

LESZEK LITWINOWICZ

UPROSZCZENIE OBLICZANIA ZAGADNIEŃ RÓWNOWAGI GRANICZNEJ
GRUNTU NUMERYCZNĄ METODĄ APROKSYMACJI NIELINIOWEJ

Streszczenie. W pracy wyprowadzono rekurencyjne wzory do numerycznego całkowania równowagi granicznej gruntu w warunkach nieliniowej aproksymacji charakterystyk. Wprowadzone wzory charakteryzują się prostą budową ułatwiającą wykonywanie obliczeń.

1. Wstęp

W zagadnieniach równowagi granicznej gruntów obliczenia są z reguły bardzo pracochłonne nawet w przypadku zastosowania maszyn matematycznych, stąd wszelkie sposoby prowadzące do zmniejszenia pracochłonności tych obliczeń są celowe i bardzo pożądane. Poniżej w szerszym stopniu niż to zrobiono w pracy [3], zajmiemy się zastosowaniem numerycznej metody aproksymacji nieliniowej do rozwiązywania równań równowagi granicznej gruntu zapisanych w prostej postaci zaproponowanej przez W.W. SOKOŁOWSKIEGO [4]. Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie, dla wspomnianych równań, odpowiednich wzorów rekurencyjnych dostosowanych do praktycznego wykorzystania.

2. Wyjściowe równania równowagi granicznej gruntu

Równania różniczkowe stanu równowagi granicznej ośrodków gruntowych, jak wiadomo, posiadają następującą postać:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \varphi)^2 \sin^2 \varphi$$

gdzie

φ - kąt tarcia wewnętrznego gruntu,

k - współczynnik spójności gruntu,

X, Y - składowe sił objętościowych gruntu.

Poprzez odpowiednie transformacje, równania (1) można doprowadzić do postaci znacznie wygodniejszej. Prostą postać równania te przyjmują po wprowadzeniu nowych funkcji:

$$\begin{aligned} \xi &= \psi + \Theta, \\ \eta &= \psi - \Theta \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (3)$$

zaś Θ jest kątem jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią x .

Wielkość σ jest tu sprowadzonym naprężeniem normalnym i wyraża się następującą zależnością:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + k \operatorname{ctg} \varphi$$

Wielkość σ_0 w równaniu (3) jest dowolnym naprężeniem odniesienia. W wyniku omówionej transformacji równania równowagi granicznej gruntu (1) przyjmują postać:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \operatorname{tg} (\theta + \mu) = - \frac{X \sin (\theta - \mu) - Y \cos (\theta - \mu)}{2 \sigma \cos 2 \mu \cos (\theta + \mu)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \operatorname{tg} (\theta - \mu) = \frac{X \sin (\theta + \mu) - Y \cos (\theta + \mu)}{2 \sigma \cos 2 \mu \cos (\theta - \mu)} \quad (4)$$

przy czym
$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Równania (4) stanowią układ wystarczający do obliczenia wszystkich występujących w nich niewiadomych. Równania te można rozwiązywać dla warunków brzegowych podanych tylko w naprężeniach. W ten sposób otrzymuje się pola statycznie wyznaczalnych naprężeń.

Przy zastosowaniu metody charakterystyk [1] układ równań różniczkowych cząstkowych (4) można sprowadzić do równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\theta + \mu)$$

$$d\xi + \frac{X \sin (\theta - \mu) - Y \cos (\theta - \mu)}{2 \sigma \cos 2 \mu \cos (\theta + \mu)} dx = 0 \quad (5)$$

oraz

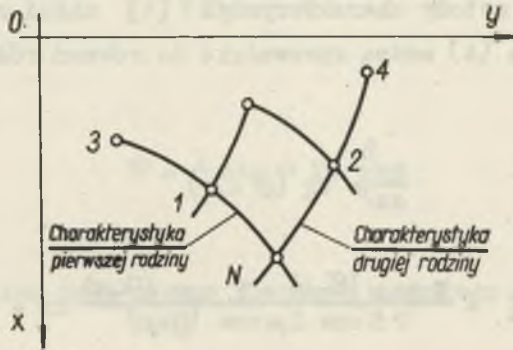
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\theta - \mu)$$

$$d\eta - \frac{X \sin (\theta + \mu) - Y \cos (\theta + \mu)}{2 \sigma \cos 2 \mu \cos (\theta - \mu)} dx = 0 \quad (5')$$

Równania (5) i (5') są równaniami charakterystyk i dla konkretnych warunków brzegowych w przestrzeni x, y, ξ, η opisują siatkę, która pokrywa powierzchnię całkową. Obraz tej siatki na płaszczyźnie x, y odtwarza przebieg linii poślizgu w gruncie. Rozwiązywanie równań równowagi granicznej gruntu jest więc równoznaczne z całkowaniem równań odpowiadających im charakterystyk. Szczególnie duże znaczenie praktyczne posiadają w tym przypadku obliczenia numeryczne. Równania (4) oraz odpowiadające im równania charakterystyk (5) i (5') przyjmujemy jako wyjściowe do dalszych rozważań.

3. Wzory rekurencyjne

W nawiązaniu do przyjętych równań wyjściowych rozpatrzmy teraz zagadnienie budowy siatki linii charakterystyk (linii poślizgu w gruncie) przy zastosowaniu aproksymacji parabolicznej kwadratowej [2], [3], w pierwszej kolejności rozwiążemy zagadnienie brzegowe typu CAUCHY'EGO [1].



Rys. 1. Fragment siatki linii poślizgu dla zagadnienia brzegowego CAUCHY'EGO

Założmy, że wzdłuż każdej z charakterystyk znane są dwa punkty węzłowe (rys. 1). Na charakterystyce pierwszej rodziny (5) są to punkty 1 i 3 na charakterystyce drugiej rodziny (5) są to punkty

2 i 4. W punktach 1, 2, 3 i 4 znane są współrzędne oraz wartości funkcji ξ i η . Poszukujemy rozwiązania dla węzła N tj. wielkości X_N, Y_N, ξ_N, η_N .

Węzeł N można łatwo obliczyć jako punkt przecięcia się parabol przechodzących odpowiednio przez punkty 1 i 3 oraz 2 i 4. W punktach 1 i 2 styczne do tych parabol muszą mieć kierunki zgodne z kierunkami charakterystyk (5) i (5').

3.1. Obliczanie współrzędnych X_N oraz Y_N dla zagadnienia brzegowego CAUCHY'EGO

Równania parabol o pionowej osi symetrii wychodzących z punktów 1 i 2 stycznie do odpowiednich kierunków charakterystyk mają następującą postać:

$$Y_N = Y_1 + (X_N - X_1) \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu) + A_1 (X_N - X_1)^2 \quad (6)$$

$$Y_N = Y_2 + (X_N - X_2) \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu) + A_2 (X_N - X_2)^2$$

Ponieważ znane są również punkty 3 i 4 postępując podobnie można otrzymać:

$$Y_3 = Y_1 + (X_3 - X_1) \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu) + A_1 (X_3 - X_1)^2 \quad (7)$$

$$Y_4 = Y_2 + (X_4 - X_2) \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu) + A_2 (X_4 - X_2)^2$$

Z zależności 7 otrzymujemy bezpośrednio nieznanne wielkości A_1 oraz A_2 :

$$A_1 = \frac{Y_3 - Y_1 - (X_3 - X_1) \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu)}{(X_3 - X_1)^2}$$

$$A_2 = \frac{Y_4 - Y_2 - (X_4 - X_2) \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu)}{(X_4 - X_2)^2} \quad (8)$$

Podstawiając (8) do (6) po wyeliminowaniu Y_N otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & [A_1 - A_2] X_N^2 + [\operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu) - \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu) - 2 (A_1 X_1 - A_2 X_2)] X_N + \\ & + [Y_1 - Y_2 - X_1 \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu) + X_2 \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu) + A_1 X_1^2 - A_2 X_2^2] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Jeden z pierwiastków rzeczywistych równania (9) jest poszukiwaną wartością X_N . Wartość Y_N oblicza się z zależności (6). Jako kryterium przyjmujemy warunek, że z pierwiastków rzeczywistych równania (9) poszukiwany pierwiastek określa położenie punktu najbliższego współrzędnym:

$$X_0 = \frac{Y_2 - Y_1 + X_1 \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu) - X_2 \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu)}{\operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu) - \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu)} \quad (10)$$

$$Y_0 = Y_1 + (X_0 - X_1) \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu)$$

Kryterium to można zapisać następująco:

$$\sqrt{(X_N^{(i)} - X_0)^2 + (Y_N^{(i)} - Y_0)^2} = \delta$$

gdzie indeks $i = 1, 2$ rozróżnia rzeczywiste pierwiastki równania (9) i odpowiadające im na podstawie (6) wartości Y_N . Poszukiwane współrzędne związane są z mniejszą wartością δ .

3.2. Obliczanie wartości ξ_N oraz η_N dla zagadnienia brzegowego CAUCHY'EGO

W ogólnym przypadku rozkład funkcji ξ i η wzdłuż odpowiednich charakterystyk jest nieliniowy. Fakt ten uwzględnimy wprowadzając zapis tych funkcji odpowiadający aproksymacji parabolicznej kwadratowej.

Ponieważ wzdłuż charakterystyk pierwszej rodziny funkcję ξ , zaś wzdłuż charakterystyk drugiej rodziny funkcję η , możemy traktować jako funkcje jednej zmiennej niezależnej x , stąd można (wzdłuż odpowiednich charakterystyk) funkcje te zapisać w postaci następujących wielomianów:

$$\xi_N = \xi_1 + (x_N - x_1) \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_1 + \frac{1}{2} (x_N - x_1)^2 \left. \frac{d^2\xi}{dx^2} \right|_1 \quad (11)$$

$$\eta_N = \eta_2 + (x_N - x_2) \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_2 + \frac{1}{2} (x_N - x_2)^2 \left. \frac{d^2\eta}{dx^2} \right|_2$$

Postępując podobnie w odniesieniu do punktów 3 i 4 można napisać:

$$\xi_3 = \xi_1 + \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_1 (x_3 - x_1) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\xi}{dx^2} \right|_1 (x_3 - x_1)^2 \quad (12)$$

$$\eta_4 = \eta_2 + \left. \frac{d\eta}{dx} \right|_2 (x_4 - x_2) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\eta}{dx^2} \right|_2 (x_4 - x_2)^2$$

Z równań (12) otrzymujemy:

$$\left. \frac{d^2\xi}{dx^2} \right|_1 = \frac{2}{(x_N - x_1)^2} \left[\xi_3 - \xi_1 - \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_1 (x_3 - x_1) \right]$$

oraz

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} \Big|_2 = \frac{2}{(x_N - x_2)^2} \left[\eta_4 - \eta_2 - \frac{d\eta}{dx} \Big|_2 (x_4 - x_2) \right] \quad (13)$$

Po podstawieniu (13) do (11) z jednoczesnym uwzględnieniem oznaczeń:

$$a_1 = \frac{(x_N - x_1)^2}{(x_3 - x_1)^2},$$

$$a_2 = \frac{(x_N - x_2)^2}{(x_4 - x_2)^2},$$

$$b_1 = (x_N - x_1) (1 - \sqrt{a_1}),$$

$$b_2 = (x_N - x_2) (1 - \sqrt{a_2}), \quad (14)$$

$$c_1 = - \frac{X \sin (\theta_1 - \mu) - Y \cos (\theta_1 - \mu)}{2 \sigma_1 \cos 2 \mu \cos (\theta_1 + \mu)},$$

$$c_2 = \frac{X \sin (\theta_2 + \mu) - Y \cos (\theta_2 + \mu)}{2 \sigma_2 \cos 2 \mu \cos (\theta_2 - \mu)}$$

poszukiwane wzory rekurencyjne otrzymano ostatecznie w następującej postaci:

$$\xi_N = \xi_1 + (\xi_3 - \xi_1) a_1 + c_1 b_1 \quad (15)$$

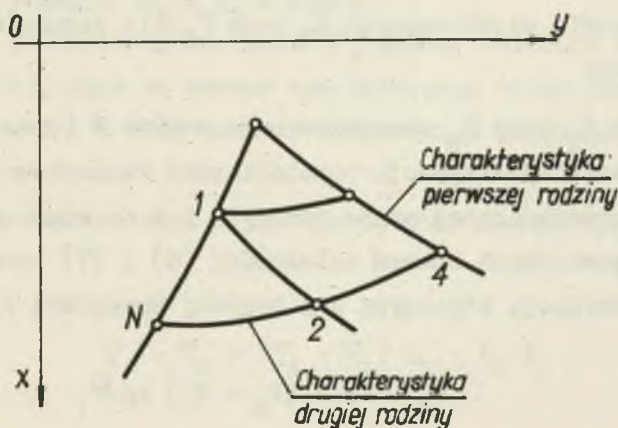
$$\eta_N = \eta_2 + (\eta_4 - \eta_2) a_2 + c_2 b_2 \quad (15)$$

W oparciu o znajomość ξ_N oraz η_N potrzebne w dalszych obliczeniach wielkości σ_N i θ_N obliczamy w zależności wynikających bezpośrednio ze związków (2) i (3):

$$\sigma_N = \exp(\xi_N + \eta_N) \operatorname{ctg} 2\mu$$

$$\theta_N = \frac{1}{2} (\xi_N - \eta_N)$$

Przedstawiane dotychczas rozważania dotyczyły zagadnienia brzegowego typu CAUCHY'EGO. Aby dyskutowane rozwiązania można było w pełni wykorzystywać do obliczeń konkretnych zagadnień równowagi granicznej gruntów należy jeszcze rozpatrzyć rozwiązanie zagadnienia brzegowego typu mieszanego (rys. 2).



Rys. 2. Fragment siatki linii poślizgu dla zagadnienia brzegowego mieszane

Załóżmy więc, że poszukiwany węzeł N siatki linii charakterystyk jest miejscem przecięcia się znanej charakterystyki drugiej rodziny przechodzącej przez znane punkty 2 i 4^{*}) z pewną krzywą nie będącą charakterystyką na której znany jest (co najmniej) węzeł 1. Przyjmujemy, że równanie tej krzywej jest znane i posiada następującą postać:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Theta. \quad (16)$$

Przyjmujemy ponadto, że wzdłuż omawianej krzywej wartość funkcji δ jest znana (równie dobrze można przyjąć znajomość funkcji Θ). Jak wiadomo, sformułowane zagadnienie jest zagadnieniem brzegowym typu mieszanego a jego rozwiązanie polega na poszukiwaniu wielkości X_N , Y_N , ξ_N oraz η_N w punkcie N (rys. 2), [1].

3.3. Obliczanie współrzędnych X_N oraz Y_N dla zagadnienia przegowego mieszanego

Współrzędne X_N oraz Y_N rozpatrywanego punktu N (rys. 2) obliczymy przy założeniu aproksymacji parabolicznej kwadratowej dla charakterystyki przechodzącej przez punkty 2 i 4 co wiąże się z wykorzystaniem odpowiednich równań zależności (6) i (7) oraz przy założeniu aproksymacji stycznymi dla krzywej brzegowej tj. przyjęciu:

$$Y_N = Y_1 + (X_N - X_1) \operatorname{tg} \Theta_1 \quad (17)$$

^{*}) Przy przyjęciu, że jest to charakterystyka pierwszej rodziny tok postępowania nie ulega zmianie.

Stąd po prostych przekształceniach otrzymano:

$$\begin{aligned} A_2 X_N^2 + \left[\operatorname{tg}(\Theta_2 - \mu) - \operatorname{tg} \Theta_1 + 2 A_2 X_2 \right] X_N + \left[Y_2 - Y_1 + \right. \\ \left. + X_1 \operatorname{tg} \Theta_1 - X_2 \operatorname{tg}(\Theta_2 - \mu) - A_2 X_2^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Równania (17) i (18) są poszukiwanymi wzorami rekurencyjnymi. Kryterium wyboru pierwiastka dla równania (18) otrzymuje się bezpośrednio z zależności (10) po podstawieniu w miejsce $\operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu)$ wielkości $\operatorname{tg} \Theta_1$.

3.4. Obliczenie wartości ξ_N oraz η_N dla zagadnienia brzegowego mieszanego

Obliczenie wielkości ξ_N oraz η_N wykonamy przy założeniu, że wzdłuż krzywej brzegowej przechodzącej przez punkty 1 i N, znana jest wartość funkcji $\sigma_N = \sigma_1 = \text{const.}$

Zauważmy, że poszukiwaną wielkość η_N możemy obliczyć bezpośrednio z równania (15), gdyż we wzorze tym występują tylko znane parametry punktów 2 i 4 oraz znane z poprzednich obliczeń wielkości Y_N i X_N .

Dla lepszej przejrzystości wyprowadzeń, wzór ten przepisujemy ponownie:

$$\eta_N = \eta_2 + (\eta_4 - \eta_2) a_2 + c_2 b_2 \quad (19)$$

W oparciu o znajomość η_N , obliczenie wielkości ξ_N polega na wykorzystaniu związków (2). Stąd otrzymujemy:

$$\xi_N = 2\psi - \eta_N \quad (20)$$

Ponieważ znana jest wielkość σ_N wzór (20) przyjmuje postać:

$$\xi_N = \operatorname{ctg} \varphi \ln \frac{\sigma_N}{\sigma_0} - \eta_N \quad (21)$$

gdzie σ_0 jest dowolnym naprężeniem odniesienia.

Otrzymane powyżej wzory rekurencyjne (9), (15), (18), (19) i (21) są proste i wygodne w zastosowaniu. Na podstawie podanych w pracy [3] obliczeń sprawdzających numeryczną metodę aproksymacji nieliniowej (wykonanych na maszynie cyfrowej typu "Odra 1003") można twierdzić, że przedstawione powyżej wzory również prowadzą do znacznego ograniczenia pracochłonności obliczeń i zwiększenia ich dokładności. Szczególną ich zaletą jest to, że są one prostsze od wzorów podanych w pracy [3].

LITERATURA

- [1] БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. - Методы вычислений, т. 2, 1962.
- [2] LITWINOWICZ L. - W sprawie numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodka gruntowego. Zesz.Nauk.Pol.Śl., 125, 1964.
- [3] LITWINOWICZ L. - Rozwiązywanie zagadnień równowagi granicznej gruntów numeryczną metodą aproksymacji nieliniowej (praca doktorska).
- [4] SOKOŁOWSKI W.W. - Statyka ośrodków sypkich, Warszawa 1958 (tłum. z ros.)

УПРОЩЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ
ГРУНТОВ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено вопрос упрощения рекуррентных формул получае-
мых при численном решении задач предельного равновесия
грунтов методом нелинейной аппроксимации.

SIMPLIFICATION CALCULATION OF LIMIT EQUILIBRUM
OF PROBLEMS OF SOILS BY NUMERICAL METHOD
OF NONLINE APPROXIMATE

S u m m a r y

In this article represented new convenient models for numerical
solution of limit equilibrium problems of soil.