

ZDZISŁAW TROJAN

## RUCH CIĘGNA WYWOŁANY PRZEJEŹDZAJĄCĄ SIŁĄ SKUPIONĄ

Streszczenie. Przedstawiono przybliżony sposób obliczania wychyleń cięgna o masie równomiernie rozłożonej, małym zwisie i stałej sile naciągu, przy dowolnym sposobie przejazdu po nim siły skupionej, z pominięciem wpływu masy ciężaru skupionego i tłumienia wewnętrznego cięgna.

W zakres obliczeń dynamicznych lin nośnych, będących głównym elementem konstrukcyjnym kolejek linowych, wchodzi takie zagadnienia, jak wpływ przejazdu skupionego ciężaru po linie, nadwyżki dynamiczne wywołane gwałtownym wyładunkiem transportowego materiału, wzrost napięć dynamicznych w linach w zależności od ich sztywności oraz problemy tarcia wewnętrznego w linach występujące w czasie ruchów liny. Niektóre z tych zagadnień należy oddzielnie rozpatrywać dla trzech możliwych przypadków zamocowania liny nośnej, to jest dla liny obustronnie zakotwiczonej, napiętej przeciwwagą i napiętej podporą odkształcalną. Na ogół w rozwiązaniach tych, z uwagi na to, że liny są układami o nieskończenie wielu stopniach swobody, albo sprowadza się je do układów o jednym, względnie dwóch (liny napięte przeciwwagą) stopni swobody w przypadku dużych ciężarów skupionych, albo też przy stosunkowo małych ciężarach działających na linę, pomija się ich masę wobec równomiernie rozłożonej masy cięgna. Z prac w tym zakresie należy wymienić prace [1] ÷ [12].

Wyrazem znaczenia tych zagadnień jest powstanie przy Instytucie Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk Zespołu Ustrojów Ciężnowych kierowanych przez prof. dr Stefana Ziembę.

Niniejszy artykuł przedstawia przybliżony sposób obliczania pionowych przemieszczeń ważkiej liny obustronnie zakotwiczonej

o małym zwisie, pod wpływem siły bezmasowej przejeżdżającej po niej z dowolnie zmienną prędkością.

Próba rozwiązania tego zadania w sposób ścisły natrafia na trudności związane z koniecznością całkowania funkcji trygonometrycznych, których argumenty są nieliniową funkcją czasu, czego nie można wyznaczyć przez funkcje elementarne.

Trudności tych można uniknąć stosując schemat pomocniczy, zastępujący bezpośrednio działanie przejeżdżającej siły na linę, działaniem siły w kolejnych, równo oddalonych od siebie punktach, przez odpowiedni, krótki okres czasu. Obliczenie przeprowadzone według tego schematu pozwala na określenie kształtu liny przy dowolnym położeniu siły.

Przybliżenie przedstawionego rozwiązania wynika z zastosowania podanego schematu pomocniczego, nieuwzględnienia tłumienia i z przyjęcia ograniczonej liczby wyrazów rozwiązania przedstawionego w postaci szeregu. Należy tu jednak zaznaczyć, że stosowanie maszyn cyfrowych pozwoli łatwo zwiększyć dokładność rozwiązania przez przyjęcie dostatecznie dużej liczby punktów działania siły i wprowadzenie odpowiedniej liczby wyrazów.

W pierwszej części artykułu podano ścisłe rozwiązanie i przeprowadzono dyskusję dla przejazdu siły ze stałą prędkością. Rozwiązanie uzyskano w sposób podobny do tego, jaki stosuje się przy rozwiązywaniu wąskiej belki z przesuwającą się po niej ze stałą prędkością siłą bezmasową.

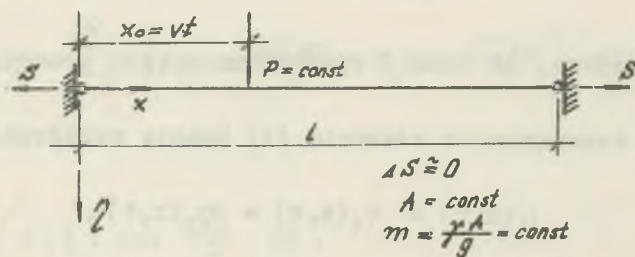
W drugiej części stosując schemat pomocniczy, uzyskano wzory umożliwiające obliczenie wychyleń wywołanych przejazdem siły bezmasowej ze zmienną prędkością poziomą.

W końcowej części artykułu podano przykłady, które przełiczono celem dokonania oceny dokładności proponowanego sposobu i określania wpływu prędkości przejazdu siły na wychylenie ciężna dla pewnego szczególnego przypadku ciężna.

### 1. Ciężno obciążone siłą $P$ przesuującą się ze stałą prędkością poziomą

Przypadek drgań ciężna wężkiego, pod wpływem poruszającej się siły  $P$  ze stałą prędkością poziomą  $v$ , rozwiązano poniżej przy następujących założeniach:

- jednorodne ciężno sprężyste o stałym przekroju poprzecznym  $A$ , rozpięte jest między dwoma nieruchomymi punktami siłą  $S$ ;
- zwis ciężna jest bardzo mały w stosunku do rozpiętości, w związku z czym, można przyjąć, że  $S = \text{const}$ , zaś  $\Delta S = 0$ ;
- masa jednostkowa ciężna  $m = \frac{\gamma A}{g}$  jest rozłożona równomiernie po ciężwie (rys. 1);
- tłumienie nie występuje.



Rys. 1. Schemat ciężna

Równanie różniczkowo tak sformułowanego zagadnienia przedstawic można w postaci:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - p^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{p^2}{S} \cdot P \cdot \delta(x - x_0), \quad (1)$$

gdzie:

$\eta(x, t)$  przedstawia poszukiwane wychylenie przekroju ciężna, dla punktu o odeciętej  $x$ , w dowolnej chwili czasu  $t$ ,  
 $S$  - jest siłą naciągu,

$$p^2 = \frac{S \cdot g}{\gamma A} = \frac{S}{m}, \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{sek}^2} \right]$$

zaś  $\delta(x - x_0)$  jest funkcją Diraca [14].

Funkcja  $\eta$  spełniać musi następujące warunki [13]:

$$\text{a) brzegowe: } \eta(0,t) = \eta(1,t) = 0, \quad (2)$$

$$\text{b) początkowe (ogólne): } \eta(x,0) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial \eta(x,0)}{\partial t} = \Psi(x) \quad (3)$$

zaś w tym konkretnym przypadku:

$$\eta(x,0) = \varphi(x) = 0$$

1

$$\frac{\partial \eta(x,0)}{\partial t} = \Psi(x) = 0, \quad (3a)$$

gdyż przyjmujemy, że siła  $P$  wjeżdża na cięgną pozostającą w spoczynku.

Ogólnym rozwiązaniem równania (1) będzie wyrażenie

$$\eta(x,t) = \eta_1(x,t) + \eta_2(x,t),$$

gdzie:  $\eta_1(x,t)$  jest całką szczególną równania jednorodnego równania (1) i przedstawia drgania własne struny, a  $\eta_2(x,t)$  jest całką szczególną równania (1) i przedstawia drgania wymuszone. Funkcja  $\eta_1$  powinna spełniać:

$$\text{jednorodne równania różniczkowe } \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} - p^2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0, \quad (4)$$

$$\text{warunki brzegowe } \eta_1(0,t) = \eta_1(1,t) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{warunki początkowe (ogólne): } \eta_1(x,0) &= \varphi(x), & \frac{\partial \eta_1}{\partial t} &= \\ &= \Psi(x). & & \end{aligned} \quad (6)$$

Funkcje  $\eta_2$  powinna spełniać:

równanie różniczkowe (1),

$$\text{warunki brzegowe } \eta_2(0,t) = \eta_2(1,t) = 0, \quad (7)$$

$$\text{warunki początkowe } \eta_2(x,0) = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Funkcje  $\eta_1$  i  $\eta_2$  można określić metodą rozdzielania zmiennych. Przyjmując:

$$\eta_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (9)$$

otrzymamy

$$\eta_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{n\pi pt}{1} + B_n \sin \frac{n\pi pt}{1} \right\} \sin \frac{n\pi x}{1}, \quad (10)$$

gdzie:

$$A_n = \frac{2}{1} \int_0^1 \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{1} d\xi, \quad (11)$$

$$B_n = \frac{2}{p\pi} \int_0^1 \psi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{1} d\xi.$$

Rozwiązanie szczególne  $\eta_2$  równania (1), poszukujemy w analobicznej postaci

$$\eta_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot S_n(t). \quad (12)$$

Przedstawiając prawą stronę równania (1) w postaci szeregu

$$\frac{p^2}{s} F \cdot \delta(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot H_n(t), \quad (13)$$

gdzie:  $X_n(x)$  określone obecnie przez (9) i (10) funkcje kształtu, a  $H_n(t)$  nieznanne funkcje czasu, otrzymamy

$$H_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{p^2}{S} P \cdot \delta(\xi - x_0) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi = \frac{2p^2 P}{S \cdot l} \sin \frac{n\pi v t}{l}, \quad (14)$$

gdź  $x_0 = v \cdot t$ .

Uwzględniając dalej, że funkcje  $X_n$  spełniać muszą równanie (4) oraz podstawiając (12) i (14) do (1), możemy wyznaczyć funkcję  $S_n(t)$  dla warunków początkowych  $S_n(0) = 0$  i  $\dot{S}_n(0) = 0$ , wynikających z warunków (8), jako całkę szczególną równania

$$\dot{S}_n(t) + \frac{n^2 \pi^2 p^2}{l^2} \cdot S_n(t) = H_n(t) \quad (15)$$

w postaci

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{n \pi p} \int_0^t H_n(\tau) \sin \frac{n \pi p}{l} (t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{2p \cdot P}{n \pi S} \int_0^t \sin \frac{n \pi v \tau}{l} (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Ponieważ  $v = \text{const}$ , to stosując dla wyrażenia podcałkowego wzory na cosinus sumy i różnicy kątów a następnie całkując, otrzymamy

$$S_n(t) = \frac{2Pl}{S \pi^2} \frac{1}{1 - (\frac{v}{p})^2} \frac{1}{n^2} \left\{ \sin \frac{n \pi v t}{l} - \frac{v}{p} \sin \frac{n \pi p t}{l} \right\}. \quad (17)$$

Ostatecznie, mając na uwadze warunki początkowe (3a), wychylenie ciężna w stosunku do położenia równowagi wywołane prze-

jazdem bezmasowej siły  $P$  ze stałą prędkością poziomą, określi dla dowolnej odciętej  $x$ , w dowolnej chwili czasu  $t$ , wzór

$$\eta_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_1}{S\pi^2} \frac{1}{1-(\frac{v}{p})^2} \frac{1}{n^2} \left\{ \sin \frac{n\pi vt}{1} - \frac{v}{p} \sin \frac{n\pi pt}{1} \right\} \sin \frac{n\pi x}{1} \quad (18)$$

Pierwszy składnik w nawiasie określa odciętą położenia siły, drugi, drgania o częstościach odpowiadających częstościom drgań swobodnych cięgna, wywołane przesuwaniem się siły  $P$ .

Dyskusja wychylenia, w zależności od parametrów występujących we wzorze (18), obejmuje następujące przypadki:

1.1.  $v \rightarrow 0$

Przyjęcie  $v \rightarrow 0$ , wymaga równoczesnego przyjęcia, że odcięta położenia siły  $x_0 = v \cdot t = x_0$  ma stałą wartość. Podstawienie  $v \rightarrow 0$  i  $x_0 = vt$  do wzoru (18) nadaje mu postać

$$\eta(x, x_0) = \frac{2P_1}{S\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{1} \sin \frac{n\pi x}{1} \quad (19)$$

1 przedstawia wychylenie cięgna w wyniku statycznego działania przyłożonej do niego siły  $P$  w punkcie o odciętej  $x_0$  i napiętego siłą  $S$ . Jak wiadomo, wychylenie to, zmienia się wg trójkąta.

1.2.  $v \rightarrow \infty$

Przejazd siły  $P$  przez cięgno z bardzo dużą prędkością nie powoduje wychylenia cięgna, gdyż z (18) otrzymuje się

$$\eta(x, t) = \frac{2P_1 p^2}{S\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{\sin \frac{n\pi vt}{1}}{p^2 - v^2} - \frac{v}{p^2 - v^2} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi pt}{1}}{p} \right\},$$

z czego wynika, że dla  $v \rightarrow \infty$   $\eta \rightarrow 0$ .

$$1.3. \quad p^2 = \frac{S}{m} \rightarrow \infty$$

1.3.1. Jeśli  $p \rightarrow \infty$ , gdyż  $S \rightarrow \infty$ , a równocześnie masa jednostkowa  $m = m_0$ , to z (18) bezpośrednio wynika, że wychylenia cięga  $\eta(x, t) \rightarrow 0$ .

1.3.2. Jeśli  $p \rightarrow \infty$ , bo  $m \rightarrow 0$ , a  $S = S_0$ , to z (18) otrzymujemy, że

$$\eta(x, t) = \frac{2Pl}{Sx^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (21)$$

jest identyczne z wzorem (19) i określa statyczne wychylenie cięga wywołane siłą P.

Wyniki uzyskane w punktach 1.1 - 1.3.2 potwierdzają łatwe do przewidzenia, w powyższych warunkach, wychylenia cięga.

$$1.4. \quad p^2 = \frac{S}{m} \rightarrow 0.$$

Dyskusja tego przypadku nie ma uzasadnienia, gdyż zakładając małe wychylenie struny w stosunku do jej rozpiętości, przyjmujemy, równocześnie pewien najmniejszy, możliwy przy danej rozpiętości l, masie jednostkowej cięga m i sile naciągu S, stosunek  $\frac{S}{m} \neq 0$ .

Przyjęcie  $p = 0$  jest niemożliwe także z formalnego punktu widzenia, gdyż zmienia postać równania różniczkowego (1).

$$1.5. \quad v = v_{kr}$$

Bezpośrednie wyznaczenie prędkości przejazdu siły P i jej położenie, zależnego także od czasu t, przy których punkty cięga osiągnęłyby największe wychylenie w dowolnie obranym przekroju, jakkolwiek bardzo interesujące, nastęrcza znaczne trudności.



Warunki konieczne ekstremum funkcji  $\eta(x, t)$  przy  $x = x_0$  i  $p = p_0$  mają postać

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{2F_1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{n^2} \left\{ \frac{\frac{n\pi}{1} \cos \frac{n\pi v t}{1} (p^2 - v^2) p - 2pv \sin \frac{n\pi v t}{1} - (p^2 - v^2) \sin \frac{n\pi p t}{1}}{p^2 - v^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{1} = 0, \quad (24a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{2F_1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{n^2} \frac{n\pi v}{1} \left\{ \frac{\cos \frac{n\pi v t}{1} - \cos \frac{n\pi p t}{1}}{p^2 - v^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{1} = 0. \quad (24b)$$

Wyznaczenie pierwiastków powyższych równań drogą rozwiązania tego układu, których lewe strony przedstawiają szeregi nieskończone, jest niemożliwe.

Podstawienie do (18)  $v = p$  wymaga zastosowania reguły de l'Hospitala i prowadzi do postaci

$$\eta_{v=p} = \frac{F_1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sin \frac{n\pi p t}{1} - \frac{n\pi p t}{1} \cos \frac{n\pi p t}{1} \right\} \sin \frac{n\pi x}{1}, \quad (25)$$

która nie może określać największego wychylenia, gdyż  $v = p$  nie jest pierwiastkiem równania (24a) i pozwala tylko znaleźć z (24b) tę chwilę  $t_{\max} = \frac{1}{p}$ , w której, w tym przypadku, punkty ciężna osiągną największe wychylenia.

Równania (24) umożliwiają więc wyznaczenie  $t_{\max}$  dla dowolnie obranych  $v$ , lub  $v_{\max}$  dla dowolnie obranego  $t$ , uniemożliwiają jednak bezpośrednio wyznaczenie  $v$  i  $t$ , którym odpowiada największe wychylenie.

Wyznaczenie pierwiastków układów równań (23) jest jednak możliwe drogą prób.

Powyższe rozważania przeprowadzono przy założeniu, że siła  $P$  przejeżdża ciężno ze stałą prędkością  $v$ . Przyjęcie zmiennej prędkości  $v=v(t)$ , także istotne dla praktyki, nie może być uzyskane równie prosto, drogą całkowania równania (16) i wymaga innego postępowania.

W dalszym ciągu przedstawiony zostanie jeden z możliwych, przybliżonych sposobów rozwiązania tego zadania.

## 2. Ciężno obciążone siłą $P$ poruszającą się z dowolnie zmienną prędkością poziomą

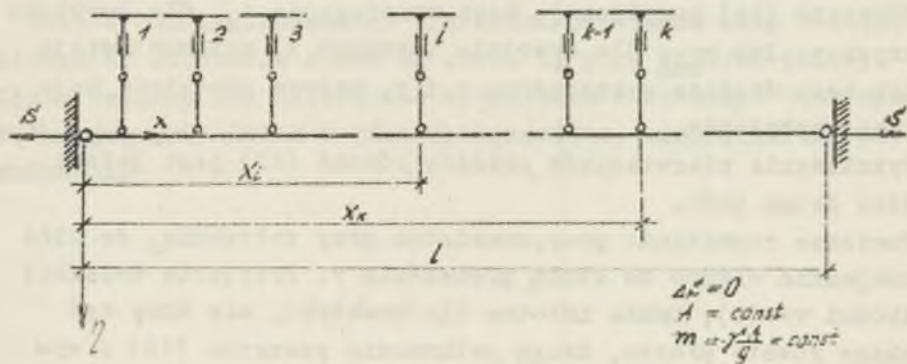
Podany w poprzedniej części wzór (16), który po scałkowaniu przedstawia  $n$ -ty składnik wymuszonego (po uwzględnieniu (12)), wychylenia ciężna w stosunku do położenia równowagi wywołanego przejazdem siły  $P$  w czasie  $t$ , wskazuje, że wychylenie  $\eta(x, t)$  można uzyskać jako sumę elementarnych wychyleń

$$\frac{2Pp}{n\pi g} \sin \frac{n\pi v\tau}{l} \sin \frac{n\pi P}{l} (t-\tau) dx$$

wywołanych w chwili  $\tau < t$  siłą  $P$  znajdującą się w punkcie o odciętej  $v\tau$  przez okres czasu  $d\tau$ .

Takie postępowanie możliwe jest dlatego, że zmiana położenia bezmasowej siły  $P$  nie zmienia rozkładu mas układu i w związku z tym, drgania ciężna będą zawsze opisane przez częstotliwości drgań własnych.

Mają to na uwadze, celem określenia wpływu przejazdu siły ze zmienną prędkością przez ciężno na jego wychylenie, przyjęto schemat zastępczy przedstawiony na rys. 2 umożliwiający zastosowanie superpozycji wpływów działania siły  $P$ .



Rys. 2. Pomocniczy schemat ciężna

Zachowując założenia z poprzedniego ustępu przyjęto, że siła nie przejeżdża bezpośrednio po ciężnie, ale po sztywnych, nieważkich elementach w kształcie litery T, zwanych dalej talerzykami, przenoszących obciążenie na ciężno za pośrednictwem wahaczy, przy czym słupki talerzyków mogą bez tarcia przesuwają się pionowo w tulejach. Dzięki temu, siła P przejeżdżająca po talerzyku "i" z dowolną prędkością  $v_1 = v_1(t)$ , przenosi się na ciężno stałą wartością poprzez wahacz, niezależnie od położenia siły P na talerzyku. Jeśli przyjmiemy ponadto, że liczba talerzyków k jest dostatecznie duża, to możemy uważać, że siła przebywa drogą na talerzyku "i" ze średnią prędkością  $v_1 = v_{1s} = \text{const}$ , równą rzeczywistej prędkości poziomej siły w chwili przejazdu nad słupkiem talerzyka. Czas przejazdu siły przez poszczególne talerzyki równy jest więc

$$\Delta t_1 = \frac{1}{k \cdot v_{1s}} = \frac{\Delta l}{v_{1s}}, \quad (28)$$

gdzie: k oznacza liczbę talerzyków.

W tej sytuacji, w czasie  $\Delta t_1$ , siła P przyłożona jest do ciężna w punkcie  $x_1 = \text{const}$  i dla wyznaczenia jej wpływu na wychylenie  $\eta$  można zastosować rozwiązanie równania różniczkowego ruchu (1).

Założmy na razie, że siła P wjechała na talerzyk "i" w chwili, gdy ciężno znajdowało się w spoczynku tzn., gdy (3a)

$$\eta(x, 0) = \psi(x) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \eta(x, 0)}{\partial t} = \psi'(x) = 0.$$

Rozwiązanie równania (1) przedstawia wówczas całkę szczególną  $\eta_{12}$ , którą łatwo możemy wyznaczyć, mając na uwadze, że odcięta przyłożenia siły P,  $x_1 = \text{const}$ . Wtedy wg (16)

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{2Pp}{n\pi S} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \int_0^t \sin \frac{n\pi p}{l} (t_1 - \tau) d\tau = \\ &= \frac{2Pp}{n^2 \pi^2 S} \cdot \sin \frac{n\pi x_1}{l} \left( 1 - \cos \frac{n\pi p}{l} \cdot \Delta t_1 \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Rozwiązanie szczególne równania (1), przy powyższych założeniach, ma więc postać

$$\eta_{12}(x, t_1) = \frac{2Pl}{Sx^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_1}{l} (1 - \cos \frac{n\pi p}{l} \cdot \Delta t_1) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (30)$$

i przedstawia wychylenie cięgna po osi  $\Delta t_1$ . Prędkość poszczególnych punktów cięgna po osi  $\Delta t_1$  określa wzór:

$$\dot{\eta}_{12}(x, t) = \frac{2Pl}{Sx^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n\pi p}{l} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi p \cdot \Delta t_1}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (31)$$

Wychylenia końcowe (30) i końcowe prędkości (31) traktowane być muszą jako warunki początkowe drgań swobodnych cięgna przy przejściu siły na talerzyk następny "i + 1" tzn.

$$\eta_{12}(x, \Delta t_1) = \eta_{i+1,1}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{i+1,n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (32)$$

i

$$\dot{\eta}_{12}(x, \Delta t_1) = \dot{\eta}_{i+1,1}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi p}{l} B_{i+1,n} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Podstawiając wyrażenia (30) i (31) do (32) otrzymujemy bezpośrednio stałe w równaniu drgań swobodnych

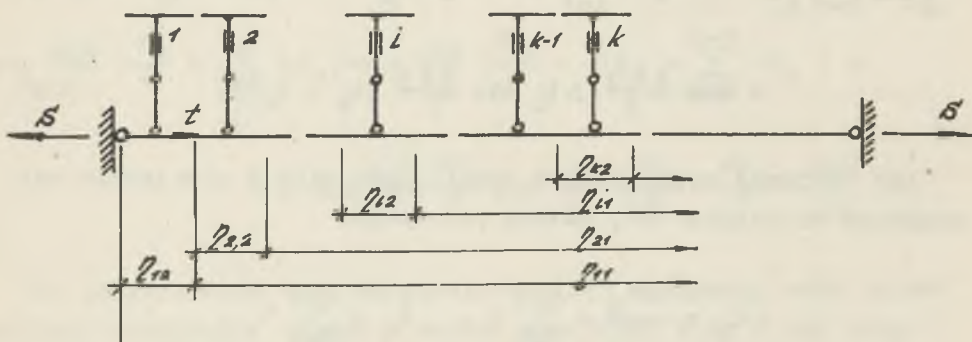
$$A_{i+1,n} = \frac{2Pl}{Sx^2} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_1}{l} (1 - \cos \frac{n\pi p}{l} \cdot \Delta t_1), \quad (33)$$

$$B_{i+1,n} = \frac{2Pl}{Sx^2} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi p}{l} \cdot \Delta t_1,$$

zaś wychylenia w chwili  $t_k$ , wywołane impulsem zakończonym w czasie  $t_1$ , obliczymy wg (10)

$$\eta_{k,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos \frac{n\pi p}{l} (t_k - t_1) + B_n \sin \frac{n\pi p}{l} (t_k - t_1) \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (34)$$

Otrzymane powyżej wzory (30) i (34) pozwolą nam obecnie uzyskać przybliżone rozwiązanie zagadnienia. Zgodnie z rys. 3 wychylenie cięgna w czasie, gdy siła przejeżdża talerzyk "k",



Rys. 3. Superpozycja wpływów obciążenia cięgna siłą P działającą w punktach 1+k

z uwzględnieniem wpływu przejazdu siły przez poprzednie talerzyki, będzie równe:

$$\eta_k = \eta_{k,2} + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_{i,1} \quad (35)$$

dla

$$\sum_{r=1}^{k-1} \Delta t_r \leq t_k \leq \sum_{r=1}^k \Delta t_r .$$

Odłożenie poziomo odcinka np.  $\eta_{12}$  (rys. 3) oznacza, że dla czasu odpowiadającego pobytowi siły  $P$  na tym talerzyku, ważne jest rozwiązanie  $\eta_{12}^*$ .

Rozpisując wyrażenia (35) z uwzględnieniem (30), (33) i (34) otrzymamy

$$\begin{aligned} \eta_k(x, t_k) = & \frac{2P_1}{S \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n \pi x_k}{l} \left[ 1 - \cos \frac{n \pi p}{l} \left( t_k - \sum_{r=1}^{k-1} \Delta t_r \right) \right] \sin \frac{n \pi x}{l} + \\ & + \frac{2P_1}{S \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n \pi x}{l} \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{n \pi x_i}{l} \left\{ \left[ 1 - \cos \frac{n \pi p}{l} \Delta t_1 \right] \cos \frac{n \pi p}{l} (t_k - t_1) + \right. \\ & \left. + \sin \frac{n \pi p}{l} \Delta t_1 \sin \frac{n \pi p}{l} (t_k - t_1) \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Aby obliczyć wychylenie w chwili, gdy siła  $P$  przejeżdża nad słupkiem talerzyka "k", należy podstawić:

$$\bar{t}_k = \frac{\Delta t_k}{2} + \sum_{r=1}^{k-1} t_r, \quad \bar{t}_1 = \sum_{r=1}^{k-1} t_r.$$

Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} \eta_k(x, \bar{t}_x) = & \frac{2P_1}{S \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n \pi x}{l} \left\{ \sin \frac{n \pi x_k}{l} \left[ 1 - \cos \frac{n \pi p}{l} \cdot \frac{\Delta t_k}{2} \right] + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{n \pi x_i}{l} \left[ \left( 1 - \cos \frac{n \pi p}{l} \Delta t_1 \right) \cos \frac{n \pi p}{l} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_r \right) + \right. \\ & \left. \left. + \sin \frac{n \pi p}{l} \Delta t_1 \sin \frac{n \pi p}{l} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_r \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Ale:

$$\begin{aligned} & \cos \frac{n\bar{x}_p}{1} \Delta t_1 \cos \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right) - \sin \frac{n\bar{x}_p}{1} \Delta t_1 \sin \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right) = \cos \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \Delta t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right), \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} & \cos \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right) - \cos \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \Delta t_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right) = \\ & = 2 \sin \frac{n\bar{x}_p}{1} \frac{\Delta t_1}{2} \sin \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \frac{\Delta t_1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right). \end{aligned}$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do (37) otrzymamy wzór określający wychylenie ciężna w chwili przejazdu siły  $P$  nad słupkiem talerzyka "k", wywołane przejazdem siły przez wszystkie poprzednie talerzyki z dowolną prędkością poziomą:

$$\begin{aligned} \eta(x, \bar{t}_k) = & \frac{2Pl}{S\bar{x}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\bar{x}_x}{1} \left\{ \sin \frac{n\bar{x}_x}{1} \left( 1 - \cos \frac{n\bar{x}_p}{1} \frac{\Delta t_k}{2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sin \frac{n\bar{x}_x}{1} \sin \frac{n\bar{x}_p}{1} \frac{\Delta t_1}{2} \sin \frac{n\bar{x}_p}{1} \left( \frac{\Delta t_k}{2} + \frac{\Delta t_1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x \right) \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Poprawność tego wzoru łatwo sprawdzić zakładając, że liczba talerzyków dąży do nieskończoności, a tym samym, czas przejazdu siły przez talerzyk "i", dąży do zera. Rozwiązanie (38) powinno w granicy być identyczne z rozwiązaniem ścisłym (18).

Zauważmy przede wszystkim, że (rys. 3)

$$\frac{\Delta t_k}{2} + \frac{\Delta t_1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta t_x = \frac{\Delta t_k}{2} + \sum_{x=1}^{k-1} \Delta t_x - \left( \frac{\Delta t_1}{2} + \sum_{x=1}^{k-1} \Delta t_x \right) = \bar{t}_k - \bar{t}_1,$$

gdzie  $\bar{t}_1$  jest zmienną, a  $\bar{t}_k$  pewnym stałym parametrem i że przy bardzo małym  $\Delta t_1$   $\sin \frac{n\bar{x}_1}{1} \cdot \frac{\Delta t_1}{2} = \frac{n\bar{x}_1}{1} \cdot \frac{\Delta t_1}{2}$ , a  $\cos \frac{n\bar{x}_1}{2} \cdot \frac{\Delta t_1}{2} = 1$ .

Kładąc ponadto

$$x_1 = \sum_{r=1}^{i-1} v_{rs} \cdot \Delta t_r + v_{is} \frac{\Delta t_i}{2} = v \left( \sum_{r=1}^{i-1} \Delta t_r + \frac{\Delta t_i}{2} \right) = v \bar{t}_1,$$

otrzymamy z (38)

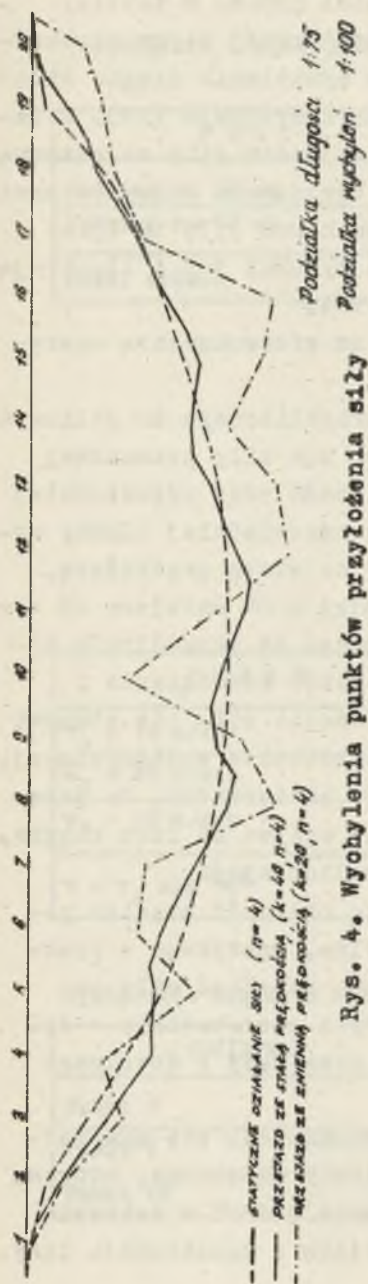
$$\eta(x, t_k) = \frac{2PL}{SA^2} \sum_n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cdot 2 \cdot \frac{1}{n^2} \frac{n\bar{x}_1}{1} \sin \frac{n\bar{x}_1}{1} \sin \frac{n\bar{x}_1}{1} (t_k - t_1) \cdot \frac{\Delta t_1}{2} \sin \frac{n\bar{x}_1}{1}.$$

Przy przejściu do granicy ( $\Delta t_1 \rightarrow 0$ ) czynnik zależny od czasu jest identyczny z wzorem (16), co w konsekwencji prowadzi do postaci (18).

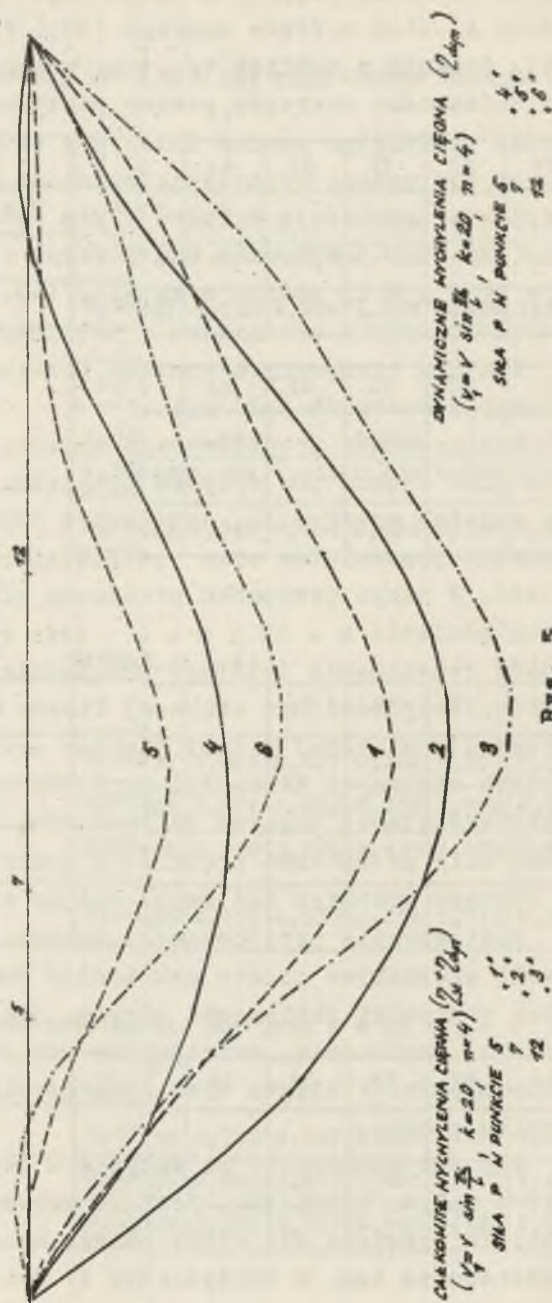
Aby ocenić praktyczną przydatność proponowanego sposobu, przeprowadzono obliczenia dla cięgna o rozpiętości 360 m, napiętego siłą  $S = 10 \text{ T}$  (98,07 kN), obciążonego siłą 0,5 T (4,90 kN) poruszającą się ze stałą prędkością poziomą 20 m/sek, przy ciężarze własnym cięgna około 0,024 T/m (24 N/m). Przyjęcie stosunkowo dużej prędkości przejazdu siły odpowiada zwiększeniu liczby talerzyków i tym samym ułatwiło rachunek konieczny do oceny dokładności poprawnego sposobu określenia ruchu cięgna.

Dla powyższego ustroju zbadana została przede wszystkim zależność dokładności wyników od przyjętej liczby przedziałów ( $k$ ) i liczby uwzględnionych wyrazów ( $n$ ). W tym celu dla stałej prędkości przejazdu obliczono wychylenia cięgna w punktach przyłożenia siły sposobem proponowanym w niniejszym artykule, przy podziale cięgna na dwadzieścia i czterdzieści części i sposobem ścisłym, uwzględniając tę samą liczbę wyrazów szeregu (tabl. 1), następnie obliczono wychylenie cięgna przy podziale





Rys. 4. Wychylenia punktów przyłożenia siły



Rys. 5

na dwadzieścia części, uwzględniając kolejno jeden, cztery, sześć i osiem wyrazów szeregu (38). Wyniki podano w tablicy (2). Ponadto w tablicy tej, dla uzyskania pewnej oceny szybkości zbieżności szeregów, podano statyczne wychylenia cięgna obliczone zamkniętym wzorem ścisłym i wzorem szeregowym (19). W tablicy (3) podano wychylenia wywołane przejazdem siły ze zmienną w czasie prędkością  $v_1(t) = v_1 \sin \frac{\pi x}{l}$ . Wychylenie cięgna w chwili, gdy siła znajdowała się kolejno w punktach 5, 7, 12 (przy  $k = 20$  i  $n = 4$ ) podano w tablicy (4), a rysunki 3 i 4 ilustrują niektóre wyniki zestawione w tablicach 1-4.

Analiza otrzymanych wyników pozwala na sformułowanie następujących wniosków ogólnych.

Zastosowanie proponowanego sposobu przybliżonego do obliczeń wychyleń cięgna pod wpływem przejazdu po nim siły bezmasowej ze zmienną prędkością, daje dobrą dokładność przy odpowiedniej liczbie przedziałów oraz uwzględnieniu odpowiedniej liczby wyrazów. W danym przypadku przejazdu siły ze stałą prędkością, uwzględnienie  $k = 40$  i  $n = 4$  dało wyniki o 2% mniejsze od wyników rozwiązania ścisłego uwzględniającego tę samą liczbę wyrazów. Uwzględnienie większej liczby wyrazów rozwiązania i przyjęcia większej liczby punktów przyłożenia siły nie stanowi jednak większych trudności przy obecnej technice obliczeniowej, wykorzystującej maszyny cyfrowe. Ponadto stwierdzono, że przejazd siły ze zmienną prędkością znacznie wpływa na ruch cięgna, i dlatego powinien być uwzględniony w obliczeniach.

Zastosowanie proponowanego sposobu do obliczeń cięgien pozwoli stosunkowo prosto uwzględnić dowolne, spotykane w praktyce przypadki obciążenia cięgna, jak np. przejazd siły ze zmienną prędkością, zatrzymanie się siły i pozostawanie w dowolnym punkcie cięgna oraz rozpoczęcie przejazdu z dowolnego punktu cięgna.

Jak już zaznaczono we wstępie w rozwiązaniach nie uwzględniono wpływu tłumienia. Jest to zagadnienie oddzielne, któremu obecnie poświęca się wiele uwagi, na razie jednak w zakresie podstawowym tzn. w odniesieniu do materiału i konstrukcji liny.

Tablica 1

Wychylenia oięgna (w metrach) pod siłą przejeżdżającą, obliczone wzorem przybliżonym dla  $v = 20$  m/sek ( $k = 20$  i  $k = 40$ ) oraz wzorem ścisłym (18) przy uwzględnieniu osterech pierwszych wyrazów

PUNKT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Podział na 20 os.	0,110		0,836		1,776		2,428		2,682		3,048		3,864		4,330		3,924		3,793	
Podział na 40 os.	0,044	0,303	0,696	1,189	1,657	2,106	2,583	2,582	2,489	2,761	3,070	3,393	3,737	4,130	4,190	4,039	3,812	3,653	3,913	4,130
Rozw. ścisłe	0,048	0,300	0,676	1,146	1,641	2,097	2,542	2,548	2,483	2,736	3,040	3,363	3,705	4,081	4,190	4,001	3,795	3,686	3,876	4,094

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
4,350		4,441		3,889		3,326		3,271		2,823		2,359		1,756		0,836		0,143	0,0
4,380	4,552	4,261	3,978	3,740	3,390	3,280	3,356	3,523	3,229	2,883	2,577	2,240	1,848	1,384	1,148	0,854	0,380	0,102	0,0
4,329	4,487	4,251	3,961	3,731	3,374	3,279	3,329	3,467	3,191	2,870	2,556	2,217	1,843	1,388	1,146	0,831	0,381	0,102	0,0

Tablica 3

Wychylenia oięgna w metrach pod siłą przejeżdżającą z różnymi prędkościami ( $k = 20$ ,  $n = 4$ )

PUNKT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$v_1 = 14$ m/sek	0,069	0,712	1,545	2,171	2,807	3,263	3,381	4,037	4,034	3,898	4,354	3,968	3,747	3,734	3,076	2,637	2,362	1,507	0,786	0,095
$v_2 = 20$ m/sek	0,110	0,836	1,776	2,427	2,682	3,048	3,868	4,330	3,924	3,793	4,350	4,441	3,889	3,526	3,271	2,823	2,359	1,756	0,836	0,143
$v_3 = 28$ m/sek	0,028	0,636	1,568	2,369	3,152	3,403	3,115	4,296	4,108	4,600	4,497	4,026	3,535	3,202	3,396	3,200	2,139	1,494	0,633	0,041
$v = v_2 \sin \frac{\pi x}{l}$	0,110	0,750	1,905	1,666	3,314	2,344	2,420	5,073	4,399	2,034	3,764	5,238	5,071	4,109	4,662	4,939	2,294	1,719	1,493	1,113

Tablica 4

Wychylenia oięgna w metrach przy położeniu siły w punktach 5, 7, 12 przejeżdżającą ze zmienną prędkością  $v_1 = v \sin \frac{\pi x}{l}$  przy  $k = 20$  i  $n = 4$

ODCIĘŻE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Punkt 5	0,914	2,638	4,172	5,437	6,452	7,257	7,904	8,266	8,406	8,324	8,009	7,540	6,669	5,715	4,740	3,847	2,964	1,813	1,032	0,349
Punkt 7	0,437	1,302	2,237	3,278	4,390	5,465	6,350	6,974	7,210	7,075	6,640	6,018	5,328	4,637	4,043	3,465	2,871	2,202	1,482	0,499
Punkt 12	0,323	0,999	2,012	3,120	4,624	6,207	7,795	8,794	9,431	9,547	9,215	8,551	7,977	6,871	5,881	5,727	4,648	3,482	2,027	0,780

Tablica 2

Wychylenia (w metrach) ciężna obliczone wzorami szeregowymi przy uwzględnieniu osterech, sześciu i ośmiu wyrazów oraz wzorem ścisłym

	Przejazd z prędkością $v = 20$ m/sek						Styczne ugięcia ciężna			
	Rozw. przybl. $k = 20$			Rozwiązanie ścisłe			Rozw. szeregowe			Rozw. ścisłe
	L i c z b a w y r a z ó w									
	4	6	8	4	6	8	4	6	8	
1	0,110	0,167	0,173	0,048	0,099	0,142	0,088	0,131	0,171	0,439
2	0,836	1,674	1,151	0,679	0,901	1,027	0,379	0,603	0,723	1,249
3	1,776	1,881	1,924	1,641	1,816	1,825	1,564	1,695	1,710	1,969
4	2,427	2,423	2,442	2,542	2,563	2,650	2,272	2,296	2,378	2,599
5	2,682	2,756	2,945	2,483	2,572	2,658	2,740	2,841	2,945	3,139
6	3,048	3,165	3,186	3,040	3,246	3,269	3,131	3,336	3,360	3,589
7	3,868	3,827	3,953	3,705	3,827	3,918	3,527	3,641	3,735	3,949
8	4,330	4,417	4,590	4,190	4,260	4,319	3,857	3,929	3,992	4,219
9	3,924	4,059	4,021	3,795	3,930	3,938	4,020	4,140	4,192	4,399
10	3,793	3,953	4,103	3,816	4,028	4,098	4,032	4,198	4,271	4,489
11	4,350	4,407	4,456	4,329	4,462	4,541				
12	4,441	4,534	4,639	4,251	4,379	4,433				
13	3,869	3,934	3,996	3,731	3,792	3,862				
14	3,526	3,395	3,428	3,279	3,384	3,483				
15	3,271	3,491	3,485	3,467	3,691	3,716				
16	2,823	2,940	3,012	2,870	2,968	3,064				
17	2,358	2,398	2,497	2,217	2,241	2,322				
18	1,756	1,963	1,960	1,388	1,582	1,595				
19	0,836	0,971	1,168	0,831	1,037	1,158				
20	0,143	0,157	0,226	0,102	0,146	0,176				

Po wybraniu określonego modelu tłumienia proponowany sposób przybliżony pozwoli, stosunkowo łatwo je uwzględnić.

Nasuwać się również tematy inne, których rozwiązanie w oparciu o proponowany sposób bliżej naświetliłby zagadnienie ruchu liny, a to uwzględnienie masy siły poruszającej się i związane z tym zmienność siły naciągu i problem dużych zwisów, wpływu odkształcalności podpór kotwiących liny itp. Problemy te wymagają dalszych szczegółowych opracowań.

#### LITERATURA

- [1] Rżysko J.: O pewnym zastosowaniu teorii wiotkich cięgien i teorii podobieństwa mechanicznego do układów linowych. Praca Katedry Mechaniki Technicznej. Wydawnictwo Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1962.
- [2] Hajduk J.: Wybrane działy transportu linowego. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1961.
- [3] Rżysko J.; Wilczyński A.: Uwzględnienie sprężystości podpór w procesie drgań zamocowanych na stałe lin nośnych. Praca Katedry Mechaniki Technicznej. Wydawnictwo Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1965.
- [4] Janicki L.: Próba wyznaczenia dynamicznego przepięcia lin nośnych powstającego podczas gwałtownego ich odciążenia. Praca Katedry Mechaniki Technicznej. Wydawnictwo Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1965.
- [5] Bogumił J.T.: Badanie sztywności liny i jej wpływu na wzrost napięć dynamicznych w linach sieci ochronnych. Komunikat na zebraniu naukowym Zespołu Ustrojów Ciężnowych przy IPPT PAN Warszawa - maj 1966.

- [6] Czitary E.: Über Schwingungen von Schwebeseiten. Die Bautechnik 1940, t. 18 nr 47/48.
- [7] Gołobnin G.T.: Dynamika kanatów i cepiej. Metallurgizdat Charków 1962.
- [8] Sawin G.N.: Dinamiczeskaja teorija ransczeta szachtnych podziemnych kanatów, AN UCCR, Kijów 1949.
- [9] Kaosurin K.N.: Teorija wislaczich sistem. Stroizdat 1962.
- [10] Barat J.E., Pławiniński W.J.: Kabielnije krany. Izd. Maszynostrojenie, Moskwa 1964.
- [11] Dukiekskij A.J.: Podwiesnyje kanatnyje drogi i kabielnije krany. Izd. Maszynostrojenie, Moskwa-Leningrad 1966.
- [12] Ananiew A.A.: Issledowanie kolebanij zeszoch kanalów kalebnych kranow s podwiesnym bunkierom. Trudy Leningradskogo Politechničeskogo ist., Leningrad 1960 nr 241.
- [13] Ziemia S.: Analiza drgań. PWN. Warszawa 1959.
- [14] Trajdos T., Wróbel: Matematyka dla inżynierów. PWT Warszawa 1965.

#### ДВИЖЕНИЕ ЦЕПИ ПРИВЕДЕННОЙ ПРОЕЗЖАЮЩЕЙ СОСРЕДОЧЕННОЙ СИЛОЙ

##### Резюме

В статье представленный приближенный способ расчёта перемещений цепи при равномерно распределительной массе, с малой стрелой провеса и постоянной силой натяжки. В работе опущена роль массы сосредоточенной на грузке, а также влияние внутреннего поглощения.

Приближенный представленного способа полагается в том, что проезжающая сила заступлена действием силы последовательно прикладываемой к отдельным точкам цепи.

Результат задачи получено через суперпозицию последовательных влияний.

В конце статьи представлено несколько примеров.

## MOTION OF A TIE ROD CAUSED BY A MOVING CONCENTRATED FORCE

## Summary

An approximate solution of a small slack, uniformly distributed mass and constant force of tension tie rod for an arbitrary way of moving along it of a concentrated force has been given. The influence of the mass of the tie rod and its internal damping has been neglected.

The approximation of the proposed solution relies on replacing of the direct moving of the force along the tie rod with an action of the concentrated force in equally distance lying points of the tie rod, for an adequate time and by a superposition of those effects.

Some examples of calculations have been given.