

JAN KUBIK

PODSTAWOWE RÓWNANIA TEORII PŁYT
UŻEBROWANYCH IZOTROPOWYCH*)

Streszczenie. Podane w niniejszej pracy równania są ważne dla płyt z materiału izotropowego o dowolnym asymetrycznym uźebrowaniu. Zakłada się liniowość związków fizycznych i geometrycznych oraz przyjmuje wszelkie założenia klasycznej teorii płyt cienkich. W uzyskanych równaniach nieciągły rozkład masy i wielkości wewnętrznych płyty ujęto analitycznie funkcjami dyskretnego argumentu. Końcowe równania przedstawiają zależności między składowymi przemieszczeń powierzchni środkowej płyty.

Wstęp

Prace związane z obliczaniem płyt uźebrowanych przyjmują zwykle zastępczy model płyty o tzw. ortotropii konstrukcyjnej. Pierwszym który wprowadził ten model do obliczeń był M.T. HUBER [5a, 5b]. Uzyskane w jego pracach równania dawały przybliżone pojęcie o rzeczywistym rozkładzie naprężeń w płytach.

Próbe dokładniejszego ujęcia tych zagadnień podał K. TRENKS w pracy (8), wydzielając z płyty uźebrowanej powtarzający się element. Rozpatrując równowagę tego elementu uzyskał układ trzech równań różniczkowych z których wyznacza nieznane składowe przemieszczenia

*) Artykuł ten oraz następny - "Płyty o ortotropii konstrukcyjnej" przegląd literatury", stanowią fragmenty pracy dyplomowej, jaką autor wykonał w roku akad. 65/66 w Katedrze Mechaniki Wytrzymałości Materiałów pod kierunkiem P.Doc.dra inż. S. Borkowskiego, za co składa Mu w tym miejscu serdeczne podziękowanie.

powierzchni środkowej płyty. Jednakże tak M.T. HUBER jak i K. TRENKS aproksymowali w istocie zagadnienie nieciągłe modelem ośrodka ciągłego. W pracy przedstawionej tutaj odbiega się od tej zasady stosując dystrybucyjny opis nieciągłych rozkładów masy i wielkości wewnętrznych w płycie. Nieciągły rozkład tych ostatnich odbiegać może również od rzeczywistości. Istnieje jednakże szansa uzyskania dalszych, jeszcze bardziej zbliżonych do rzeczywistości wyników, przez zastąpienie opisujących stan naprężenia funkcji dyskretnego argumentu ciągami funkcyjnymi jak aproksymującymi (6), (por. również rys. 2).

1. Założenia

Niżej wyprowadzone równania ważne są dla przypadków zginania płyt uźebrowanych spełniających założenia i hipotezy ogólnie stosowane w teorii płyt cienkich. W szczególności zakładamy będziemy hipotezę elementu normalnego KIRCHOFFA, hipotezę przekrojów płaskich oraz zakładamy teorię liniową fizycznie i geometrycznie. Wyprowadzone równania są słuszne w układzie współrzędnych prostokątnych. Odnośnie płyt uźebrowanych założymy, że poszczególne włókna doznają odkształceń w kierunku linii współrzędnych x_j ($j = 1, 2$) od naprężeń σ_j . Założymy również, że ważne są ogólnie stosowane hipotezy elementarnej teorii zginania i skręcania prętów prostych. Wszystkie wielkości charakteryzujące sprężystość materiału nie są funkcjami zmiennych x_j ($j = 1, 2$). Jedynym obciążeniem przyjętym w pracy będzie obciążenie normalne do powierzchni płyty o natężeniu $q = q(x, y)$.

W pracy wprowadza się za E.S. GREBIENIEM [4] uogólnione wielkości wewnętrzne przy wykorzystaniu funkcji dyskretnego argumentu. Funkcje te będziemy utożsamiali z szeregiem dystrybucji DIRACA [6] wg następującej relacji:

$$\Phi(j, k) \equiv \sum_{(k)} \delta(x_j - x_j, k) \quad (1.1)$$

Wobec (1,1) stają się oczywiste następujące zależności:

$$\Phi(j, k) \equiv \begin{cases} \infty & \text{dla } x_j = x_j, k \\ 0 & \text{dla } x_j \neq x_j, k \end{cases} \quad (1.2)$$

Końcowe równania otrzymuje się w przemieszczeniach. Poszukiwanymi funkcjami, oprócz tradycyjnej powierzchni ugięcia $w = w(x, y)$ są również wartości przemieszczeń stycznych.

2. Strona fizyczna

Dla płyty wykonanej z materiału izotropowego prawo HOKE'A ma postać następującą:

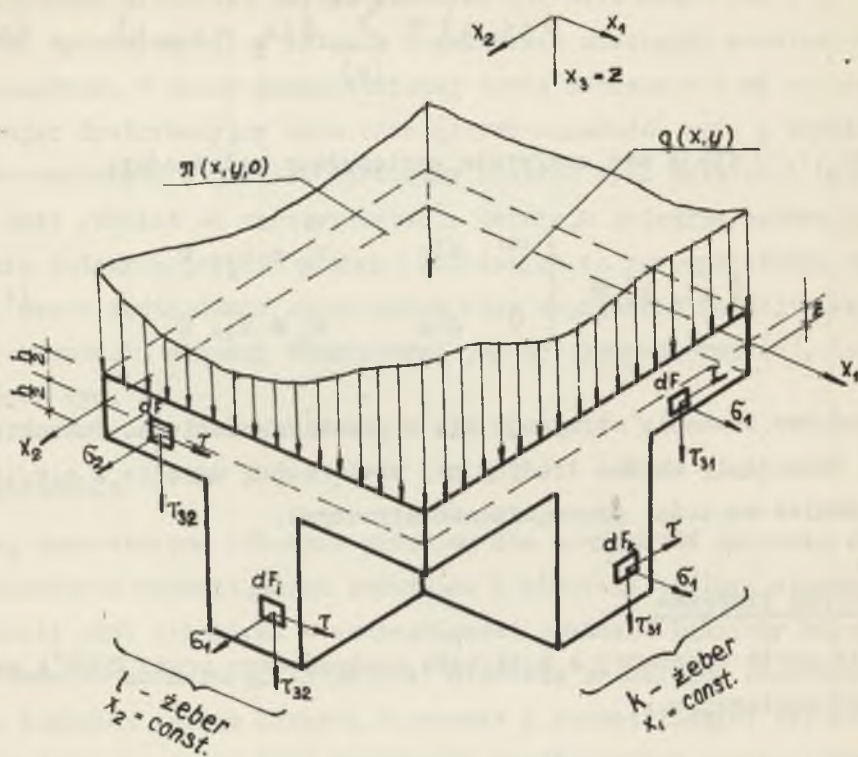
$$\sigma_j = \frac{E}{1 - \nu^2} (e_j - \nu e_{3-j}) \quad (2.1)$$

$$\tau = \tau_{12} = \tau_{21} = G \gamma_{12} = G \cdot \gamma$$

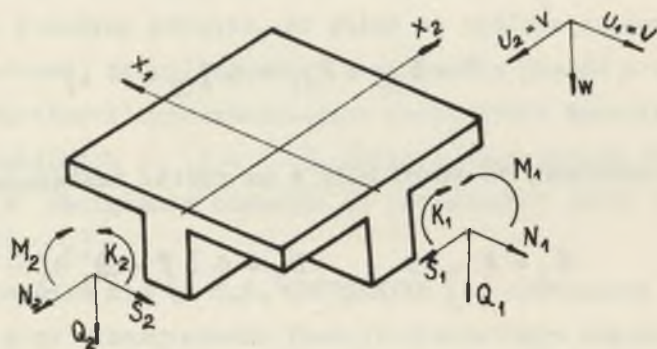
Dla żeber zakładamy, że prawo HOKE'A ma postać następującą:

$$\sigma_j = E \cdot e_j \quad \tau_j = G (\gamma - \partial_j U_{3-j} - j)^x \quad (2.2)$$

^{x)} Czynimy założenie, że w granicach szerokości żebra dla przekroju $x_j = \text{const}$ $\partial_j U_{3-j} = 0$. Z tego wynika, że w tym przedziale $\omega \approx \partial_{3-j} U_j \stackrel{\text{def}}{=} \omega_j$.



Rys. 1a



Rys. 1b

W równaniach powyższych (oraz w dalszej części) będziemy zakładali, że indeks j przebiega liczby 1, 2 i stosowali wynikający z tego zapis skrócony (por. np. (2) i (7h))

3. Strona statyczna

Wielkości wewnętrzne występujące w poszczególnych przekrojach zdefiniowano w sposób następujący. (4):

$$\begin{aligned}
 N_j &\stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_j dz + \Phi_{(3-j, i)} \int_{(F_i)} \sigma_j dF_i \\
 S_j &\stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau dz + \Phi_{(3-j, i)} \int_{(F_i)} \tau_j dF_i \\
 M_j &\stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_j z dz + \Phi_{(3-j, i)} \int_{(F_i)} \sigma_j z dF_i \\
 K_j &\stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau z dz + \Phi_{(3-j, i)} \int_{(F_i)} \tau_j z dF_i
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Siły poprzeczne mają charakter sił statycznych i obliczamy je tradycyjnie z warunków równowagi.

$$Q_j = \partial_j M_j + \partial_{3-j} K_{3-j} \tag{3.2}$$

Pozostałe równania równowagi, które będą służyły do wyprowadzenia podstawowych równań teorii płyt uźebrowanych mają znaną postać

$$\sum_{p=1}^2 \partial_p Q_p = -q, \quad \partial_j N_j + \partial_{3-j} S_{3-j} = 0 \quad (3.3)$$

Dodatnie zwroty występujących powyżej wielkości podano na rys. 1 b.

4. Strona geometryczna

Odształcenia wzdłużne elementu powierzchni $\mathcal{H}(x, y, z=0)$ płyty wyrażają się równaniami.

$$e_j = \varepsilon_j - z \mathcal{H}_j \quad (4.1)$$

gdzie

$$\mathcal{H}_j = \partial_j^2 w, \quad \varepsilon_j = \partial_j U_j$$

W powyższym równaniu \mathcal{H}_j przedstawia zmianę krzywizny linii x_j a ε_j - odkształcenie wzdłuż linii x_j .

Kąt odkształcenia postaciowego obliczymy z równania:

$$\gamma = \omega - 2z \mathcal{H}_{12} \quad (4.2)$$

gdzie

$$\mathcal{H}_{12} = \partial_{j'3-j} w, \quad \omega = \sum_{p=1}^2 \partial_{3-p} U_p$$

W powyższym równaniu γ przedstawia skręcenie powierzchni środkowej płyty, a ω kąt odkształcenia postaciowego powierzchni środkowej.

Przytoczone powyżej wzory określające odkształcenia powierzchni środkowej płyty podane są w pracach poświęconych teorii płyt i tarcz.

5. Równania końcowe

Podstawiając zależności określone w (2.1) i (2.2) do (3.1) otrzymujemy:

$$N_j = C (\epsilon_j + \nu \epsilon_{3-j}) - (D_{1,ji} \kappa_j - D_{0,ji} \epsilon_j) \cdot \Phi_{(3-j,i)}$$

$$S_j = \frac{1}{2} (1-\nu) C \omega + \frac{1}{2} (1+\nu)^{-1} (2 D_{1,ji}^0 \kappa_{j,3-j} - D_{0,ji} \omega_j) \Phi_{(3-j,i)} \quad (5.1)$$

$$M_j = -D (\kappa_j - \nu \kappa_{3-j}) - (D_{2,ji} \kappa_j - D_{1,ji} \epsilon_j) \Phi_{(3-j,i)}$$

$$K_j = -(1-\nu) D \kappa_{j,3-i} + \frac{1}{2} (1+\nu)^{-1} (2 D_{2,ji}^0 \kappa_{j,3-j} - D_{1,ji}^0 \epsilon_j) \Phi_{(3-j,i)}$$

gdzie

$$\omega_j = \partial_{3-j} U_j$$

W powyższych wzorach przyjęto oznaczenia

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$D_{0,ji} = E \int_{(F_i)} dF_i, \quad D_{1,ji} = E \int_{(F_i)} z dF_i, \quad D_{2,ji} = E \int_{(F_i)} z^2 dF_i \quad (5.2)$$

Podstawiając teraz (5.1) do (3.2) otrzymamy wyrażenia na siłę poprzeczną Q_j

$$\begin{aligned} Q_j = & -D (\partial_j^3 w - \nu \partial_{j,j,3-j} w) - (1-\nu)^{-1} D \partial_{j,3-j,3-j} w - \\ & - (D_{2,ji} \partial_j^3 w - D_{1,ji} \partial_j^2 U_j) \Phi_{(3-j,i)} - \\ & - \frac{1}{2} (1+\nu)^{-1} (2 D_{2,3-j,k} \partial_{j,3-j,3-j} w - D_{1,3-j,k} \partial_j \omega_{3-j}) \Phi_{(j,k)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Uwzględniając w równaniach (5.1) i (5.3) zależności (4.1) i (4.2) bierzemy wielkości wewnętrzne wyrażone przez funkcje U_j , U_{3-j} , w

$$N_j = c (\partial_j U_j + \nu \partial_{3-j} U_{3-j}) - (D_{1,ji} \partial_j^2 w - D_{0,ji} \partial_j U_j) \Phi_{(3-j,i)}$$

$$S_j = \frac{1}{2} (1-\nu) c \sum_{p=1}^2 \partial_{3-p} U_p - \frac{1}{2} (1+\nu)^{-1} (2 D_{1,ji}^0 \partial_j^2 w - D_{0,ji} \partial_j U_j)$$

$$\Phi_{(3-j,i)}$$

$$M_j = -D (\partial_j^2 w + \nu \partial_{3-j}^2 w) - (D_{2,ji} \partial_j^2 w - D_{1,ji} \partial_j U_j) \Phi_{(3-j,i)}$$

$$K_j = - (1-\nu) D \partial_{j,3-j} W - \frac{1}{2} (1+\nu)^{-1} (2 D_{2,ji}^0 \partial_{j,3-j} W - D_{1,ji}^0 \partial_{3-j} U_j) \Phi(3-j,i) \quad (5.4)$$

Równanie końcowe otrzymujemy po podstawieniu (5.4) i do (3.3). Wykonując szereg przekształceń otrzymujemy w efekcie postać końcową

$$[L_{ij}] \times [U_j] = [P_i] \quad (i, j = 1, 2) \quad (5.5)$$

gdzie

$$[L_{ij}] = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, [U_j] = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} U \\ V \\ W \end{vmatrix}, [P_i] = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{vmatrix}$$

Występujące w macierzy $[L_{ij}]$ operatory mają postać następującą:

$$L_{11} = [C + D_{0,ji} \Phi(3-j,i)] \partial_j^2 + \frac{1}{2} (1-\nu) C \partial_{3-j}^2$$

$$L_{22} = [C + D_{0,3-j,k} \Phi(j,k)] \partial_{3-j}^4 + \frac{1}{2} (1-\nu) C \partial_j^2$$

$$\begin{aligned}
 L_{33} = & \left[D + D_{2,ji} \Phi(3-j,i) \right] \partial_j^4 + \left[D + (1+\nu)^{-1} D_{2,3-j,k} \Phi(j,k) \right. \\
 & + (1+\nu)^{-1} D_{2,ji} \Phi(3-j,i) \left. \right] \partial_{j,j3-j,3-j} + \\
 & + \left[D + D_{2,3-j,k} \Phi(j,k) \right] \partial_{3-j}^4
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$L_{12} = \left[\frac{1}{2} (1+\nu) c + \frac{D}{2} (1+\nu)^{-1} D_{0,3-j,k} \Phi(j,k) \right] \partial_{3-j,j}$$

$$L_{21} = \left[\frac{1}{2} (1+\nu) c + \frac{1}{2} (1+\nu)^{-1} D_{0,ji} \Phi(3-j,i) \right] \partial_{3-j,j}$$

$$L_{13} = - D_{1,ji} \Phi(3-j,i) \partial_j^3 - (1+\nu)^{-1} D_{1,3-j,k} \Phi(j,k) \partial_{j,j,3-j}$$

$$L_{31} = - D_{1,ji} \Phi(3-j,i) \partial_j^3 - (1+\nu)^{-1} D_{1,j,i} \Phi(3-j,i) \partial_{j,3-j,3-j}$$

$$L_{23} = D_{1,3-j,k} \Phi(j,k) \partial_{3-j}^3 - (1+\nu)^{-1} D_{1,j,i} \Phi(3-j,i) \partial_{j,j,3-j}$$

$$L_{32} = D_{1,3-j,k} \Phi(j,k) \partial_{3-j}^3 - (1+\nu)^{-1} D_{1,3-j,k} \Phi(j,k) \partial_{j,j,3-j}$$

Równanie (5.5) przy tradycyjnym traktowaniu ortotropii przechodzi w znaną postać

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \tag{5.7}$$

gdzie

$$D_3 = D_1 \nu + 2B$$

Powyżej przyjęliśmy (równanie (5,7)), że $x_1 = x$, $x_2 = y$

Ponieważ w wyniku bardzo ogólnie potraktowanego zagadnienia otrzymaliśmy układy równań podobne jak w teorii powłok, to możemy tu mówić o pewnej analogii do teorii zgięciowej powłok.

Zatem formułowanie warunków brzegowych układu równań (5,5) przy operatorach (5,6) będzie takie jak w teorii powłok, a nie jak w teorii płyt.

Fakt, że otrzymujemy z zagadnienia o ortotropii konstrukcyjnej zagadnienie o izotropii materiałowej, musiał się odbić na skomplikowaniu układu równań rozwiązujących: i tak dla ortotropii konstrukcyjnej mieliśmy równanie biharmoniczne, a dla tego samego zagadnienia przy izotropii materiałowej mamy układ równań różniczkowych.

Wynika to z tego faktu, że płaszczyzna środkowa układu płyta - żebro nie pokrywa się z płaszczyzną środkową płyty powodując rozciąganie (ściskanie) tej ostatniej.

Z tego też powodu w tak potraktowanym zagadnieniu muszą się pojawić oprócz funkcji ugięć $W = W(x_1, y)$ również funkcje przemieszczeń $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Jest to zatem połączenie zagadnienia tarczowego i klasycznego płytowego.

- a) Osobnego omówienia wymagają użyte w równaniach (1,1), (3,1) (5,1) (5,3) (5,4) funkcje $\Phi(j, i)$.

Rozpatrując jednocielementowy zbiór argumentów "funkcji" (1,1) dochodzimy oczywiście do pojęcia S. Diraca. Takie uproszczenie będzie przydatne przy omówieniu zaburzenia wywołanego wpływem i tego żebra na rozkład wielkości wewnętrznych w płycie.

$$\int_{A_{ji}} \bar{\delta}(x_j - x_{j,i}) dx_j = 1 \quad (5.7)$$

gdzie: A_{ji} - przedział wpływu zaburzenia.

Funkcja $\bar{\delta}(x_j - x_{j,i})$ może przyjmować wartości pośrednie między dwoma granicznymi:

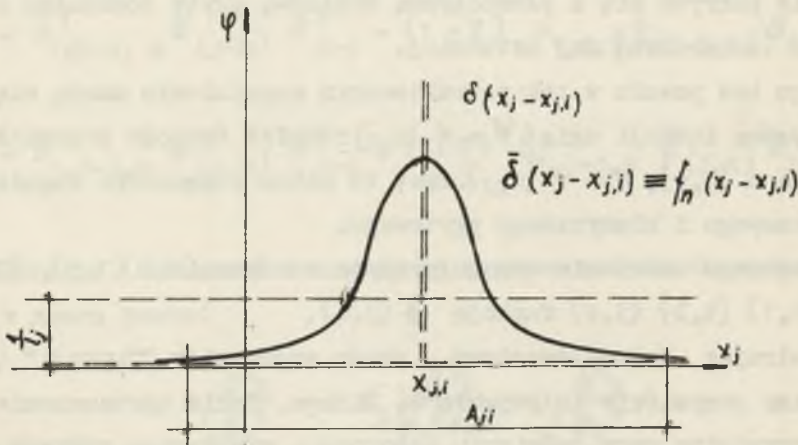
$$\bar{\delta}(x_j - x_{j,i}) \rightarrow \frac{1}{l_j} \quad (5.8)1$$

co zachodzi dla sztywności żebra stosunkowo małej w porównaniu do sztywności płyty oraz

$$\bar{\delta}(x_j - x_{j,i}) \rightarrow \delta(x_j - x_{j,i}) \quad (5.8) 2$$

gdzie $\delta(x_j - x_{j,i})$ - "funkcja" Diraca.

co ma miejsce dla sztywności żebra dużej w porównaniu do sztywności płyty.



Rys. 2

LITERATURA

- [1] Ambarcumian S.A.: Teorija anizotropenowych obołoczek - Moskwa 1961 r.
- [2] Borkowski S.: Zastosowanie metody sił zespolonych w teorii powłok ortotropowych. Rozpr.Inż. 2. 13 (1965), 355.
- [3] Gierkmann K.Dźwigary powierzchniowe (tł.) Warszawa "Arkady" 1957 r.
- [4] Grebjer E.S.: Osnownyje sootnoszenija techniczeskoj teorii rebristych obołoczek.Izw. A N SSSR Mech. 3/1965/124.
- [5] Huber T.M.: a) Teoria płyt prostokątne równo kierunkowych. Arch.Tow.Naukowego - Lwów 1921 r. b) Probleme der Statik technische Wichtiger orthotroper Platten. Akad.Nauk.Techn. Warszawa 1929 r.
- [6] Mikusiński J. Sikorski K.: Elementarna teoria dystrybucji. PWN Warszawa 1964 r.
- [7] Nowacki W.: a) Zagadnienia statyki i dynamiki płyt wzmocnionych żebrami. Arch.Mech.Stos. 4, 6 (1954) b) Teoria pełzania. Arkady - Warszawa 1963 r.
- [8] Trenks K.: Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotropen Rechteck - platten. Bauing. 29/1954/372.

ТЕОРИЯ РЕБРИСТЫХ-АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

Р е з ю м е

Главной целью работы является анализ линейного случая теории ребристых пластинок. Прерывное распределение внутренних сил аппроксимируется рядом обобщенных функции. Заключительный результат дан в вектор-слагаемых срединной плоскости пластинки, как система линейных операционных уравнений.

THEORY OF RE-INFORCED NON-ISOTROPIC SLABS

S u m m a r y

Analysis has been made of a physically, geometrically and statically linear case of re-inforced slabs. Non-continuous distribution of internal stresses approximates a distributive series.

The conclusion shows vectorially the displacement of the central part of the tested slabs.

The results are shown as a matrix of linear equations (the matrix of operation is symmetrical).