ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: BUDOWNICTWO z. 25 Nr kol. 264

Józef Głąbik

OKREŚLENIE KRYTYCZNYCH OBCIĄŻEŃ KOPUŁ SIATKOWYCH ZA POMOCĄ RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH

Kopuły siatkowe lub ogólniej przekrycia siatkowe charakteryzują się regularnością przebiegu prętów. Węzły siatki leżą na pewnej powierzchni, którą w dalszym ciągu określa się powierzchnią węzłów. W stosowanych w praktyce przekryciach siatkowych kąt nachylenia pręta siatki do płaszczyzny stycznej do powierzchni węzłów w jednym z jego końców jest mały i na ogół nie przekracza 5°. Tę właściwość przekryć siatkowych możemy wykorzystać przy ustawianiu równań równowagi sił w węzłach względem zmiennego układu współrzędnych umiejscowionego w danym węźle, którego jedna oś jest normalna do powierzchni węzłów. Możemy wtedy w równaniach równowagi pominąć pewne wyrażenia jako małe w stosunku do jedności.

Zasadniczym obciążeniem przekryć siatkowych jest obciążenie normalne do powierzchni węzłów. Zakłada się, że przy tym obciążeniu przesunięcia węzłów normalne do powierzchni węzłów są znacznie większe od przesunięć stycznych. Pozwala to na pominięcie w nieliniowych równaniach równowagi składników nieliniowych zawierających przesunięcia styczne. Ograniczając dalszą analizę do jednowarstwowych przekryć siatkowych o przegubowo połączonych prętach, nieliniowe równania przemieszczeniowe, w zmiennym układzie współrzędnych węzła "i" przyjmą postać:

$$\sum_{j=1}^{6} T_{ij} S_{ij} + P_i = 0, \tag{1}$$

gdzie:

$$S_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}}\Big[(u_i - u_j)\cos\Theta_{ij} - (v_i - v_j)\sin\Theta_{ij} + \frac{l_{ij}}{2}\left(\frac{w_i}{R_{ij}} + \frac{w_i}{R_{ji}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2l_{ij}}(w_i - w_j)^2 + \frac{1}{l_{ij}}(w_i - w_j)\cdot(w_{ip} - w_{jp})\Big],$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos_{ij} \\ \sin_{ij} \\ -\frac{l_{ij}}{2R_{ij}} - \frac{1}{l_{ij}}(w_{ip} - w_{jp}) - \frac{1}{l_{ij}}(w_i - w_j) \end{bmatrix} \qquad P_i = \begin{bmatrix} P_{i\xi} \\ P_{i\eta} \\ P_{i\zeta} \end{bmatrix},$$

w których

Θ – kąt nachylenia rzutu osi pręta na płaszczyznę $\xi\eta$, do osi ξ,

l – długość pręta,

u, v, w – przesunięcia węzła równoległe odpowiednio do osi ξ, η i ζ,

w_p – przesunięcia początkowe węzła w kierunku osi ζ

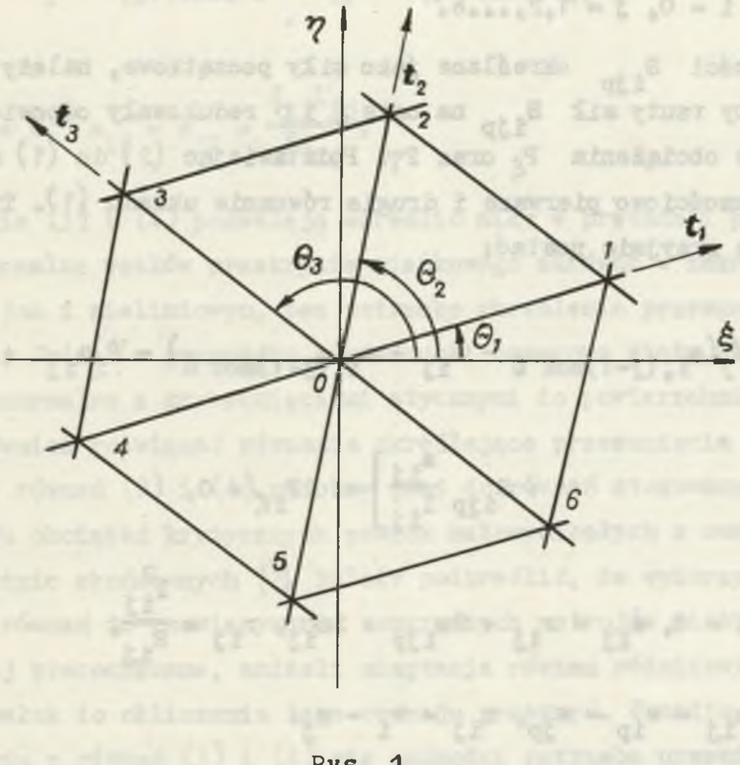
AE/l – sztywność pręta,

P_ξ, P_η, P_ζ – składowe obciążenia, równoległe odpowiednio do osi ξ, η i ζ,

R – promień kuli przechodzącej przez końce pręta, stycznej do płaszczyzny $\xi\eta$ w danym węźle,

i, j – odpowiednio początek i koniec pręta.

Wprowadzając w układzie równań dla całej siatki, otrzymanym z równań postaci (1), jako zmienny parametr obciążenie [1], możemy wyznaczyć wartości przesunięć w zależności od przyjmowanych wartości tego parametru. Obciążeniem krytycznym określa się tę wartość parametru, której odpowiada nieskończenie duży przyrost przemieszczeń. Jako parametr w równaniach (1) możemy również przyjąć przesunięcie jednego z węzłów.



Rys. 1

Wybierając z siatki prętów jeden węzeł z dwunastoma prętami znajdującymi się w jego otoczeniu (rys. 1) możemy biorąc pod uwagę regularność przebiegu prętów przyjąć, że dla tego węzła rzuty na płaszczyznę $\xi\eta$ osi odpowiednich prętów są w przybliżeniu równoległe do kierunków t_1, t_2 lub t_3. Wykorzystując powyższe założenia wprowadzono funkcję ψ, której wartości określa się w węzłach siatki, zmniejszając trzykrotnie liczbę niewiadomych w rozpatrywanych równaniach równowagi. Siły w prętach siatki można wyznaczyć obliczając odpowiednie różnice wartości tej funkcji, a mianowicie:

$$S_{ij} = S_{ijp} + l_{ij}(\psi_{(j+1)\bmod 6} + \psi_{(j-1)\bmod 6} - \psi_j - \psi_i), \qquad (2)$$

gdzie: $i = 0$, $j = 1,2,\ldots 6$.

Wartości S_{ijp} określane jako siły początkowe, należy tak dobrać, aby rzuty sił S_{ijp} na osie ξ i η redukowały odpowiednio składowe obciążenia P_ξ oraz P_η. Podstawiając (2) do (1) spełniamy tożsamościowo pierwsze i drugie równanie układu (1). Trzecie równanie przyjmie postać:

$$\sum_{j=1}^{6}\left[\psi_j(a_{i,(j-1)\bmod 6} - a_{ij} + a_{i,(j+1)\bmod 6}) - \psi_i a_{ij} + \right.$$

$$\left. + S_{ijp}\frac{a_{ij}}{l_{ij}}\right] - 2P_{i\zeta} = 0, \qquad (3)$$

gdzie: $i = 0$, $a_{ij} = r_{ij} + 2m_{ijp} + 2m_{ij}$, $r_{ij} = \dfrac{l_{ij}^2}{R_{ij}}$,

$$m_{ij} = w_{ip} - w_{jp}, \; m_{ij} = w_i - w_j.$$

Odejmując od sumy odpowiednio przekształconych wzorów na siłę S_{ij} z równania (1) dla sześciu prętów otaczających węzłe "0", sumę takich wyrażeń dla sześciu prętów dochodzących do węzła "0" (rys. 1) możemy otrzymać następujące równanie różnicowe:

$$\sum_{j=1}^{6} w_j \left(r_{(j-1)\,\mathrm{mod}\,6,j} + r_{j,(j+1)\mathrm{mod}\,6} - r_{ij}\right) - w_i \sum_{j=1}^{6} r_{ij} -$$

$$- 2\sum_{j=1}^{6} \Big[e_{j,(j+1)\mathrm{mod}\,6} - e_{ij} + \frac{1}{2}\left(w_i - w_j\right)^2 +$$

$$+ \left(w_i - w_j\right).\left(w_{ip} - w_{jp}\right) - \frac{1}{2}\left(w_j - w_{(j+1)\mathrm{mod}\,6}\right)^2 -$$

$$- \left(w_j - w_{(j+1)\mathrm{mod}\,6}\right).\left(w_{jp} - w_{(j+1)\mathrm{mod}\,6,p}\right)\Big] = 0, \qquad (4)$$

gdzie: $i = 0$, $e_{ij} = e_{ji} = \dfrac{S_{ij} l_{ij}^2}{EA_{ij}}$.

Równania (3) i (4) pozwalają określić siły w prętach i przesunięcia normalne węzłów przekrycia siatkowego zarówno w zakresie liniowym jak i nieliniowym, bez potrzeby określenia przesunięć stycznych. Jednak w przypadku gdy warunki brzegowe wiążą nam przesunięcia normalne z przesunięciami stycznymi do powierzchni węzłów, musimy również rozwiązać równania określające przesunięcia styczne. Układ równań (3) i (4) podobny jest do równań stosowanych przy określaniu obciążeń krytycznych powłok małowyniosłych z zastosowaniem różnic skończonych [2]. Należy podkreślić, że wykorzystanie podanych równań do rozwiązywania konkretnych ustrojów siatkowych jest mniej pracochłonne, aniżeli adaptacja równań różnicowych teorii powłok do obliczenia tego rodzaju przekryć. Ponadto przy korzystaniu z równań (3) i (4) nie zachodzi potrzeba uzasadniania możliwości zastosowania teorii powłok, a szczególnie teorii powłok małowyniosłych, do obliczenia przekryć siatkowych.

LITERATURA

[1] Tezcan S.S., Ovunc B. - An iteration method for the non-linear buckling of framed structures. Space structures. Blackwell Scientific Publications. Oxford 1967.

[2] Volmir A.S. - Ustojčivost' deformiruemych sistem. Str. 759-764. Nauka. Moskva 1967.