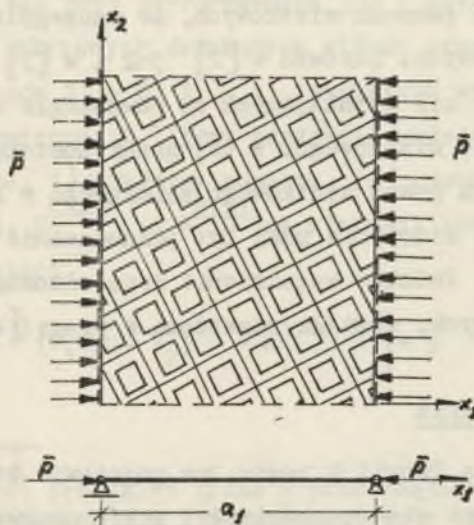


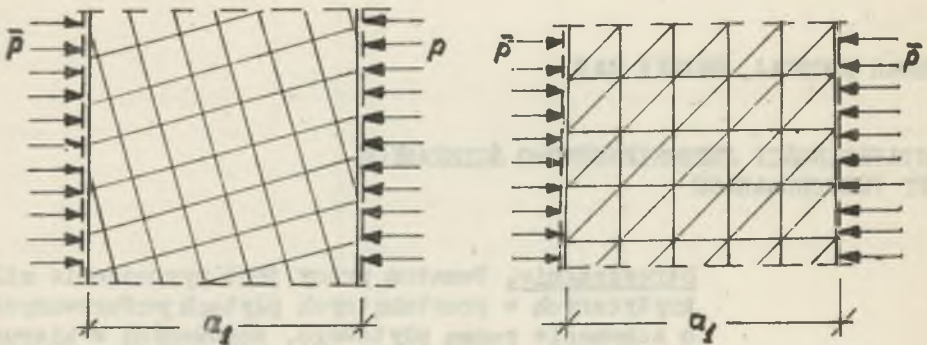
BOHDAN BOCZKAJ, HENRYK HAT

O STATECZNOŚCI JEDNOKIERUNKOWO ŚCISKANYCH
PŁYT PERFOROWANYCH

Streszczenie. Tematem pracy jest wyznaczenie sił krytycznych w prostokątnych płytach perforowanych o schemacie pasma płytowego, ściskanych w kierunku prostopadłym do podpartych brzegów (rys. 1). Jako schemat obliczeniowy płyty perforowanej przyjęto jednorodny model opisywany równaniami ośrodka włóknistego, podanymi w [1]. Uzyskane wyrażenia dla sił krytycznych można zastosować także w przypadku jednokierunkowo ściskanych pasm rusztowych (rys. 2); otrzymane wyniki uogólniają wtedy rezultaty poprzedniej pracy autorów [2] na przypadek, w którym kierunek ściskania nie jest kierunkiem ortotropii płyty siatkowej.



Rys. 1



Rys. 2

1. Wstęp

Zagadnienia stateczności prostokątnych płyt siatkowych tj. gęstych siatek rusztowych lub regularnie i gęsto perforowanych płyt zostały rozpatrzone w pracy [3], w której schematem obliczeniowym płyty siatkowej był płaski ośrodek włóknisty [1].

W pracy [2] podano wyrażenia dla sił krytycznych w jednokierunkowo ściskanych pasmach siatkowych, ze szczególnym uwzględnieniem siatek rusztowych. Zarówno w [2] jak i w [3] założono, że kierunki działania sił ściskających są równoległe do kierunków ortotropii dźwigara siatkowego. W tej pracy zostaną podane wzory dla sił krytycznych pasma siatkowego ściskanego w kierunku prostopadłym do brzegów, który nie musi być jednocześnie kierunkiem ortotropii (rys. 1). Podobne zagadnienie lecz odnoszące się do zginania pasm siatkowych, zostało rozważone w pracy [4].

2. Podstawowe równania

Podstawowe równania Teorii 2 rzędu, na podstawie której możemy rozpatrywać zagadnienia stateczności płyt perforowanych lub gęstych

siatek rusztowych, były podane w pracach [1], [3]. Mają one postać ¹⁾

$$\begin{aligned} & \partial_K \left[A^{K3M3} (\partial_M w_3 + \varepsilon_{MN} v_N) \right] + p^{KL} \partial_K \partial_L w_3 = 0 \\ & \partial_K (c^{KLMN} \partial_M v_N) - \delta^{LM} m^{K3} \partial_M \partial_K w_3 - \\ & - \varepsilon_K^L A^{K3M3} (\partial_M w_3 + \varepsilon_{MN} v_N) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

w której $A^{K3M3} = A^{M3K3}$, $c^{KLMN} = c^{MNKL}$ są składowymi tensorów sztywności sprężystej płyty siatkowej, $w_3(x_K)$ jest ugięciem płyty, $v_N(x_K)$ jest obrotem elementów płyty względem osi $X_N = \text{const}$, p^{KL} , m^{K3} są składowymi tarczowego stanu napięcia (tensorem napięć i wektorem napięć momentowych, por [5]), wreszcie ε_{MN} i δ^{LM} są symbolami Ricciego i Kroneckera.

W zależności od budowy składowych A^{K3M3} i c^{KLMN} , równania (2.1) mogą dotyczyć tak płyt perforowanych jak i siatek rusztowych [1].

W pasmach płytowych ściskanych siłami równomiernie rozłożonymi wzdłuż brzegów $X_1 = 0$, $X_1 = a_1$, wszystkie wielkości mogą zależeć tylko od zmiennej X_1 (przy przyjęciu układu współrzędnych pokazanego na rys. 1). Załóżmy ponadto, że rozważany dźwigar jest jednorodny, tj. c^{KLMN} i A^{K3L3} są stałymi. Równania (2.1) sprowadzają się do postaci

$$\partial_1 \left[A^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) - A^{1323} v_1 \right] + p^{11} \partial_1^2 w_3 = 0$$

¹⁾ Postać ta jest prawdziwa tylko w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich X_1, X_2 ; wszystkie wskaźniki przybierają wartości 1, 2; obowiązuje konwencja sumacyjna.

$$\partial_1 (c^{1111} \partial_1 v_1 + c^{1112} \partial_1 v_2) + \\ + A^{2313} (\partial_1 w_3 + v_2) - A^{2323} v_1 - m^{13} \partial_1^2 w_3 = 0 \quad (2.2)$$

$$\partial_1 (c^{1212} \partial_1 v_2 + c^{1211} \partial_1 v_1) - A^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) + \\ + A^{1323} v_1 = 0$$

Całkując pierwsze z powyższych równań, mamy

$$A^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) - A^{1323} v_1 + p^{11} \partial_1 w_3 = \tilde{C} \quad (2.3)$$

gdzie \tilde{C} jest stałą całkowania. Wynika stąd, że

$$v_2 = \frac{A^{1323}}{A^{1313}} v_1 - \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}}\right) \partial_1 w_3 + \frac{\tilde{C}}{A^{1313}} \quad (2.4)$$

gdyż zawsze $A^{1313} \neq 0$. Korzystając z (2.3), równanie (2.2)₃ napiszemy w postaci

$$\partial_1 (c^{1212} \partial_1 v_2 + c^{1112} \partial_1 v_1) + p^{11} \partial_1 w_3 - \tilde{C} = 0 \quad (2.5)$$

skąd, przy założonej jednorodności dźwigara, mamy

$$\partial_1^2 v_2 = -\frac{c^{1112}}{c^{1212}} \partial_1^2 v_1 - \frac{p^{11}}{c^{1212}} \partial_1 w_3 + \frac{\tilde{C}}{c^{1212}}$$

gdyż zawsze $c^{1212} \neq 0$. Podstawiając za $\partial_1^2 v_2$ do (2.2)₂ powyższe wyrażenie a za v_2 - wyrażenie (2.4), otrzymamy po prostych przekształceniach

$$\begin{aligned}
 & \frac{c^{1111} c^{1212} - (c^{1112})^2}{c^{1212}} \partial_1^2 v_1 - \\
 & - \frac{A^{1313} A^{2323} - (A^{1323})^2}{A^{1313}} v_1 - \\
 & - m^{13} \partial_1^2 w_3 - \left(\frac{c^{1112}}{c^{1212}} + \frac{A^{1323}}{A^{1313}} \right) \\
 & (p^{11} \partial_1 w_3 - \tilde{c}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Podstawiając następnie do (2.5) na miejsce v_2 - wyrażenie (2.4), napiszemy

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{c^{1112}}{c^{1212}} + \frac{A^{1323}}{A^{1313}} \right) \partial_1^2 v_1 - \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}} \right) \cdot \\
 & \cdot \partial_1^3 w_3 + \frac{p^{11}}{c^{1212}} \partial_1 w_3 - \frac{\tilde{c}}{c^{1212}} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Równania (2.6) i (2.7) oraz wzór (2.4) stanowią przekształcony oraz jednokrotnie scałkowany układ równań (2.2). Zgodnienie przeprowadzone więc zostało do układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych (2.6) i (2.7) dla dwóch funkcji $v_1(x_1)$, $w_3(x_1)$. Oznaczając

$$p \equiv \frac{c^{1111} c^{1212} - (c^{1112})^2}{c^{1212}}, \tag{2.8}$$

$$q \equiv \frac{A^{1313} A^{2323} - (A^{1223})^2}{A^{1313}}, \quad s \equiv \frac{c^{1112}}{c^{1212}} + \frac{A^{1323}}{A^{1313}},$$

układ (2.6), (2.7) napiszemy w postaci

$$p \partial_1^2 v_1 - q v_1 - m^{13} \partial_1^2 w_3 - s (p^{11} \partial_1 w_3 - \check{c}) = 0 \quad (2.9)$$

$$s \partial_1^2 v_1 - \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}}\right) \partial_1^3 w_3 + \frac{p^{11}}{C^{1212}} \partial_1 w_3 - \frac{\check{c}}{C^{1212}} = 0;$$

stałe p , q są zawsze dodatnie, stała s może przyjmować wartości dodatnie, ujemne lub zero.

Ten ostatni przypadek zachodzi, gdy $C^{1112} = A^{1323} = 0$, tj. gdy ściskanie zachodzi wzdłuż kierunku ortotropii; zagadnienie to zostało omówione w [2].

3. Rozwiązanie ogólne, wyznaczenie siły krytycznej

W dalszym ciągu omawiać będziemy przypadek $m^{13} = 0$ (brzeży tarczy nie są obciążone momentami) oraz $s \neq 0$, aczkolwiek wszystkie otrzymane wyniki prawdziwe są także dla $s = 0$, sprowadzając się wtedy do podanych w [2]. Oprócz oznaczeń (2.8) wprowadzimy dodatkowe oznaczenie

$$\gamma^2 \equiv \frac{q}{p}, \quad \xi^2 \equiv - \frac{p^{11}}{C^{1212} \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}}\right)} \quad (3.1)$$

$$\eta^2 \equiv - \frac{s^2 p^{11}}{p \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}}\right)}$$

przy czym $-p^{11} > 0$ jest wartością siły ściskającej; wykazuje się, że jest ona niezależna od X_1 , gdy tylko nie działają siły masowe,

o składowej równoległej do osi X_1 . Zarówno $\gamma^2 > 0$, $\xi^2 > 0$ jak i $\eta^2 > 0$, gdyż zawsze $q > 0$, $p > 0$, $-p^{11} < A^{1313}$.

Równania (2.9) sprowadzają się teraz do

$$\partial_1^2 v - \gamma^2 v - \frac{sp^{11}}{p} \partial_1 w_3 = -\frac{s}{p} \tilde{C}, \quad (3.2)$$

$$\partial_1^2 w_3 + \xi^2 w_3 - \frac{s}{1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}}} \partial_1 v = \tilde{C} \frac{\xi^2}{p^{11}} x_1 + \tilde{D}$$

gdzie ponadto oznaczono

$$v \equiv v_1 \quad (3.3)$$

Całki szczególne V^* , W_3^* układu równań (3.2) można przyjąć w postaci

$$V^* = 0, \quad W_3^* = \frac{\tilde{C}}{p^{11}} X_1 + \frac{\tilde{D}}{\xi^2} \quad (3.4)$$

Oznaczmy $u \equiv \partial_1 w_3$, $z \equiv \partial_1 v$. Układ równań (3.2) sprowadza się wtedy do układu czterech równań różniczkowych zwyczajnych, zawierających tylko pochodne pierwszego rzędu. W postaci macierzowej równania te określi wzór

$$\begin{bmatrix} \partial_1 w_3 \\ \partial_1 v \\ \partial_1 u \\ \partial_1 z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\xi^2 & 0 & 0 & \frac{s}{1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}}} \\ 0 & \gamma^2 & \frac{sp^{11}}{p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_3 \\ v \\ u \\ z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\xi^2 & 0 & -\lambda & 1 + \frac{s}{1313} \\ 0 & \gamma^2 & \frac{sp}{p} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

czyli

$$\lambda^4 + \lambda^2 (\xi^2 - \gamma^2 + \eta^2) - \xi^2 \gamma^2 = 0, \quad (3.6)$$

po wykorzystaniu oznaczenia (3.1)₃. Kwadraty pierwiastków równania charakterystycznego wynoszą

$$\lambda^2 = \frac{\gamma^2 - \xi^2 - \eta^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma^2 - \xi^2 - \eta^2}{2}\right)^2 + \xi^2 \gamma^2} \quad (3.7)$$

Można wykazać, że zawsze $\gamma^2 \geq \xi^2 + \eta^2$. Tym samym pierwiastki równania charakterystycznego (3.6) są równe

$$\lambda_{(1)} = \mu i, \quad \lambda_{(2)} = -\mu i, \quad \lambda_{(3)} = \nu, \quad \lambda_{(4)} = -\nu, \quad (3.8)$$

gdzie μ i ν są liczbami dodatnimi

$$\mu = \sqrt{\frac{\gamma^2 - \xi^2 - \eta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma^2 - \xi^2 - \eta^2}{2}\right)^2 + \xi^2 \gamma^2}}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\gamma^2 - \xi^2 - \eta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma^2 - \xi^2 - \eta^2}{2}\right)^2 + \xi^2 \gamma^2}} \quad (3.9)$$

Całki ogólne jednorodnego układu równań, odpowiadającego układowi (3.2) mają więc postać

$$w_3 = A \cos(\mu x_1) + B \sin(\mu x_1) + C e^{\nu x_1} + D e^{-\nu x_1}$$

$$v = \bar{A} \sin(\mu x_1) + \bar{B} \cos(\mu x_1) + \bar{C} e^{\nu x_1} + \bar{D} e^{-\nu x_1} \quad (3.10)$$

przy czym stałe całkowania \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} wrażają się przez stałe A , B , C , D

$$\bar{A} = \frac{sp^{11}}{(\mu^2 + \nu^2) p} \mu A, \quad \bar{B} = -\frac{sp^{11}}{(\mu^2 + \nu^2) \cdot p} \mu B,$$

$$\bar{C} = \frac{sp^{11}}{(\nu^2 - \gamma^2) p} \nu C, \quad \bar{D} = -\frac{sp^{11}}{(\nu^2 - \gamma^2) \cdot p} \nu D \quad (3.11)$$

Całki ogólne niejednorodnego układu równań (3.2) są sumą rozwiązań (3.10) i (3.4). Korzystając następnie z (2.4), otrzymujemy ostatecznie

$$w_3 = A \cos(\mu x_1) + B \sin(\mu x_1) + C e^{\nu x_1} +$$

$$+ D e^{-\nu x_1} + \frac{\tilde{C}}{p^{11}} x_1 + \frac{\tilde{D}}{\xi^2}$$

$$v_1 = \bar{A} \sin(\mu x_1) + \bar{B} \cos(\mu x_1) + \bar{C} e^{\nu x_1} + \\ + \bar{D} e^{-\nu x_1}$$

$$v_2 = \left[\bar{A} \frac{A^{1323}}{A^{1313}} + A \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}} \right) \mu \right] \sin(\mu x_1) + \\ + \left[\bar{B} \frac{A^{1323}}{A^{1313}} - B \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}} \right) \mu \right] \cos(\mu x_1) + \\ + \left[\bar{C} \frac{A^{1323}}{A^{1313}} - C \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}} \right) \nu \right] e^{\nu x_1} + \\ + \left[\bar{D} \frac{A^{1323}}{A^{1313}} + D \left(1 + \frac{p^{11}}{A^{1313}} \right) \nu \right] e^{-\nu x_1} - \frac{\tilde{C}}{p^{11}},$$

gdzie \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} wyrażają się przez A , B , C , D zgodnie z (3.11) Wzór (3.12) przedstawia ogólne rozwiązanie dla pasma siatkowego, ściśkanego siłami prostopadłymi do brzegu. Rozwiązanie to jest zależne od sześciu niezależnych stałych całkowania A , B , C , D , \tilde{C} , \tilde{D} , liczba warunków brzegowych wynosi również sześć (por. [4]). Wartość siły krytycznej $p^{11} = -p_{kr}$ wyznaczamy dla pasma obustronnie swobodnie podpartego (rys. 1).

Warunki brzegowe mają postać

$$X_1 = 0 : w_3 = m^{12} = m^{11} = 0$$

(3.13)

$$X_1 = a_1 : w_3 = m^{12} = m^{11} = 0$$

Ponieważ jednocześnie (por. [4], wzór (2.2))

$$m^{11} = c^{1111} \partial_1 v_1 + c^{1112} \partial_1 v_2$$

$$m^{12} = c^{1112} \partial_1 v_1 + c^{1212} \partial_1 v_2$$

oraz $c^{1111} \cdot c^{1212} - (c^{1112})^2 > 0$, przeto warunki (3.13) są równoważne warunkom

$$x_1 = 0 : w_3 = \partial_1 v_1 = \partial_1 v_2 = 0$$

(3.14)

$$x_1 = a_1 : w_3 = \partial_1 v_1 = \partial_1 v_2 = 0$$

Podstawiając (3.12) do (3.14) otrzymamy

$$A = C = D = \tilde{C} = \tilde{D} = 0, B \sin(\mu a_1) = 0 \quad (3.15)$$

Niezerowe rozwiązania zagadnienia istnieją tylko gdy $B \neq 0$, a tym samym

$$\sin(\mu a_1) = 0$$

czyli

$$\mu^2 = \frac{n^2 \pi^2}{(a_1)^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.16)$$

Korzystając z (3.9)₁ otrzymamy po przekształceniach

$$\xi^2 + \eta^2 \frac{n^2 \mathcal{H}^2}{(a_1)^2 \gamma^2 + n^2 \mathcal{H}^2} = \frac{n^2 \mathcal{H}^2}{(a_1)^2} \quad (3.17)$$

Wzór (3.17), po zastosowaniu (3.1)₁, (3.1)₂ i (3.1)₃, prowadzi do

$$p^{11} = - \frac{n^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2} \left(1 + \frac{s^2 n^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2 q + p n^2 \mathcal{H}^2} \right)^{-1} \cdot \left[1 + \frac{n^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2 A^{1313}} \left(1 + \frac{s^2 n^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2 q + p n^2 \mathcal{H}^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.18)$$

Ponieważ zawsze $\left[(a_1)^2 A^{1313} \right]^{-1}$ jest wartością bardzo małą wobec jedności (por. [2]), przeto wzór (3.18) można zastąpić w przybliżeniu wzorem

$$p^{11} \approx - \frac{n^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2} \left(1 + \frac{s^2 n^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2 q + p n^2 \mathcal{H}^2} \right)^{-1} \quad (3.19)$$

Wartość siły krytycznej wyniesie

$$p_{kr} = - p^{11} \quad (n = 1) \quad (3.20)$$

$$p_{kr} \approx \frac{\mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2} \left(1 + \frac{s^2 \mathcal{H}^2 C^{1212}}{(a_1)^2 q + p \mathcal{H}^2} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

Dla $s = 0$ powyższe wzory sprowadzają się do przypadku omówionego w [2]. Postępując analogicznie jak przy wyprowadzaniu wzorów (3.18) - (3.21), można otrzymać wyrażenia dla sił krytycznych przy różnych sposobach podparcia brzegów pasma.

LITERATURA

- [1] Cz. Woźniak, Bending and stability problems of plates with Lattice structure, Arch.Mech.Stos., 6, 18 (1966).
- [2] B. Boczkaj, H. Hat, Niektóre przypadki stateczności pasm rusztowych, Zesz. Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Budownictwo Nr 24.
- [3] Cz. Woźniak, On the stability of dense plane bar grids, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 6, 13 (1965).
- [4] H. Hat, O pewnych przypadkach zginania wielootworowych pasm płytowych, Zesz. Naukowe Politechniki Śląskiej, seria Budownictwo 24.
- [5] Cz. Woźniak. Load - carrying structures of dense Lattice - type, Arch.Mech. Stos. 5, 18 (1966).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННО СЖАТЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИНОК

Резюме

Тема этой работы это определение критических сил в прямоугольных перфорированных пластинках бесконечной длины сжатых в направлении перпендикулярным к опорам (Рис. 1). В качестве расчётной схемы принято непрерывный модель волокнистой среды, которой уравнения поданы в [1]. Получены выражения для сил критических можно применить даже в приклечении однонаправленно сжатых ростверковых полос (Рис. 2); получены изходы обобщают результаты прежней работы авторов [2]. В случае в котором направление сжатия не будет направлением ортотропии сетковой пластинки.

ABOUT THE STABILITY OF UNIDIRECTIONALLY COMPRESSED PERFORATED BANDS

Summary:

The aim of this elaboration is the determination of the highest useful force ratio in rectangular perforated plates with a scheme of a plate band compressed in a direction perpendicular to the supported edges (fig. 1). As calculating scheme of the perforated plate a simply connected model has been taken circumscribed by equations of the flat centre of fibrous media presented in [1]. The expressions obtained for the useful force ratio may be also applied in case of unidirectionally compressed grate bands (fig. 2) the results got generalize then the effects of the previous elaboration of the authors [2] for the case in which the direction of compression is not the orthotropic direction of the net plate.