

Jerzy Frenkiel

PRÓBA ZASTOSOWANIA METODY POMIARÓW LINIOWYCH
DC OKREŚLANIA PRZEMIESZCZEN

1. Wstęp

Rozwój elektroniki stał się między innymi powodem określonych zmian w technologii wykonywania pomiarów geodezyjnych. Geodeta został wyposażony w nowy rodzaj instrumentu o korzystnych parametrach dokładnościowych - dalmierz elektrooptyczny.

Dalmierze tego typu znalazły do tej pory zastosowanie w najbardziej uciążliwej części prac geodety, jaką stanowią dokładne pomiary liniowe.

Pierwsze wzmianki w literaturze technicznej na temat zastosowania dalmierzy dotyczyły pomiarów baz w triangulacji i pomiarów boków w poligonizacji. Ostatnie wzmianki dotyczą zastosowania dalmierza Mekometr III, charakteryzującego się obecnie najwyższą dokładnością (błąd standardowy $\pm (0,1 - 2,0 \text{ mm})$), do prac realizacyjnych.

Wspomniany dalmierz nie jest jeszcze seryjnie produkowany i w najbliższych latach nie można spodziewać się jego sprowadzenia do kraju. Dostępne w naszych warunkach dalmierze EOS f-my Zeiss (błąd standardowy $\pm (5 + 2 \cdot 10^{-6} L) \text{ mm}$) oraz Distomat DJ 10 f-my Wild i EOK 2000 f-my Zeiss (błąd standardowy $\pm 10 \text{ mm}$) skłoniły autora do przeprowadzenia analizy możliwości zastosowania metody wcięcia liniowego do pomiaru przemieszczeń budowli.

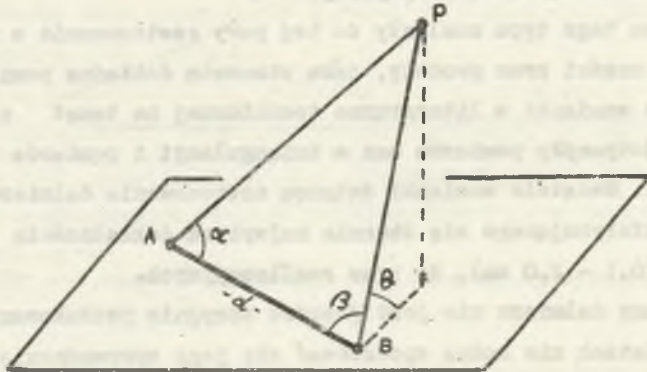
2. Metody wyznaczania przemieszczeń bezwzględnych

Równoczesnego wyznaczenia składowych X, Y, Z przemieszczeń punktów budowli, można dokonać:

2.1. Metodą trygonometrycznego pomiaru różnic wysokości wraz z pomiarem kątów nawiazania, przy czym odległość niezredukowaną można mierzyć dalmierzem elektrooptycznym (rys. 1).

Składowe przemieszczeń wyznacza się korzystając ze wzorów:

$$\begin{aligned}\Delta X_{12} &= r_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \cos \varphi_2 - r_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \varphi_1 \\ \Delta Y_{12} &= r_2 \cdot \cos \theta_2 \cdot \sin \varphi_2 - r_1 \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \varphi_1 \\ \Delta Z_{12} &= r_2 \cdot \sin \theta_2 - r_1 \cdot \sin \theta_1.\end{aligned}\quad (1)$$



Rys. 1

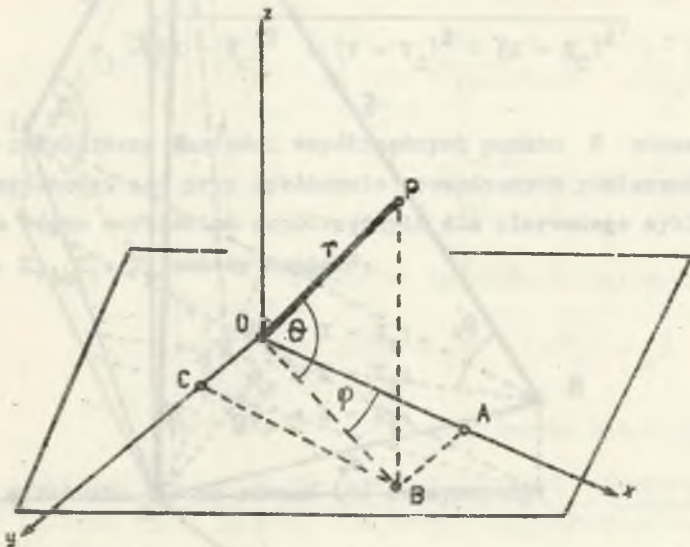
2.2. Metodą katowego przestrzennego wcięcia w przód lub wstecz (Rys.2)

Składowe przemieszczeń X i Y przy wcięciu w przód wyznacza się za pomocą wzorów:

$$\Delta X_{12} = d \left[\frac{\sin \theta_2 \cos(\alpha_{AB} - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 + \theta_2)} - \frac{\sin \theta_1 \cos(\alpha_{AB} - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \theta_1)} \right]$$

$$\Delta Y_{12} = d \left[\frac{\sin \theta_2 \sin(\alpha_{AB} - \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 + \theta_2)} - \frac{\sin \theta_1 \sin(\alpha_{AB} - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \theta_1)} \right]$$

ΔZ_{12} = jak we wzorach (1)

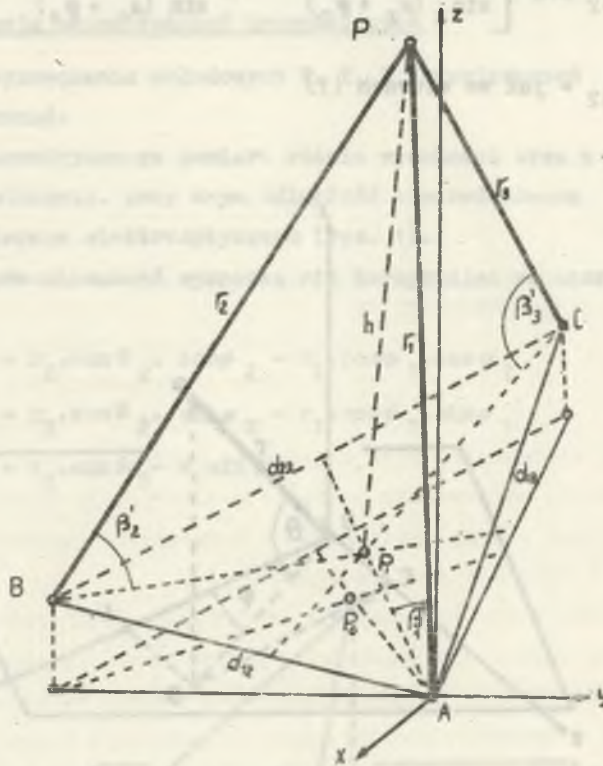


Rys. 2

2.3. Metodą liniowego wcięcia przestrzennego w przód lub wstecz (rys.3)
(1).

Sposób wyznaczania składowych przemieszczeń przy wcięciu wprzód - oraz odpowiednie wzory zostaną podane w pktcie 3 niniejszego opracowania.

Metody te różnią się zarówno technologią wykonania pomiaru jak i dokładnością otrzymanych rezultatów.



Rys. 3

3. Koncepcja metody wcięcia liniowego

Rozpatrzmy najprostszy przypadek wcięcia liniowego przestrzennego punktu $P(XYZ)$ z punktów $A(X_A, Y_A, Z_A)$, $B(X_B, Y_B, Z_B)$, $C(X_C, Y_C, Z_C)$, tworzących ośnowę pomiarową w postaci trójkąta (rys. 3).

Z punktów A, B, C będących stanowiskami dalmierza mierzymy odległości $r_1 = AP$, $r_2 = BP$, $r_3 = CP$. Zagadnienie wyznaczenia współrzędnych X, Y, Z punktu P, czy też wyznaczenia przyrostów współrzędnych $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, zrealizujemy w sposób podany w (1), wychodząc z założenia, że jeżeli współrzędne określonego punktu są znane, to pomierzone odległości r_1, r_2 i r_3 można wyrazić wzorami:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{(X - X_A)^2 + (Y - Y_A)^2 + (Z - Z_A)^2} \\
 r_2 &= \sqrt{(X - X_B)^2 + (Y - Y_B)^2 + (Z - Z_B)^2} \\
 r_3 &= \sqrt{(X - X_C)^2 + (Y - Y_C)^2 + (Z - Z_C)^2}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Przyjmując przybliżone wartości współrzędnych punktu P równe X_0, Y_0, Z_0 , w szczególności zaś przy cyklicznie prowadzonych pomiarach przeszczeń jako równe wartościom współrzędnych dla pierwszego cyklu obserwacji, tzn. X_1, Y_1, Z_1 możemy napisać:

$$\begin{aligned}
 \delta_x &= X - X_1; \\
 \delta_y &= Y - Y_1; \\
 \delta_z &= Z - Z_1.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Wstawiając wyrażenia (4) do równań (3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 r_1^2 &= r_1'^2 + 2(X_1 - X_A)\delta_x + 2(Y_1 - Y_A)\delta_y + 2(Z_1 - Z_A)\delta_z + \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 \\
 r_2^2 &= r_2'^2 + 2(X_1 - X_B)\delta_x + 2(Y_1 - Y_B)\delta_y + 2(Z_1 - Z_B)\delta_z + \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2 \\
 r_3^2 &= r_3'^2 + 2(X_1 - X_C)\delta_x + 2(Y_1 - Y_C)\delta_y + 2(Z_1 - Z_C)\delta_z + \delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2,
 \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie: r_i' jest obliczoną, przybliżoną odległością od stanowiska dalmie-rza do punktu badanego. Po rozłożeniu każdego z tych równań w szereg Taylora i ograniczeniu się do wyrazów zawierających tylko pierwsze po-tęgi przyrostów otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 a_1 \delta_x + b_1 \delta_y + c_1 \delta_z + l_1 &= 0 \\
 a_2 \delta_x + b_2 \delta_y + c_2 \delta_z + l_2 &= 0 \\
 a_3 \delta_x + b_3 \delta_y + c_3 \delta_z + l_3 &= 0
 \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{X_1 - X_A}{r_1^2}, & b_1 &= \frac{Y_1 - Y_A}{r_1^2}, & c_1 &= \frac{Z_1 - Z_A}{r_1^2}, & l_1 &= r_1^y - r_1^x, \\ a_2 &= \frac{X_1 - X_B}{r_2^2}, & b_2 &= \frac{Y_1 - Y_B}{r_2^2}, & c_2 &= \frac{Z_1 - Z_B}{r_2^2}, & l_2 &= r_2^y - r_2^x, \\ a_3 &= \frac{X_1 - X_C}{r_3^2}, & b_3 &= \frac{Y_1 - Y_C}{r_3^2}, & c_3 &= \frac{Z_1 - Z_C}{r_3^2}, & l_3 &= r_3^y - r_3^x. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wartości przyrostów obliczymy ze wzorów:

$$\delta_x = \frac{D_x}{D}, \quad \delta_y = \frac{D_y}{D}, \quad \delta_z = \frac{D_z}{D} \quad (6a)$$

rozwiązując układ równań (6).

Omówiony przypadek jest najprostszym, w którym nie występują elementy nadliczbowe umożliwiające wyrównanie wyników. Jeśli zostaną pomierzone więcej niż trzy odległości do punktu P, wówczas zagadnienie można rozwiązać metodą spostrzeżeń pośrednich.

Równania (6) będą miały w takim przypadku postać:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \delta_x + b_1 \delta_y + c_1 \delta_z + l_1 &= v_1 \\ a_2 \delta_x + b_2 \delta_y + c_2 \delta_z + l_2 &= v_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_i \delta_x + b_i \delta_y + c_i \delta_z + l_i &= v_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Rozwiązując ten układ równań poprawek, przy założeniu warunków, że $\sum v_i^2$ - minimum, otrzymuje się najbardziej prawdopodobne wartości przyrostów współrzędnych, co pozwala obliczyć poprawki v_i i dokonać oceny dokładności.

4. Analiza dokładności

W wyniku przeprowadzonej analizy dokładnościowej wymienionych w punkcie (2) metod, przy założeniu, że:
błędy pomiarów wynoszą:

$$m_r = \pm 10 \text{ mm}$$

$$m_\varphi = m_\theta = m_\alpha = m_\beta = \pm 1'',$$

a wartości współrzędnych stanowisk obserwacyjnych A, B i C badanego punktu P są równe

P(780, 820, 370)

A(70, 100, 260)

B(500, 1790, 270)

C(1740, 570, 310),

otrzymano średnie błędy położenia punktu dla jednokrotnego pomiaru zestawione w tabelicy 1.

Tablica 1

| Metoda pomiaru | Wartości błędów średnich mm | | | | Ilość mierzonych elementów | |
|---|-----------------------------|----------|----------|----------|----------------------------|------|
| | m_x | m_y | m_z | m_p | boki | kąty |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Trygonometryczną z pomiarem kąta nawiazania | ± 10 | ± 13 | ± 7 | ± 18 | 1 | 2 |
| Przestrzenne wcinanie w przód | ± 16 | ± 18 | ± 7 | ± 25 | 1 | 3 |
| Liniowe wcięcie przestrzenne | ± 11 | ± 11 | ± 97 | ± 98 | 3 | |

Otrzymane wyniki wskazują, że metoda liniowego wcięcia przestrzennego daje stosunkowo duży błąd średni określenia współrzędnej Z. Niedostatek ten proponuje się wyeliminować, określając współrzędną Z metodą trygonometrycznego pomiaru. Przy takiej metodzie pomiaru średni błąd położenia punktu badanego wyniesie

$$M_p = \pm 17 \text{ mm.}$$

Wskazuje to na możliwość zastosowania proponowanej metody do wyznaczania przemieszczeń tylko niektórych budowli.

5. Rozważania dotyczące osnowy pomiarowej

Średni błąd położenia punktu P określa się wzorem:

$$M_p^2 = \left[\frac{m_r^2}{D^2} (b_3 c_2 - b_2 c_3)^2 + (b_1 c_3 - b_3 c_1)^2 + (b_2 c_1 - b_1 c_2)^2 + (a_2 c_3 - a_3 c_2)^2 + (a_3 c_1 - a_1 c_3)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 \right] = \frac{m_r^2}{D^2} \cdot W \quad (8)$$

gdzie:

$$D = \frac{2}{r_1 r_2 r_3} (h_1 S_{\Delta B_0 C_0 P_0} + h_2 S_{\Delta A_0 C_0 P_0} + h_3 S_{\Delta A_0 B_0 P_0}), \text{ oraz}$$

$S_{\Delta B_0 C_0 P_0}$, $S_{\Delta A_0 C_0 P_0}$, $S_{\Delta A_0 B_0 P_0}$ - są to powierzchnie trójkątów BCP_1 , ACP_1 , ABP_1 zrzutowane na płaszczyznę XOY (rys. 3), zaś wielkości h są równe odpowiednio:

$$h_1 = r_1 \sin \beta_1; \quad h_2 = r_2 \sin \beta_2; \quad h_3 = r_3 \sin \beta_3.$$

Jeżeli przyjąć z dużym przybliżeniem, że $h_1 = h_2 = h_3 = r \sin \phi$; $r_1 = r_2 = r_3 = r$, a $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta B_0 C_0 P_0} + S_{\Delta A_0 C_0 P_0} + S_{\Delta A_0 B_0 P_0}$, to

$$D = \frac{2 \sin \phi}{r^2} \cdot S_{\Delta ABC}, \quad (9)$$

oraz

$$K_p^2 = \frac{\pi^2 \cdot W}{2 \sin \phi} \cdot S_{\Delta ABC}. \quad (8a)$$

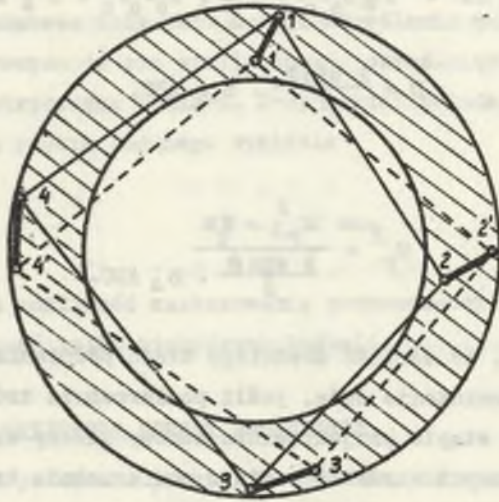
Ze wzoru 8a wynika, że wartość średniego błędu położenia punktu badanego będzie nieograniczenie duża, jeśli powierzchnia trójkąta ABC będzie minimalna. Na etapie projektowania osnowy należy więc dążyć do tego, aby dla określonych warunków pomiaru powierzchnia trójkąta utworzonego przez punkty ABC była maksymalna.

6. Sposób weryfikacji metody w oparciu o błędy prawdziwe

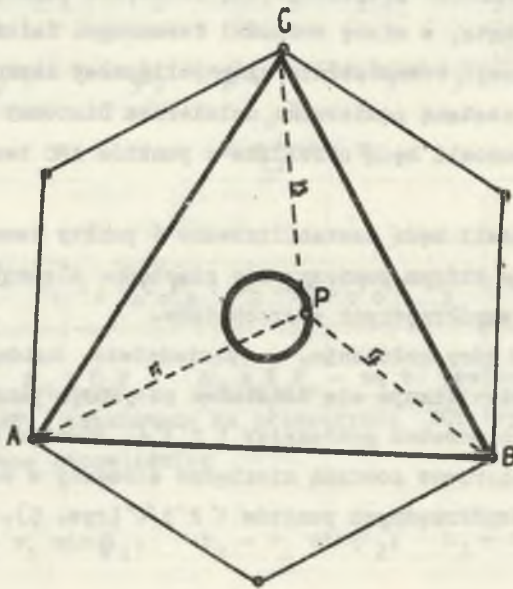
Dla badanego obiektu projektuje się założenie osnowy pomiarowej w kształcie sześciokąta, w miarę możliwości foremne. Założony wokół budowli będzie stanowił równocześnie ciąg poligonowy zamknięty. Boki tak założonego ciągu zostaną pomierzone dalmierzem Distomat DI 10, a wybrane punkty na budowli będą określane z punktów ABC tworzących trójkąt (rys. 4).

Na badanej budowli będą zastabilizowane 4 punkty tworzące czworobok geodezyjny 1234, w którym pomierzy się niezbędne elementy dla wyrównania i obliczenia współrzędnych wierzchołków.

W określonym z góry położeniu, w sąsiedztwie każdego z czterech wierzchołków, zastabilizuje się dodatkowo po jednym punkcie, tak aby utworzył się nowy czworobok geodezyjny 1'2'3'4'. Również dla tak wybrane go czworoboku pomierzone zostaną niezbędne elementy w celu wyrównania go i obliczenia współrzędnych punktów 1'2'3'4' (rys. 5).



Rys. 4



Rys. 5

Obliczone na podstawie zależności

$$\delta_{ii} = \sqrt{(X_i^j - X_i)^2 + (Y_i^j - Y_i)^2 + (Z_i^j - Z_i)^2},$$

przyrosty δ_{11} , δ_{22} , δ_{33} , δ_{44} będą wartościami pozorowanych przyrostów współrzędnych określanych metodą proponowanego wcięcia liniowego. Dodatkową kontrolę obliczonych wartości przyrostów stanowić będą ich wartości pomierzone bezpośrednio na budowli.

Opracowany program pomiaru przewiduje stabilizację punktów na budowli z możliwością automatycznego centrowania instrumentów pomiarowych. Obliczenia dotyczące osnowy pomiarowej oraz wartości pozorowanych przyrostów zostaną wykonane w jednym układzie współrzędnych.

7. Zakończenie

Przedstawiona w ogólnym zarysie metoda zastosowania pomiarów liniowych do wyznaczania współrzędnych przestrzennych punktów budowli jest częścią szerokiego programu badań opracowywanego pod kątem optymalizacji pomiarów geodezyjnych na terenach eksploatacji górniczej.

Wyniki badań i dalszych dociekań dotyczących technologii prac pomiarowych, analizy i oceny dokładności liniowych wcięć oraz ich przydatności, znajdą wyraz w kolejnych opracowaniach.

LITERATURA:

1. Polewoj W.A. - Matematyčeskaja obrabotka riezultatow radio-geodiezicziskich izmierienii. Moskwa 1971.
2. Aktualne zagadnienia geodezji. Sesja naukowo-techniczna. Nowy Sącz 1971.
3. Hausbrandt S. - Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. Warszawa 1971 r.

ANWENDUNGSPROBE DER LINEAREN MESSUNGSMETHODE ZUR BESTIMMUNG VON VERLAGERUNGEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Im Artikel wurde eine Methode zur Bestimmung von Verlagerungskomponenten des Bauwerks unter Anwendung der linearen Messungen mit dem elektrooptischen Distanzmesser Distomat DI 10 beschrieben. Es wurde eine theoretische Methode zur Bestimmung von Verlagerungskomponenten in Bezug auf ihre Genauigkeit und auch die Art ihrer Verifikation, dargestellt.

ПОПЫТКА ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Р е з ю м е

В статье описан метод определения составляющих перемещений пунктов сооружений с применением линейных измерений при использовании электрооптического дальномера Дистомат ДІ 10. Кроме того дан теоретический анализ точности предлагаемого метода определения составляющих и способ проверки истинности.