

BOHDAN BOCZKAJ, HENRYK HAT

NIEKTÓRE PRZYPADKI STATECZNOŚCI  
PASM RUSZTOWYCH

Streszczenie. W artykule rozpatrzono stateczność pasm rusztowych o schemacie belki wolnopodpartej oraz wspornika. Jako model zastosowano jednorodną siatkę ciągłą, będącą przypadkiem szczególnym teorii ośrodków włókniastych. Otrzymane wyniki zestawiono w tablice oraz przedstawiono w postaci wykresów współczynników do "słż Eulera".

1. Wstęp

W artykule tym rozpatrzono stateczność pasm rusztowych o schemacie belki swobodnie podpartej oraz wspornikowej. Jako model pasm rusztowych przyjęto jednorodną siatkę ciągłą. Jest to przypadek szczególny zagadnienia płaskiego teorii ośrodków włókniastych.

Układ osi współrzędnych i schematy pasm w przekroju poprzecznym pokazano na rys. nr 1.

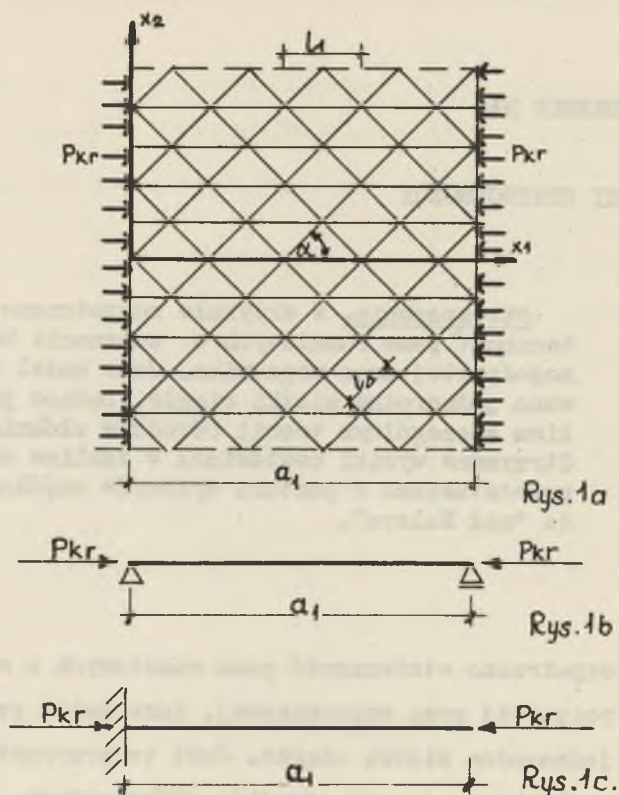
Dla wyznaczenia obciążeń krytycznych rozpatrywano jedynie przypadek ściskania.

2. Równania ogólne

Ogólne równania stateczności pasm mają postać:

$$c^{1212} \partial_1^3 v_2 + \partial_1 h^2 + f^3 + \partial_1^2 w_3 p^{11} = 0 \quad (1.1)$$

$$1^2 c^{1212} \partial_1^2 v_2 - \bar{A}^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) + 1^2 h^2 = 0 \quad (1.2)$$



Rys. 1

gdzie:  $\bar{A}$  i  $\bar{C}$  są współczynnikami zależnymi od sztywności giętych i skrętnych włókien pasma oraz od kątów zawartych między kierunkami włókien. Wzory dla tych współczynników podano w rozdziale 5.

$$\bar{a}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$v_2$  - kąt obrotu pasma (w węzłach siatki),

$w_3$  - ugięcie pasma (w kierunku osi  $x_3$ ),

$p^{11}$  - obciążenie w płaszczyźnie pasma o kierunku równoległym do osi  $x_2$ ,

$h^2$  - zewnętrzne obciążenie momentowe o wektorze równoległym do osi

$x_2$ ,

$f^3$  - obciążenie zewnętrzne (o kierunku równoległym do osi  $x_3$ ),

$l$  - odległość między węzłami siatki mierzona w kierunku osi  $x_1$ .

Równania stateczności pasm (1) różnią się od równań równowagi (5) podanych w pracy [3] o składnik  $\partial_1^2 w_3 p^{11}$  podobnie jak równania (2.2) w pracy [1] od równań (5.7) w pracy [2].

W równaniu (2.2) pracy [1] składnik ten ma postać:  $\partial_\alpha \partial_\beta w_3 p^{\alpha\beta}$ , gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  przebiegają ciąg 1,2.

Związki między wielkościami wewnętrznymi i przemieszczeniami mają postać:

$$m^{12} = C^{1212} \partial_1 v_2 \quad (2.1)$$

$$m^{21} = C^{1212} \partial_1 v_2 \quad (2.2)$$

$$l^2 p^{13} = \bar{A}^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) \quad (2.3)$$

Dla wyznaczenia obciążenia krytycznego przyjęto  $p^{11} = -p$  oraz

$$h^2 = f^3 = 0.$$

Wprowadzmy oznaczenia  $\frac{1}{\beta^2} = \frac{C^{1212}}{A^{1313}}$  i podstawmy je do równania (1.2)

Przyjmie ono wtedy postać:

$$\frac{l^2}{\beta^2} \partial_1^2 v_2 - v_2 = \partial_1 w_3 \quad (3)$$

Wyrażenie (3) po przekształceniu i zróżniczkowaniu podstawiamy do równania (1.1) i otrzymujemy:

$$C^{1212} \partial_1^3 v_2 + \left( \frac{l^2}{\beta^2} \partial_1^3 v_2 - \partial_1 v_2 \right) p^{11} = 0 \quad (4)$$

Kładąc  $u = \partial_1 v_2$  możemy równanie (4) napisać po przekształceniu w postaci:

$$\partial_1^2 u - \frac{p^{11}}{c^{1212} - \frac{1^2}{\beta^2} p^{11}} u = 0 \quad (5)$$

lub

$$\partial_1^2 u + \xi^2 u = 0 \quad (6)$$

gdzie

$$\xi^2 = \frac{p}{c^{1212} - \frac{1^2}{\beta^2} p}$$

Całka ogólna równania (6) ma postać:

$$u = A \sin \xi x_1 + B \cos \xi x_1 \quad (7)$$

stąd po scałkowaniu otrzymujemy:

$$v_2 = -\frac{A}{\xi} \cos \xi x_1 + \frac{B}{\xi} \sin \xi x_1 + C \quad (8)$$

Podstawiając równanie (8) do równania (3) a następnie całkując otrzymamy rozwiązanie:

$$w_3 = \frac{1^2}{\beta^2} (A \sin \xi x_1 + B \cos \xi x_1) + \frac{A}{\xi^2} \sin \xi x_1 + \frac{B}{\xi^2} \cos \xi x_1 - C x_1 + D. \quad (9)$$

Stałe A, B, C i D wyznaczamy z warunków brzegowych.



## 3. Stateczność pasma swobodnie popartego

Dla pasma o schemacie statycznym belki swobodnie popartej zachodzą następujące warunki brzegowe:

$$w_3(0) = 0 \quad (10.1)$$

$$w_3(a_1) = 0 \quad (10.2)$$

$$m^{12}(0) = 0, \text{ a zatem } u(0) = 0 \quad (10.3)$$

$$m^{12}(a_1) = 0, \text{ a zatem } u(a_1) = 0 \quad (10.4)$$

Z warunków (10.1) i (10.3) otrzymujemy natychmiast, że  $B = 0$  i  $D = 0$ .

Pozostały układ dwóch równań jednorodnych o dwóch niewiadomych posiada rozwiązanie niezerowe, gdy wyznacznik układu

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\xi^2}\right) \sin \xi a_1 & -a_1 \\ \sin \xi a_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

stąd  $\sin \xi a_1 = 0$ , czyli  $\xi = \frac{n\pi}{a_1}$

Uwzględniając, że

$$\xi^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a_1^2} \quad \text{i} \quad \xi^2 = \frac{p}{c^{12} - \frac{1}{\beta^2} p}$$

otrzymany równanie

$$p = \frac{C^{1212} \mathcal{H}^2}{a_1^2 \left[ \frac{1}{n^2} + \left( \frac{1}{a_1} \right)^2 \frac{\mathcal{H}^2}{\beta^2} \right]} \quad (11)$$

Dla  $n = 1$  zachodzi  $p = p_{kr}$

$$p_{kr} = \frac{\mathcal{H}^2 C^{1212}}{a_1^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{a_1} \right)^2 \cdot \frac{\mathcal{H}^2}{\beta^2}} \quad (12)$$

Wielkości  $p_{kr}$  dla poszczególnych typów siatek w zależności od ich gęstości zostaną podane w rozdziale 5.

#### 4. Stateczność pasma utwierdzonego

Dla siatki rusztowej w kształcie pasma o jednym brzegu doskonale utwierdzonym a drugim całkowicie swobodnym (rys. 1c) zachodzą następujące warunki brzegowe:

$$w_3(0) = 0 \quad (13.1)$$

$$v_2(0) = 0 \quad (13.2)$$

$$m^{12}(a_1) = 0 \quad (13.3)$$

$$p^{13}(0) = 0 \quad (13.4)$$

Wykorzystując powyższe warunki otrzymujemy układ czterech równań jednorodnych o niewiadomych A, B, C i D. Układ ten posiada rozwiązanie niezerowe wtedy, gdy wyznacznik układu

$$\begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\xi^2}\right) & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\xi} & 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi a_1 & \cos \xi a_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\beta^2} \xi & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

skąd otrzymujemy  $\cos \xi a_1 = 0$ , czyli  $\xi = \frac{(2n-1)\pi}{2a_1}$

Podobnie jak w rozdziale 3 dla  $\xi^2 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{(2a_1)^2}$

oraz  $\xi^2 = \frac{p}{C^{1212} - \frac{1}{\beta^2} p}$  otrzymujemy:

$$p = \frac{\pi^2 C^{1212}}{a_1^2 \left[ \frac{4}{(2n-1)^2} + \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \frac{\pi^2}{\beta^2} \right]} \quad (14)$$

Dla  $n = 1$  zachodzi  $p = p_{kr}$ :

$$p_{kr} = \frac{\pi^2 C^{1212}}{(2a_1)^2 \cdot \left[ 1 + \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \frac{\pi^2}{\beta^2} \right]} \quad (15)$$

Również dla tego schematu podobnie jak w rozdziale 3 wyznaczono wielkości  $p_{kr}$  dla poszczególnych typów siatek w zależności od ich gęstości.

Do wykonania obliczeń wykorzystano fakt, że budowa wzorów (12) i (15) jest identyczna uwzględniając, że dla prętów przegubowo podpartych długość wybozeniowa  $l = a_1$ , a dla wsporników  $l = 2a_1$ .

### 5. Wyznaczenie sił krytycznych dla różnych typów siatek

Podobnie jak w pracy [3] do rozważań przyjęto trzy typy siatek przedstawionych na rys.2 oraz że zarówno sztywności giętne ( $S_{\Delta}^{II}$ ) jak i skrętne ( $S_4^I$ ) wszystkich włókien są sobie równe, a mianowicie  $S_{(1)}^{II} = S^I = S^{II} = S$ .

Zajmijmy się teraz wprowadzoną w rozdziale 2 wielkością  $\frac{1}{\beta^2} = \frac{C^{1212}}{\bar{A}^{1313}}$ . Wielkości współczynników  $C^{1212}$  i  $\bar{A}^{1313}$  zostały podane w pracy [1] i [3], jednak dla ciągłości rozumowania zostaną tu ponownie przytoczone.

I tak:

$$C^{1212} = S_{(1)}^{II} + 2 \cos^2 \alpha (S^I \sin^2 \alpha + S^{II} \cos^2 \alpha)$$

$$\bar{A}^{1313} = 12 (S_{(1)}^{II} + 8S^{II} \cos^4 \alpha)$$

$S_{(1)}^{II}$  jest sztywnością giętą włókna równoległego do osi  $x_1$  tj. włókna "1",

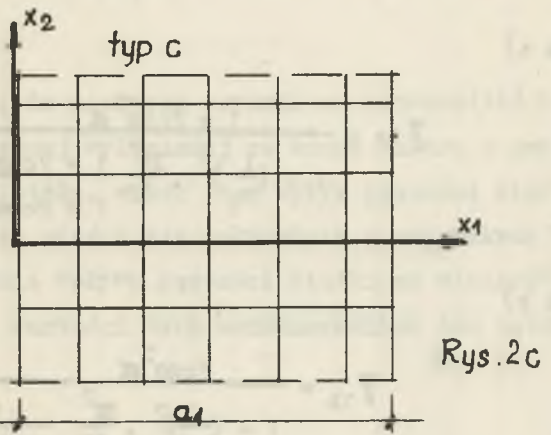
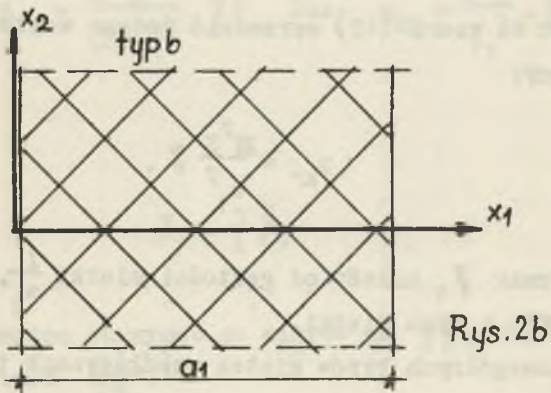
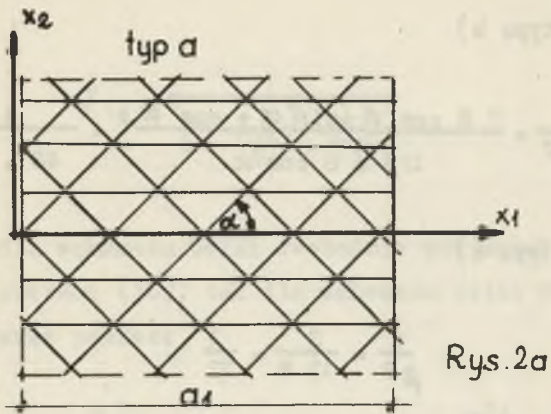
$S^I$  jest sztywnością skrętą włókien "2" i "3",

$S^{II}$  jest sztywnością giętą włókien "2" i "3".

Dla siatki typu a)

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{S [1 + 2 \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)]}{12 S (1 + 8 \cos^4 \alpha)} = \frac{1 + 2 \cos^2 \alpha}{12 (1 + 8 \cos^4 \alpha)}$$





Rys. 2

Dla siatki typu b)

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{2 S \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{12S \cdot 8 \cos^4 \alpha} = \frac{1}{48 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Dla siatki typu c)

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{S}{12 S} = \frac{1}{12}$$

Podstawiając do wzoru (12) uprzednio podane wartości dla  $C^{1212}$  i  $\frac{1}{\beta^2}$  otrzymamy:

$$p_{kr} = \frac{\pi^2 S}{a_1^2} \gamma_1 \quad (16)$$

Współczynnik  $\gamma_1$  zależy od gęstości siatki  $\frac{1}{a_1}$ , kątów nachylenia włókien " $\alpha$ " i typu siatki.

Dla poszczególnych typów siatek współczynnik ten wyrazi się wzorami:

siatka typu a)

$$\gamma_{1a} = \frac{1 + 2\cos^2 \alpha}{1 + \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{12} \frac{1 + 2\cos^2 \alpha}{1 + 8\cos^4 \alpha}}$$

siatka typu b)

$$\gamma_{1b} = \frac{2\cos^2 \alpha}{1 + \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{4\cos^2 \alpha}}$$

siatka typu c)

$$\gamma_{1c} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \frac{\pi^2}{12}}$$

Podobnie jak dla schematu belki swobodnie podpartej wzór (12) doprowadzono do postaci (16); tak dla schematu belki wspornikowej wzór (15) przybierze postać:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 S}{(2a_1)^2} \cdot \bar{\gamma}_2 \quad \text{lub} \quad P_{kr} = \frac{\pi^2 \dot{S}}{a_1^2} \cdot \gamma_2 \quad (17)$$

gdzie:

$$\gamma_2 = \frac{1}{4} \bar{\gamma}_2$$

Wzory na  $\bar{\gamma}_2$  można otrzymać ze wzorów na  $\gamma_1$  podstawiając w miejsce  $\left(\frac{1}{a_1}\right)^2$  wartość  $\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2$

Z uwagi na to, że pierwszy czynnik we wzorach (16) i (17) jest równy sile krytycznej wyliczonej ze wzoru Eulera i jest dla danego pasma wielkością stałą, wobec tego wpływ gęstości siatki i kątów nachylenia włókien mieści się całkowicie w czynnikach  $\gamma$ .

Dla zobrazowania wpływu gęstości siatki na wielkość  $\gamma$ , podano w tablicach I-IV wartości tych współczynników dla kątów nachylenia włókien co  $15^\circ$ .

Tablica I

Współczynniki  $\gamma_{1a}$ 

Gęstość siatki $\eta = \frac{1}{a_1}$	Kąt nachylenia włókien $\alpha$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
1:2	2,808	2,662	2,285	1,760	1,244	0,925	0,829
1:3	2,911	2,763	2,400	1,885	1,378	1,032	0,916
1:4	2,950	2,815	2,445	1,938	1,490	1,074	0,952
1:5	2,967	2,832	2,461	1,958	1,452	1,096	0,968
1:6	2,977	2,842	2,473	1,970	1,469	1,109	0,979
1:7	2,984	2,846	2,485	1,979	1,479	1,115	0,985
1:8	2,987	2,853	2,490	1,983	1,481	1,119	0,987
1:9	2,990	2,860	2,492	1,988	1,483	1,121	0,989
1:10	2,992	2,861	2,495	1,991	1,485	1,125	0,990
1:∞	3,000	2,865	2,500	2,000	1,500	1,134	1,000

$$\gamma_{1c} = \gamma_{1a} \text{ dla } \alpha = 90^\circ$$

Tablica II

Współczynniki  $\gamma_{1b}$ 

$\eta = \frac{1}{a_1}$	Kąt nachylenia włókien $\alpha$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
1:2	1,902	1,769	1,405	0,907	0,415	0,076	0
1:3	1,955	1,785	1,452	0,966	0,458	0,100	0
1:4	1,975	1,840	1,477	0,976	0,476	0,112	0
1:5	1,984	1,851	1,481	0,985	0,484	0,119	0
1:6	1,989	1,853	1,488	0,989	0,489	0,123	0
1:7	1,992	1,856	1,492	0,992	0,492	0,126	0
1:8	1,994	1,859	1,494	0,993	0,493	0,128	0
1:9	1,995	1,860	1,495	0,994	0,495	0,129	0
1:10	1,996	1,861	1,495	0,995	0,496	0,130	0
1:∞	2,000	1,865	1,500	1,000	0,500	0,134	0



Tablica III

Współczynniki  $\gamma_{2a}$

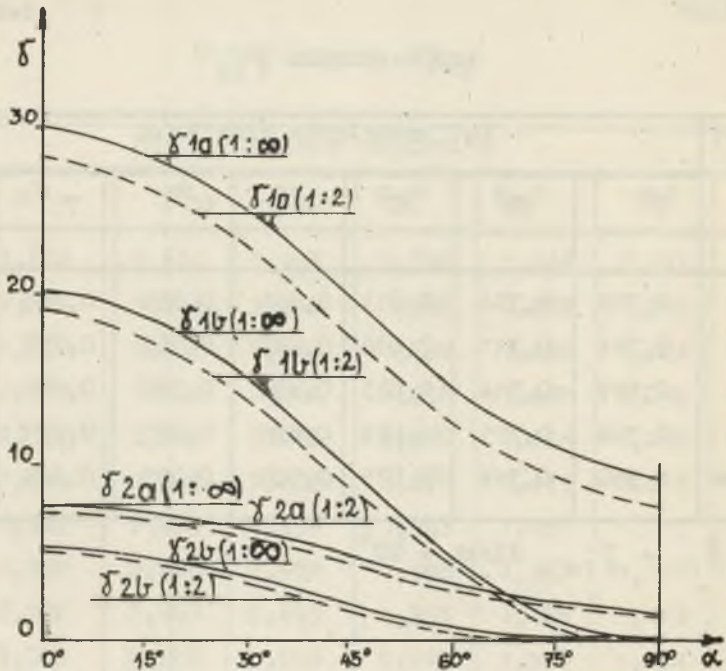
Gęstość siatki $\eta = \frac{1}{a_1}$	Kąt nachylenia włókien $\alpha$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
1:2	0,738	0,704	0,611	0,485	0,358	0,269	0,238
1:3	0,744	0,711	0,618	0,493	0,367	0,277	0,245
1:4	0,747	0,714	0,623	0,496	0,370	0,280	0,247
1:5	0,748	0,715	0,624	0,498	0,371	0,281	0,248
1:∞	0,750	0,716	0,625	0,500	0,375	0,284	0,250

$\gamma_{2c} = \gamma_{2a}$  dla  $\alpha = 90^\circ$

Tablica IV

Współczynniki  $\gamma_{2b}$

Gęstość siatki $\eta = \frac{1}{a_1}$	Kąt nachylenia włókien $\alpha$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
1:2	0,494	0,460	0,369	0,244	0,119	0,028	0
1:3	0,497	0,463	0,372	0,247	0,122	0,031	0
1:4	0,498	0,464	0,373	0,248	0,123	0,032	0
1:5	0,499	0,465	0,374	0,249	0,124	0,033	0
1:∞	0,500	0,466	0,375	0,250	0,125	0,034	0



Rys. 3. Zależność współczynników  $\gamma$  od kąta  $\alpha$  nachylenia włókien

Na rysunku 3 przedstawiono zależności  $\gamma$  od kąta nachylenia włókien dla dwóch skrajnych gęstości siatki  $\eta = \frac{1}{2}$  i  $\eta = \infty$  dla poszczególnych typów siatek i schematów pasm. Bliskie położenie wykresów  $\gamma$  dla skrajnych wartości  $\eta$  wskazuje, że wpływ gęstości siatki jest niewielki.

#### LITERATURA:

- [1] Woźniak Cz. On the Stability of Dense Plane Bar Grids, "Bull. Acad. Polon.Sci.Techn." XIII No 6-1965.
- [2] Woźniak Cz., Modele ciągłe gęstych siatek prętowych. "Arch. Inż.Łąd." Tom XI-2/1965.
- [3] Boczkaj B. i Hat H., Jednokierunkowo obciążone pasma rusztowne "Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej" 21.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ РОСТВЕРКОВЫХ ПОЛОС

Р е з ю м е

В статье обсуждено устойчивость ростверковых полос о схеме балки на двух опорах или консоли. Для этих полос принято модел однородных сплошных сетом будущих особенным случаем теори волокнистых сред. Полученные результаты составлено в табелях и представлено в виде диаграмма коэффициентов к "силам Еулера".

SOME CASES OF STABILITY OF GRATE BANDS

Summary

In this article the stability of grate bands with the scheme of a free ends beam and bracket has been considered.

As a model a homogenous continuous network has been applied, this being a particular case of the fibrous media theory.

The results got have been presented in tables in form of diagrams of coefficients to "Euler forces".