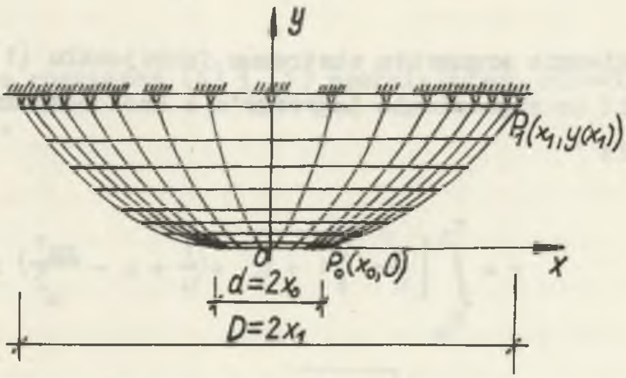
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969
Seria: BUDOWNICTWO z. 25 Nr kol. 264

Stanisław Kempny

POSZUKIWANIE OPTYMALNEGO KSZTAŁTU OSIOWO SYMETRYCZNEGO USTROJU WISZĄCEGO RÓWNOMIERNIE POWIERZCHNIOWO OBCIĄŻONEGO

Na szczególnym modelu osiowo symetrycznego ustroju siatkowego (o nieskończonej liczbie elementów południkowych i równoleżnikowych) (rys. 1), poddanego działaniu obciążenia równomiernie roz-



Rys. 1

łożonego po jego powierzchni, poszukuje się takiego kształtu wspomnianego ustroju, przy którym dla określonej wytrzymałości, spełniony jest warunek minimum materiału elementów nośnych. Zagadnienie to, sprowadza się do poszukiwania argumentu ekstremum funkcjonału:

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{1}{y'} + y'\right) z + \left| \frac{x^2}{y'} \sqrt{1+y'^2} - \frac{xy''}{y'^2} z \right| \right] dx \tag{1}$$

gdzie argument $y = y(x)$ wyznacza poszukiwany optymalny kształt południka, zaś

$$z = \int_{x_o}^{x} x\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Krzywe dopuszczalne $y(x)$ zakłada się klasy $C_r (r \geqslant 1)$ o jednym punkcie stałym, gdyż dla $x = x_o$ ma być $y(x_o) = 0$ i drugim przesuwającym się wzdłuż prostej $x = x_1$.

Dla szczególnej klasy krzywych dopuszczalnych tzn. takich, że dla każdej z tych krzywych jest:

$$\frac{x^2}{y'}\sqrt{1 + y'^2} - \frac{x_* y''}{y'^2} z > 0 \tag{2}$$

Poszukiwanie argumentu ekstremum funkcjonału (1) można wówczas sprowadzić do zagadnienia Lagrange'a z aholonomicznymi warunkami ubocznymi:

$$v = \int_{x_o}^{x_1} \left[\frac{x^2}{u} \sqrt{1 + u^2} + \left(\frac{1}{u} + u - \frac{xu'}{u^2}\right) z \right] dx \tag{3}$$

$$z' - x\sqrt{1 + u^2} = 0 \quad \text{oraz} \quad y' - u = 0$$

Układ równań Eulera - Lagrange'a prowadzi dla funkcjonału (3) do następującego równania różniczkowego krzywej stacjonarnej:

$$x(y + c_1)\, y'' + \left[(y + c_1)\, y' - x\right](1 + y'^2) = 0 \tag{4}$$

Jeśli zaś wyrażenie po lewej stronie nierówności (2) rozpatrujemy jako ujemne, wówczas:

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{1}{u} + u + \frac{xu'}{u^2}\right) z - \frac{x^2}{u} \sqrt{1+u^2} \right] dx \tag{5}$$

z warunkami $z' - x\sqrt{1+u^2} = 0$ oraz $y' - u = 0$.

Układ równań Eulera - Lagrange'a prowadzi w tym przypadku, do równania różniczkowo-całkowego krzywej stacjonarnej:

$$\left(1 - \frac{2}{y'^2}\right) z - \left(y + D_1 + 2\int \frac{dx}{y'}\right) \frac{x \cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}} - D_2 = 0. \tag{6}$$

Obecnie szuka się rozwiązań (4) i (5) spełniających odpowiednie warunki brzegowe.