie, ponieważ układ współrzędnych krzywoliniowych jest układem półgeodezyjnym:

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \quad \Gamma_{11}^{2} = 0, \quad \Gamma_{12}^{1} = 0,$$
$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{u^1}{g}, \quad \Gamma_{22}^{1} = -u^1, \quad \Gamma_{22}^{2} = 0. \tag{1.8}$$

## 2. Równania równowagi

Ogólne równania równowagi napięć w powłoce, opisujące bezmomentowy stan napięcia, odniesione do dowolnie obranego układu współrzędnych krzywoliniowych napiszemy w oparciu o pracę [2]

$$\frac{\partial T^1}{\partial u^1} + \frac{\partial S}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^{1} T^1 + 2\,\Gamma_{12}^{1} S + \Gamma_{22}^{1} T^2 + X = 0,$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial u^2} + \frac{\partial S}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^{2} T^1 + 2\,\Gamma_{12}^{2} S + \Gamma_{22}^{2} T^2 + Y = 0 \tag{2.1}$$

$$b_{11}T^1 + 2b_{12}S + b_{22}T^2 + Z = 0.$$

Rys. 2. Oznaczenie stanu napięcia

Funkcje $T^1$ i $T^2$ występujące w (2.1) są związane z napięciami $T_1$, $T_2$ (rys. 2) wzorami:

$$T^1 = \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\, T_1, \quad T^2 = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\, T_2 \tag{2.2}$$

Składowe obciążenia zewnętrznego $\vec{P}$ działającego na jednostkę pola powierzchni po-

włoki, w układzie zmiennym $O_{r_1 r_2 m}$ oznaczymy literami X, Y, Z. Składowe te przedstawimy jako iloczyny skalarne wektora obciążenia pomnożonego przez odpowiednie wektory kierunkowe układu współrzędnych.

$$X = \frac{g_{22}\vec{r}_1 - g_{12}\vec{r}_2}{\sqrt{g}}\vec{P},$$

$$Y = \frac{g_{11}\vec{r}_2 - g_{12}\vec{r}_1}{\sqrt{g}}\vec{P}, \tag{2.3}$$

$$Z = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)\vec{P}.$$

Równania równowagi napięć w powłoce śrubowej uzyskamy z wzorów (2.1) podstawiając odnośne wielkości z wyrażeń (1.7) i (1.8)

$$\frac{\partial T^1}{\partial u^1} + \frac{\partial S}{\partial u^2} - u^1 T^2 + X = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial u^2} + \frac{\partial S}{\partial u^1} + 2\frac{u^1}{g}S + Y = 0, \tag{2.5}$$

$$-2\frac{a}{\sqrt{g}}S + Z = 0. \tag{2.6}$$

gdzie:

$$T^1 = \sqrt{g}\,T_1, \quad T^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}T_2, \tag{2.7}$$

oraz

$$X = \sqrt{g}\,\vec{r}_1^{\,*}\,\vec{P},$$

$$Y = \vec{r}_2^{\,*}\,\vec{P}, \tag{2.8}$$

$$Z = \sqrt{g}\,\vec{m}^{*}\,\vec{P}.$$

3. Funkcje napięć

Dla przyjętych współrzędnych krzywoliniowych (1.1) równania (2.4) (2.5) (2.6) separują się i całki tego układu sprowadzają się do kwadratur.

Z równania (2.6) wyznaczymy:

$$S = \frac{\sqrt{g}}{2a} Z,$$

albo po podstawieniu Z z równań (2.8)

$$S = \frac{g}{2a}\,\vec{m}^{*}\,\vec{P}. \tag{3.1}$$

Mając S możemy przystąpić do rozwiązania równania (2.5). Zróżniczkujmy S względem $u^1$ i podstawmy znalezioną pochodną i jej funkcję pierwotną do (2.5)

$$\frac{\partial T^2}{\partial u^2} + \frac{u^1}{a}\,\vec{m}^{*}\,\vec{P} + \frac{g}{2a}\,\frac{\partial \vec{m}^{*}\,\vec{P}}{\partial u^1} + \frac{u^1}{a}\,\vec{m}^{*}\,\vec{P} + Y = 0,$$

a po uwzględnieniu Y z (2.8)

$$\frac{\partial T^2}{\partial u^2} + 2\,\frac{u^1}{a}\,\vec{m}^{*}\,\vec{P} + \frac{g}{2a}\,\frac{\partial \vec{m}^{*}\,\vec{P}}{\partial u^1} + \vec{r}_2^{\,*}\,\vec{P} = 0.$$

Wprowadzając funkcję pomocniczą

$$\phi(u^1,u^2) = 2\frac{u^1}{a}\vec{m}\cdot\vec{P} + \frac{g}{2a}\frac{\partial\vec{m}\cdot\vec{P}}{\partial u^1} + \vec{r}_2^{\,*}\ \vec{P}, \qquad (3.2)$$

będziemy mogli równanie różniczkowe zawierające funkcję $T^2$ zapisać prościej jako

$$\frac{\partial T^2}{\partial u^2} + \phi(u^1,u^2) = 0.$$

Całkując to równanie względem zmiennej $u^2$ znajdziemy funkcję napięć $T^2$

$$T^2 = -\int_{u_0^2}^{u^2}(u^1,u^2)du^2 + C_1(u^1). \qquad (3.3)$$

Przechodząc do rozwiązania równania różniczkowego (2.4) w oparciu o wyznaczone poprzednio funkcje napięć S i $T^2$, zróżniczkujemy S względem $u^2$ i podstawimy wraz z $T^2$ do (2.4)

$$\frac{\partial T^1}{\partial u^1} + \frac{g}{2a}\frac{\partial\vec{m}\cdot\vec{P}}{\partial u^2} + u^1\int_{u_0^2}^{u^2}\phi(u^1,u^2)du^2 - u^1C_1(u^1) + X = 0,$$

a następnie składową X zastąpimy pierwszym wyrażeniem (2.8), wówczas:

$$\frac{\partial T^1}{\partial u^1} + \frac{g}{2a}\frac{\partial\vec{m}\cdot\vec{P}}{\partial u^2} + u^1\int_{u_0^2}^{u^2}\phi(u^1,u^2)du^2 - u^1C_1(u^1) + \sqrt{g}\,\vec{r}_1^{\,*}\ \vec{P} = 0.$$

Przyjmując drugą funkcję pomocniczą

$$\psi(u^1,u^2) = \frac{g}{2a}\frac{\partial\vec{m}\cdot\vec{P}}{\partial u^2} + u^1\int_{u_0^2}^{u^2}\phi(u^1,u^2)du^2 + \sqrt{g}\,\vec{r}_1^{\,*}\ \vec{P}, \qquad (3.4)$$

uzyskamy równanie różniczkowe prostsze w zapisie

$$\frac{\partial T^1}{\partial u^1} + \psi(u^1,u^2) - u^1 C_1(u^1) = 0,$$

które po scałkowaniu da nam funkcję napięć

$$T^1 = -\int_{u_0^1}^{u^1} \psi(u^1,u^2)du^1 + \int_{u_0^1}^{u^1} u^1 C_1(u^1)du^1 + C_2(u^2), \quad (3.5)$$

zależną od dwóch funkcji dowolnych $C_1(u^1)$, $C_2(u^2)$.

4. Rozwiązanie równań infinitezymalnych przemieszczeń

Stan przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki śrubowej jest opisany wektorem przemieszczenia $\vec{W}$, wyrażonym przez jednostkowe wektory bazy:

$$\vec{W} = W_1^* \vec{r}_1^* + W_2^* r_2^* + W_s^* \vec{m}^*, \quad (4.1)$$

albo przez kontrawariantne wektory bazy:

$$\vec{W} = W_1 \vec{r}_1 + W_2 \vec{r}_2 + W_3 \vec{m}, \quad (4.1')$$

gdzie:

$$W_1 = W_1^*, \quad W_2 = \sqrt{g}\, W_2^*, \quad W_3 = W_3^*.$$

Ogólne równania stanu przemieszczeń powierzchni środkowej powłoki wypiszemy w oparciu o pracę [2]:

$$\frac{\partial W_1}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^{\ 1} W_1 - \Gamma_{11}^{\ 2} W_2 - b_{11} W_3 = \gamma_{11}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial u^2} + \frac{\partial W_2}{\partial u^1}\right) - \Gamma_{12}^{\ 1} W_1 - \Gamma_{12}^{\ 2} W_2 - b_{12} W_3 = \gamma_{12},$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial u^2} - \Gamma_{22}^{\ 1} W_1 - \Gamma_{22}^{\ 2} W_2 - b_{22} W_3 = \gamma_{22}.$$

Z uogólnionego prawa Hooke'a otrzymamy związki wiążące odkształcenia i napięcia, izotropowych powłok sprężystych. Współrzędne tenzora odkształcenia $\gamma_{ij}$ wyrażają się tu przez tenzor napięcia $S_1$, $T^1$, $T^2$ w następujący sposób [2]:

$$\gamma_{11} = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left\{(g_{11})^2 T^1 + 2g_{11}g_{12}S + \left[(g_{12})^2 - vg\right]T^2\right\},$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left\{g_{11}g_{12}T^1 + \left[(1+v)g + 2(g_{12})^2\right]S + g_{12}g_{22}T^2\right\}; \qquad (4.3)$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left\{\left[(g_{12})^2 - vg\right]T^1 + 2g_{22}g_{12}S + (g_{22})^2 T^2\right\},$$

gdzie: E - moduł sprężystości, v - współczynnik Poissona, h - grubość powłoki.

Dla powierzchni środkowej powłoki śrubowej równania (4.2) i (4.3) po podstawieniu współczynników pierwszej i drugiej formy różniczkowej powierzchni śrubowej z wzorów (1.6) i (1.7) oraz symboli Christoffela z (1.8) znacznie się uproszczą i przyjmują postać:

$$\frac{\partial W_1}{\partial u^1} = \gamma_{11},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial u^2} + \frac{\partial W_2}{\partial u^1}\right) - \frac{u^1}{g} W_2 + \frac{a}{\sqrt{g}} W_3 = \gamma_{12}, \qquad (4.4)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial u^2} + u^1 W_1 = \gamma_{22},$$

$$\gamma_{11} = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left[T^1 - vgT^2\right],$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left[(1+v)g\ S\right], \tag{4.5}$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left[vgT^1 + g^2\ T^2\right].$$

Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem układu równań (4.4) o niewiadomych $W_1$, $W_2$, $W_3$.

Z pierwszego równania układu (4.4) wyznaczymy $W_1$, a mianowicie:

$$W_1 = \int_{u_0^1}^{u^1} \gamma_{11}\, du^1 + C_3(u^2), \tag{4.6}$$

gdzie: $C_3\ (u^2)$ jest dowolną funkcją zmiennej $u^2$.

Z trzeciego równania układu (4.4) po podstawieniu $W_1$ z (4.6) znajdziemy $W_2$.

Ponieważ

$$\frac{\partial W_2}{\partial u^2} = \gamma_{22} - u^1 W_1$$

to po scałkowaniu

$$W_2 = \int_{u_0^2}^{u^2} (\gamma_{22} - u^1 W_1)\, du^2 + C_4(u^1). \tag{4.7}$$

Wyrażenie na $W_2$ zawiera dowolną funkcję $C_4(u^1)$, zmiennej $u^1$. Różniczkując $W_1$ z (4.6) względem $u^2$, a $W_2$ z (4.7) względem $u^1$, i podstawiając te pochodne do drugiego układu (4.4) określimy trzecią składową przemieszczenia;

$$W_3 = \frac{\sqrt{g}}{a}\left[\gamma_{12} + \frac{u^1}{g} W_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial u^2} + \frac{\partial W_2}{\partial u^1}\right)\right]. \tag{4.8}$$

Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla powłoki śrubowej mogą być zadane w przemieszczeniach, albo w napięciach i przemieszczeniach.

Rozpatrzymy dwa rodzaje warunków brzegowych, przy założeniu częściowego utwierdzenia powłoki wzdłuż dowolnej prostej tworzącej i dowolnej linii śrubowej. Przyjmiemy utwierdzenie nieprzesuwne w kierunku wektorów $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ (wybrana prosta tworząca i wybrana linia śrubowa), a umożliwimy jedynie przemieszczenie w kierunku prostopadłym do powłoki tzn. w kierunku wektora $\vec{m}$.

Założone warunki utwierdzenia zezwolą nam wyznaczyć nieznane funkcje $C_1(u^1)$, $C_2(u^2)$, $C_3(u^2)$, $C_4(u^1)$, występujące w ogólnych wzorach na napięcia (3.3), (3.5) i przemieszczenia (4.6), (4.7)

5. Warunki brzegowe zadanie w przemieszczeniach

Utwierdzenie częściowe, nieprzesuwne wzdłuż prostej tworzącej określa:

$$W_1(u^1,u_o^2) = 0, \quad W_2(u^1,u_o^2) = 0, \tag{5.1}$$

gdzie: $u^1$ zmienia się w przedziale:

$$u_o^1 \leqslant u^1 \leqslant R.$$

Zmienna $u^1$ jest z jednej strony ograniczona stałą $u_o^1$, będącą promieniem walca wewnętrznego przecinającego helikoidę wzdłuż linii śrubowej, a z drugiej stałą R, która jest promieniem walca zewnętrznego ograniczającego rozpatrywaną powłokę. $W_2$ wyznaczymy z (4.7) uwzględniając (5.1).

$$W_2(u^1,u_o^2) = \left[ \int_{u_o^2}^{u^2} (\gamma_{22} - u^1 W_1) du^2 \right]_{u^2=u_o^2} + C_1(u^1) = 0,$$

skąd

$$C_4(u^1) = 0.$$

Drugi warunek (5.1) daje:

$$W_1(u^1,u_0^2) = \int_{u_0^1}^{u^1} \gamma_{11}(u^1,u_0^2)du^1 + C_3(u_0^2) = 0,$$

skąd po zróżniczkowaniu względem $u^1$:

$$\gamma_{11}(u^1,u_0^2) = 0.$$

Uwzględniając (4.5) napiszemy:

$$\gamma_{11}(u^1,u_0^2) = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left[T^1 - vgT^2\right],$$

lecz ponieważ $\gamma_{11}(u^1,u_0^2) = 0$, to;

$$T^1(u^1,u_0^2) = vg(u^1,u_0^2)T^2(u^1,u_0^2). \tag{5.2}$$

Równanie (3.3) dla $u^2 = u_0^2$ przyjmuje postać:

$$T^2(u^1,u_0^2) = C_1(u^1),$$

a równanie (3.5)

$$T^1(u^1,u_0^2) = -\int_{u_0^1}^{u^1} \psi(u^1,u_0^2)du^1 + \int_{u_0^1}^{u^1} u^1C_1(u^1)du^1 + C_2(u_0^2). \tag{5.3}$$

Podstawiając funkcję (5.3) w równości (5.2) dojdziemy do równania zawierającego jedynie niewiadomą funkcję $C_1(u^1)$:

$$vgC_1(u^1) = -\int_{u_0^1}^{u^1} \psi(u^1,u_0^2)du^1 + \int_{u_0^1}^{u^1} u^1 C_1(u^1)du^1 + C_2(u_0^2). \quad (5.4)$$

Po zróżniczkowaniu (5.4) względem parametru $u^1$ i uporządkowaniu, uzyskany równanie różniczkowe liniowe:

$$\frac{dC_1(u^1)}{du^1} + (2 - \frac{1}{v})\frac{u^1}{g} C_1(u^1) = -\frac{\psi(u^1,u_0^2)}{vg}.$$

Całka ogólna tego równania ma postać:

$$C_1(u^1) = e^{-\int_{u_0^1}^{u^1} F du^1}\left[\int_{u_0^1}^{u^1} -\frac{\psi(u^1,u_0^2)}{vg} e^{\int_{u_0^1}^{u^1} F du^1} du^1 + C\right]$$

gdzie:

$$\int_{u_0^1}^{u^1} F du^1 = (1 - \frac{1}{2v})\ln g_{(u^1)},$$

czyli

$$C_1(u^1) = g^{-(1-\frac{1}{2v})}\left[-\int_{u_0^1}^{u^1} \frac{g^{(1-\frac{1}{v})}}{vg}\psi(u^1,u_0^2)du^1 + C\right],$$

albo po dalszym przekształceniu:

$$C_1(u^1) = -\frac{g^{\frac{1}{2v}}}{vg}\int_{u_0^1}^{u^1} \frac{\psi(u^1,u_0^2)}{g^{\frac{1}{2v}}} du^1 + \frac{g^{\frac{1}{2v}}}{g} C. \quad (5.5)$$

Dla $u^1 = u_0^1$ będzie:

$$C_1(u_0^1) = \frac{g^{\frac{1}{2v}}_{(u_0^1)}}{g_{(u_0^1)}} C, \tag{5.5}$$

gdzie: C jest stałą całkowania.

Utwierdzenie częściowe, nieprzesuwne powłoki wzdłuż linii śrubowej umożliwia wyznaczenie pozostałych funkcji $C_2(u^2)$, $C^3(u^2)$, z warunków:

$$W_1(u_0^1,u^2) = 0, \quad W_2(u_0^1,u^2) = 0, \tag{5.6}$$

gdzie: zmienna $u^2$ zawarta jest w przedziale,

$$u_0^2 \leqslant u^2 \leqslant k\pi.$$

Przyjmując $u^1 = u_0^1$ obliczymy $W_1$ z wzoru (4.6):

$$W_1(u_0^1,u^2) = \left[ \int_{u_0^1}^{u^1} \gamma_{11} du^1 \right]_{u^1=u_0^1} + C_3(u^2) = 0,$$

skąd

$$C_3(u^2) = 0.$$

Podstawiając do (4.7) $C_4(u^1) = 0$ (obliczoną uprzednio) i uwzględniając drugi warunek (5.6) określimy $W_2$ na brzegu $u^1 = u_0^1$;

$$W_2(u_0^1,u^2) = \int_{u_0^2}^{u^2} (\gamma_{22} - u_0^1 W_1) du^2 = 0.$$

Różniczkując powyższe równanie względem $u^2$ dostajemy zależność:

$$\gamma_{22}(u_0^1,u^2) - u_0^1 W_1(u_0^1,u^2) = 0,$$

a ponieważ

$$W_1(u_0^1,u^2) = 0,$$

to

$$\gamma_{22}(u_0^1,u^2) = 0,$$

albo korzystając z (4.5)

$$\gamma_{22}(u_0^1,u^2) = \frac{1}{Eh\sqrt{g}}\left[-\nu g T^1 + g^2 T^2\right] = 0.$$

Równanie to będzie spełnione, jeśli

$$-\nu g T^1 + g^2 T^2 = 0,$$

skąd

$$T^1(u_0^1,u^1) = \frac{g}{\nu} T^2(u_0^1,u^2) \tag{5.7}$$

Równanie (3.5) dla $u^1 = u_0^1$ przyjmie postać:

$$T^1(u_0^1,u^2) = C_2(u^2),$$

a równanie (3.3)

$$T^2(u_0^1,u^2) = -\int_{u_0^2}^{u^2} \phi(u_0^1,u^2)du^2 + C_1(u_0^1). \tag{5.8}$$

Podstawiając (5.8) do (5.7) wyznaczymy $C_2(u^2)$:

$$C_2(u^2) = -\frac{g}{v}\int_{u_0^2}^{u^2} \phi(u_0^1,u^2)du^2 + \frac{g}{v}C_1(u_0^1). \tag{5.9}$$

Jeśli w równości (5.9) stałą $C_1(u_0^1)$ zastąpimy jej wartością obliczoną z wyrażenia (5.5'), to:

$$C_2(u^2) = -\frac{g}{v}\int_{u_0^2}^{u^2} \phi(u_0^1,u^2)du^2 + \frac{g^{\frac{1}{2v}}}{g}C. \tag{5.9'}$$

Dla uzyskania stałej całkowania C wykorzystamy równania: (5.4) i (5.9).
Gdy w (5.4) $C_1(u^1)$ zastąpimy funkcją (5.5) i przyjmiemy $u^1 = u_0^1$, to:

$$vgC_1(u_0^1) = C_2(u_0^2),$$

albo

$$C_2(u_0^2) = v\, g^{\frac{1}{2v}}\, C.$$

Natomiast $C_2(u_0^2)$ obliczone z (5.9') jest równe:

$$C_2(u_0^2) = \frac{1}{v}\, g^{\frac{1}{2v}}\, C.$$

Aby oba równania były spełnione musi być C = C.

Mając funkcje $C_1(u^1)$, $C_2(u^2)$, $C_3(u^2)$, $C_4(u^1)$ dla określonych warunków utwierdzenia, możemy zestawić wzory dla napięć

$$T^1 = -\left\{\int_{u_0^1}^{u^1}\psi(u^1,u^2)du^1 + \frac{1}{\nu}\int_{u_0^1}^{u^1}\frac{u^1 g^{\frac{1}{2\nu}}}{g}\left[\int_{u_0^1}^{u^1}\frac{\psi(u^1,u_0^2)}{g^{\frac{1}{2\nu}}}du^1\right]du^1 + \right.$$

$$\left. + \frac{g}{\nu}\int_{u_0^2}^{u^2}\phi(u_0^1,u^2)du^2\right\},$$

$$T^2 = -\left\{\int_{u_0^2}^{u^2}\phi(u^1,u^2)du^2 + \frac{g^{\frac{1}{2\nu}}}{\nu g}\int_{u_0^2}^{u^1}\frac{\psi(u^1,u_0^2)}{g^{\frac{1}{2\nu}}}du^1\right\}, \tag{5.10}$$

$$S = \frac{g}{2a}\vec{m}^*\vec{P},$$

i przemieszczeń

$$W_1 = \int_{u_0^1}^{u^1}\gamma_{11}du^1,$$

$$W_2 = \int_{u_0^2}^{u^2}(\gamma_{22}-u^1W_1)du^2, \tag{5.11}$$

$$W_3 = \frac{\sqrt{g}}{a}\left[\gamma_{12} + \frac{u^1}{g}W_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial u^2} + \frac{\partial W_2}{\partial u^1}\right)\right].$$

## 6. Warunki brzegowe zadane w napięciach i przemieszczeniach

Jeżeli powłoka nie jest podparta wzdłuż krawędzi określonych równaniami (1.1) dla $u^1 = u_1^1$ i $u^2 = u_1^2$, to wówczas znamy napięcia krawędziowe $T_1$ i $T_2$. W innym wypadku sposób podparcia może

narzucać wielkość i kierunek krawędziowych napięć. Ogólnie możemy powiedzieć, że znamy napięcia krawędziowe $T_1$ i $T_2$, czyli potrafimy zadać warunki brzegowe w napięciach.

Tak więc przyjmując:

$$T^1(u_1^1;u^2) = C,$$

$$T^2(u^1;u_1^2) = 0, \tag{6.1}$$

wyznaczymy z równań (3.3) i (3.5) funkcje $C_1(u_1)$ i $C_2(u_2)$. Wprowadzając w (3.5) $u^1 = u_1^1$ oraz dolną granicę całkowania $u_0^1 = u_1^1$ i uwzględniając pierwszy warunek (6.1) otrzymamy:

$$T^1(u_1^1;u^2) = C_2(u^2). \tag{6.2}$$

Przyjmując $u^2 = u_1^2$ i zmieniając dolną granicę całkowania na $u_1^2$ w równaniu (3.3) możemy napisać:

$$T^2(u^1;u_1^2) = C_1(u^1),$$

a na podstawie (6.1):

$$C_1(u^1) = 0. \tag{6.3}$$

Funkcje $C_3(u^2)$ i $C_4(u^1)$ znajdziemy przyjmując:

$$W_1(u_0^1;u^2) = 0,$$

$$W_2(u^1;u_0^2) = 0. \tag{6.4}$$

Warunki powyższe będą zrealizowane, jeśli powłoce odbierzemy możliwość przesuwu, ustalonej linii śrubowej $u^1 = u_0^1$ w kierunku $\vec{r}_1$ oraz wybranej prostej tworzącej helikoidy $u^2 = u_0^2$ w kierunku $\vec{r}_2$.
Uwzględniając warunki brzegowe (6.4) w równaniach (4.6) i (4.7) określimy:

$$C_3(u^2) = 0\,,$$
$$C_4(u^1) = 0\,. \tag{6.5}$$

Znając funkcje $C_1(u^1)$, $C_2(u^2)$, $C_3(u^2)$, $C_4(u^1)$ napiszemy wzory dla:
napięć

$$T^1 = -\int_{u_1^1}^{u^1} \varphi(u^1,u^2)du^1,$$
$$T^2 = -\int_{u_1^2}^{u^2} \Phi(u^1,u^2)du^2, \tag{6.6}$$
$$S = \frac{g}{2a}\,\vec{m}^*\,\vec{P},$$

i przemieszczeń

$$W_1 = \int_{u_0^1}^{u^1} \gamma_{11}dn^1,$$
$$W_2 = \int_{u_0^2}^{u^2} (\gamma_{22} - u^1 W_1)du^2, \tag{6.7}$$
$$W_3 = \frac{\sqrt{g}}{a}\left[\gamma_{12} + \frac{u^1}{g}W_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial u^2} + \frac{\partial W_2}{\partial u^1}\right)\right].$$

## 7. Wnioski

### 7.1. Warunki brzegowe zadane w przemieszczeniach

Utwierdzenie częściowe wzdłuż dowolnie wybranych prostej tworzącej i linii śrubowej przy spełnionych warunkach (5.1) i (5.6) prowadzi do wyrażeń (5.10), (5.11).

W ogólnym przypadku na brzegach podpartych w zrozumieniu teorii błonowej występują napięcia $T_1$, $T_2$, S oraz przemieszczenia $W_3$. Podstawiając w wyrażeniach (5.10) kolejno $u^1 = u_1^1$ i $u^2 = u_1^2$, otrzymamy na brzegach swobodnych napięcia różne od zera. Występującym napięciom na brzegach swobodnych towarzyszą określone przemieszczenia, dlatego zrealizowanie w praktyce takiego napięcia może być trudne. Pewne ułatwienie uzyskamy, jeśli obciążenie powierzchniowe będzie działało stycznie do powłoki, wówczas S=0. W tym przypadku na brzegach swobodnych wystąpią jedynie siły normalne. Kierunki działania sił pokrywają się z kierunkami przemieszczeń. Wyrażenia (5.11) określające przemieszczenia, zachowują znaki sił (5.10) i dlatego przejęcie napięć z brzegów swobodnych jest możliwe tylko za pomocą odpowiednio dobranych naciągów, których oddziaływania niezależne będą od przemieszczeń krawędzi.

### 7.2. Warunki brzegowe zadane w napięciach i przemieszczeniach

Warunki brzegowe mieszane (6.1), (6.4) dają nam wyrażenia (6.6) i (6.7) dla napięć i przemieszczeń.

Przy dowolnym obciążeniu powłoki, na brzegach swobodnych może wystąpić napięcie styczne S, jak to wynika z trzeciego wyrażenia (6.6). Ponieważ brzeg jest swobodny, musi być dla niego spełniony dodatkowy warunek S = 0. Warunek ten jest równoważny warunkowi takiego obciążenia powierzchniowego przy brzegu, dla którego składowa $P_3 = 0$. Rozpatrzymy trzy zasadnicze rodzaje obciążeń powierzchniowych dających stan błonowy.

A. Obciążenie działa stycznie do powłoki, wówczas S = 0 w każdym punkcie powłoki. Dla tego obciążenia na brzegach częściowo podpartych wystąpią tylko napięcia normalne, które przekazywane są na podpory.

B. Obciążenie działa prostopadle do powłoki, przy czym na brzegach swobodnych dąży do zera. W tym przypadku na brzegach częściowo podpartych oprócz napięć normalnych wystąpią też napięcia styczne. Sposób podparcia dla tego obciążenia wymaga założenia dodatkowych cięgien stycznych na kierunku $W_1$ (dla $u^2 = u_0^2$) o tak dobranych wymiarach, aby od przesunięć stycznych wystąpiły w nim siły odpowiadające siłom obliczonym oraz dodatkowych naciągów stycznych na kierunku $W_2$ (dla $u^1 = u_0^1$) analogicznych do podanych w punkcie (7.1).

C. Obciążenie działa prostopadle do powłoki, a na wszystkich brzegach zanika. Przypadek ten w odniesieniu do warunków brzegowych pokrywa się z przypadkiem A - czyli nie wymaga dodatkowego podparcia.

Wniosek ogólny-stan błonowy odpowiadający naturalnym warunkowm obciążenia i podparcia, możemy zrealizować tylko dla warunków brzegowych zadanych w napięciach i przemieszczeniach, przy obciążeniu podanym w A i C.

## LITERATURA

[1] Banach S.: Mechanika, Warszawa 1956.

[2] Boroch H.: Rozwiązanie niektórych zagadnień brzegowych równań bezmomentowej teorii prostokreślnych powłok sprężystych (praca doktorska), Uniwersytet Wrocławski 1962.

[3] Boroch H.: The momentless theory of one-sheet hyperboloidal shells, Zastosowania matematyki V, 1960.

[4] Goetz A.: Geometria różniczkowa, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1959.

[5] Goldenwejzer A.: Teoria uprugich tonkich obołoczek, Moskwa 1953.

[6] Lysik B.; Rozwiązanie zadania brzegowego w przemieszczeniach dla bezmomentowego stanu napięcia w powłoce konoidalnej II Sesja Naukowa Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej 10-15 września 1963.

[7] Cicala P.: Homogeneous stress states in helicoidal shells, J.appl.mech.vol. 29, No 3 1962.

[8] O'Mathuma D.P.: Rotationally symetric deformations in helicoidal shells, J.math. a.phys.vol. 42, No 2, 1963.

[9] Reissner E.: Small rotationally symmetric deformations of shallow helicoidal shells. J.appl.mech.vol. 22, vol, 1955.

[10] Michilin S.G.: Uprugije obołoczki, bliskije k płaskim plastinam.Sb., Waprosy procznosti łapasti wodianoj turbiny. Izd. ŁGU 1954.

[11] Timoszenko S., Goodier J.N.: Teoria sprężystości, Arkady, Warszawa 1962.

## О ВОЗМОЖНОСТИ РАБОТЫ СПИРАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК В БЕСМОМЕНТНОМ СОСТАЯНИИ НАПРЯЖЕНИЯ

**Резьме**

В работе приводится точное решение при помощи интегрирования уравлений равновесия спиральных оболочек находящихся в бесмоментном состоянии напряжения. Общие формулы определения напряжений были разработаны путем интегрирования уравнений равновесия и небольших переместности. В формулах учисливоаются четыре исканые функции зависящих от способа прикрепления оболочки. Эти функции были определены для условий работы края оболочки которые в случае спиральной оболочки возникают величины перемещений или перемещений и напряжений.

ON POSSIBILITY OF WORK OF A SPIRAL SHELL IN THE MOMENTLESS STATE OF TENSION

Summary

Precise solution of equilibrium equations of spiral shell by the method of quadratures, in the momentless state of tension, has been given in the paper.
General formules for tensions and displacements obtained from integration of equations of equilibrium and of small displacements involve, four unknown functions depending on the manner of fastening the shell.

The functions have been derived from the boundary conditions which can be given for the spiral shell by disolacements or, by tensions and displacements.