

Maciej Gryczmański

ZASTOSOWANIE SZCZEGÓLNEGO KSZTAŁTU ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZAGADNIENIACH MECHANIKI GRUNTÓW

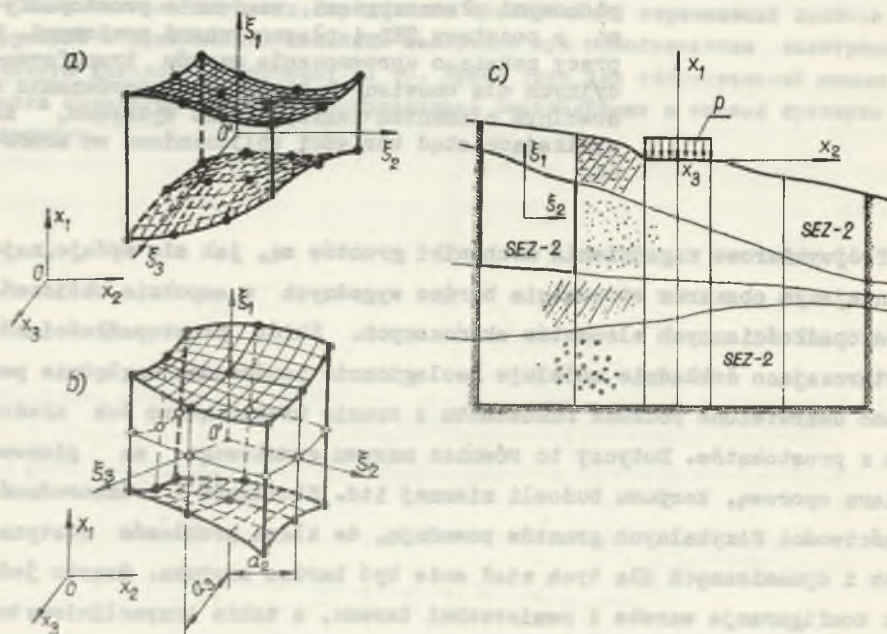
Streszczenie. W pracy przedstawione są dwa prostsze kształty zakrzywionych elementów sześciościennych, dostosowane do takich przypadków geometrii obciążonego masywu gruntowego, które są źle aproksymowane przez elementy prostopadłościenne. Powierzchnie boczne elementu SEZ-2 są pionowymi płaszczyznami, wzajemnie prostopadłymi, a podstawy SEZ-4 płaszczyznami poziomymi. W pracy pokazano uproszczenia wzorów transformacyjnych dla omawianych kształtów w porównaniu z dowolnym elementem zakrzywionym. Wykazano, że wynikające stąd korzyści obliczeniowe są znaczne.

Trójwymiarowe zagadnienia mechaniki gruntów są, jak się wydaje, najważniejszym obszarem stosowania bardzo wygodnych w aspekcie obliczeń, prostopadłościennych elementów skończonych. Zbiór prostopadłościannów wystarczająco dokładnie modeluje geologicznie jendородne względnie poziomo uwarstwione podłoże fundamentu o rzucie prostokątnym lub złożonym z prostokątów. Dotyczy to również masywu gruntowego za pionową ścianą oporową, korpusu budowli ziemnej itd. Złożoność i różnorodność właściwości fizykalnych gruntów powodują, że klasa problemów statycznych i dynamicznych dla tych ciał może być bardzo szeroka. Często jednak konfiguracja warstw i powierzchni terenu, a także krzywoliniowy kontur obszaru obciążenia wymagają uzupełnienia lub zastąpienia prostopadłościannów sześciościennymi elementami zakrzywionymi [3].

W skrajnym przypadku wszystkie ściany owych elementów są nierównoległymi płaszczyznami, bądź powierzchniami wyższego stopnia, dzięki czemu obiekty te zdolne są do aproksymacji dowolnego brzegu ciała. Wzra-

stają jednak przy tym wydatnie trudności rachunkowe, zwłaszcza czas obliczeń maszynowych.

W pracy niniejszej przedstawiono dwa typy elementów zakrzywionych o prostszym kształcie, które poza dość rzadkimi wyjątkami stanowią wystarczające uzupełnienie prostopadkościanów w zadaniach mechaniki gruntów. Element oznaczony symbolem SEZ-2 (rys. 1a,b) jest sześciścianem, którego dwie ściany (dolna i górna) są w ogólności powierzchniami, a pozostałe cztery (pionowe) płaszczyznami wzajemnie prostopadłymi. Kształt taki może być wprowadzony w przypadku analizy podłoża dowolnie uwarstwionego (rys. 1c). Ściany powierzchniowe pokrywają w przybliżeniu granice warstw nachylonych, soczewek itd., a ponadto mogą aproksymować dowolną powierzchnię terenu.



Rys. 1. Elementy SEZ-2

a) element izoparametryczny, b) element subparametryczny, c) zbiór elementów SEZ-2 modelujący dowolnie uwarstwione podłoże (przekrój środkowy)

Element SEZ-4, sześciopłóscian o dwóch poziomych ścianach równoległych (rys. 2a) służy modelowaniu nachylonej ściany oporowej, zbocza budowli ziemnej, czy wreszcie konturu podstawy fundamentu niepodzielnej na prostokąty (rys. 2).

Oczywiście każdy z prezentowanych typów może być dowolnie obrócony względem narzuconych powyżej kierunków. Charakterystyczne wektory i macierze są wtedy przekształcane za pomocą związków między kartezjańskimi współrzędnymi lokalnymi i globalnymi [3] (rozd. 1). Nieraz jest to celowe (rys. 2b). Pewne trudności towarzyszą modelowaniu soczewek kończących się wewnątrz obliczeniowego obszaru podłoża budowli. Jednakże hipotetyczna znajomość przebiegu warstw gruntowych upoważnia tu do uproszczeń (rys. 3).

Elementy SEZ-2 i SEZ-4, podobnie jak prostopadkościany i dowolne sześciopłósciany, wywodzą się ze wspólnego sześciopłóscianu "macierzystego", którego wierzchołki mają w układzie ξ_1, ξ_2, ξ_3 współrzędne $\xi_1(m), \xi_2(m), \xi_3(m) = 1$. Funkcje kształtu $N_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ są dla całej tej rodziny identyczne, jeśli jednakowy jest układ węzłów w elemencie macierzystym. Tak więc swoiste cechy SEZ-2 i SEZ-4 i wynikające z nich korzyści obliczeniowe związane są w całości z transformacją lokalnych współrzędnych ξ_1, ξ_2, ξ_3 , krzywoliniowych po odwzorowaniu, do kartezjańskich współrzędnych globalnych x_1, x_2, x_3 .

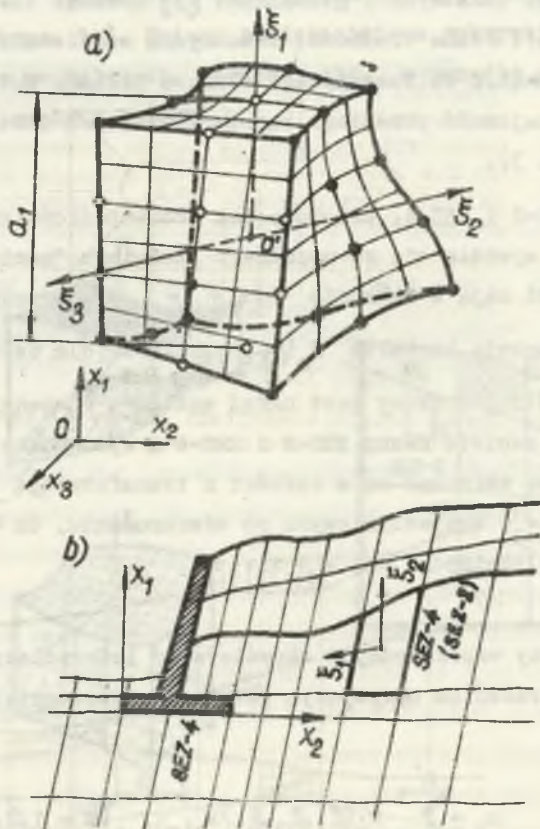
Związki między współrzędnymi określa wzór interpolacyjny, formalnie identyczny z wyrażeniem opisującym pole przemieszczenia [1], [3]:

$$x_k = \sum_{m=1}^{n^e} N'_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{k(m)}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

gdzie:

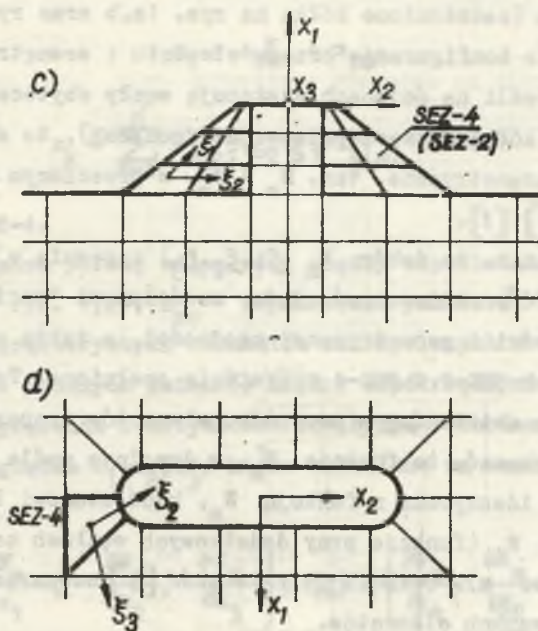
$x_{k(m)}$ - współrzędna dowolnego punktu określającego konfigurację ściany elementu wzgl. osi x_k ,

N_m - funkcja kształtu definiująca geometrię elementu.



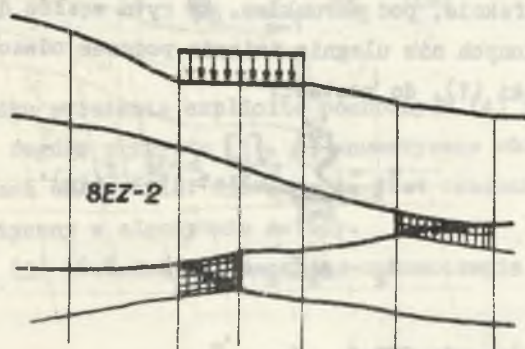
Rys. 2. Elementy SEZ-4

a) element subparametryczny, b) zbiór obróconych elementów SEZ-4 w masywie gruntowym za nachyloną ścianą oporową



Rys. 2. Elementy SEZ-4

o) modelowanie zboczy nasypu elementami SEZ-4, d) zastosowanie SEZ-4 w podłożu filara mostowego (rzut)



Rys. 3. Dostosowanie przebiegu warstw do geometrii elementów SEZ-2, ---- odcinek powierzchni między warstwami pominięty w analizie obliczeniowej

W prezentowanych elementach punkty węzłowe należące do ścian powierzchniowych (zaczernione kółka na rys. 1a,b oraz rys. 2a) wyznaczają równocześnie konfigurację brzegu elementu i wewnętrzne pole przemieszczenia. Jeśli na ścianach występują węzły zbyteczne ze względu na geometrię (kółka niezaczernione na rysunkach), to elementy SEZ-2 i SEZ-4 są subparametryczne, tzn. $N_m \neq N_m^*$, w przeciwnym wypadku izoparametryczne [1], [3].

Przy założeniu, że dobór $N_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ zapewnia w sposób automatyczny ciągłość przemieszczeń między sześcianami "macierzystymi", wymagania ciągłości i geometrycznej zgodności, a także warunek $\Sigma_m = 1$ są w elementach SEZ-2 i SEZ-4 oczywiście spełnione. Tym samym spełnione są kryteria zbieżności w przypadku elementów izoparametrycznych. Można także wykazać, że funkcja N_m^* w dowolnym węźle ściany powierzchniowej jest identyczna z funkcją N_m , bądź stanowi liniową kombinację N_m oraz N_1 (funkcje przy dodatkowych węzłach na prostej przechodzącej przez m). Oznacza to zbieżność [3] subparametrycznej odmiany proponowanych elementów.

Zauważmy, że w SEZ-2 $0\xi_1, \xi_2$ i $0\xi_1, \xi_3$ są płaszczyznami równoległymi odpowiednio do $0x_1x_2$ i $0x_1x_3$ oraz do pionowych ścian elementu.

W SEZ-4 odpowiedniość ta dotyczy $0\xi_2, \xi_3$, $0x_2x_3$ oraz poziomych ścian elementu. W efekcie, pod warunkiem, że rytm węzłów dodatkowych na ścianach zakrzywionych nie ulegnie zmianie podczas odwzorowania, można uprościć związki (1), do postaci:

$$x_1 = \sum_{m=1}^n N_m^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{1(m)}, \quad (2)$$

$$x_k = a_k \xi_k + x_{k0} \quad (k = 2, 3)$$

w przypadku elementu SEZ-2,

oraz

$$x_1 = a_1 \xi_1 + x_{10},$$

$$x_k = \sum_{m=1}^{n'} N'_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{k(m)} \quad (k=2,3) \quad (3)$$

dla elementu SEZ-4.

Symbol a_k oznacza połowę odległości między odpowiednimi ścianami równoległymi (por. rys. 1,2), x_{k0} - współrzędną punktu O .

Wszystkie charakterystyki elementów zakrzywionych w układzie globalnym zależą od podanych związków między współrzędnymi. Macierze odkształcenia, naprężenia i sztywności zawierają pochodne cząstkowe funkcji kształtu względem x_1, x_2, x_3 , które określone są znaną zależnością:

$$\left\{ \frac{\partial N'_m}{\partial x_1}, \frac{\partial N'_m}{\partial x_2}, \frac{\partial N'_m}{\partial x_3} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial N'_m}{\partial \xi_1}, \frac{\partial N'_m}{\partial \xi_2}, \frac{\partial N'_m}{\partial \xi_3} \right\} \quad (4)$$

przy czym dla (1) dowolny element macierzy Jakobiego ma postać:

$$J_{j1} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} = \sum_{m=1}^{n'} \frac{\partial N'_m}{\partial \xi_j} x_{1(m)} \quad (5)$$

W ogólnym przypadku wyrażenie explicite pochodnych (4) jest skomplikowane, toteż jako regułę przyjęto [1], [3] numeryczne obliczanie ich wartości w punktach całkowania. Operacja ta jest czasochłonna i uszczupla aparat analityczny w algorytmie metody.

Związki (2) i (3) prowadzą do znacznego uproszczenia obliczeń.

Oznaczając:

$$\chi_{rs} = \sum_{m=1}^{n'} \frac{\partial N'_m}{\partial \xi_r} \bar{x}_{s(m)}, \quad (6)$$

gdzie:

$$\bar{x}_{S(m)} = x_{S(m)} : a_s,$$

a_s - średni wymiar elementu w kierunku x_s ,

otrzymujemy dla SEZ-2 macierz Jakobiego postaci:

$$[J] = \begin{bmatrix} a_1 x_{11} & 0 & 0 \\ a_1 x_{21} & a_2 & 0 \\ a_1 x_{31} & 0 & a_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Stąd:

$$\det [J] = a_1 a_2 a_3 x_{11}. \quad (8)$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial x_1} = \frac{1}{a_1 x_{11}} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_1}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial x_k} = \frac{1}{a_k} \left(\frac{\partial N_m}{\partial \xi_k} - \frac{x_{k1}}{x_{11}} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_1} \right), \quad (k=2,3)$$

W przypadku elementu SEZ-4 wyrażenia są bardziej złożone:

$$[J] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 x_{12} & a_3 x_{13} \\ 0 & a_2 x_{22} & a_3 x_{23} \\ 0 & a_2 x_{32} & a_3 x_{33} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$\det [J] = a_1 a_2 a_3 \Delta \bar{x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial x_1} = \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial N_m}{\partial \xi_1} - \frac{1}{4} x \left[(x_{12} x_{33} - x_{13} x_{32}) \frac{\partial N_m}{\partial \xi_2} - (x_{12} x_{23} - x_{22} x_{23}) \frac{\partial N_m}{\partial \xi_3} \right] \right]$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial x_k} = \frac{1}{a_k \Delta \bar{x}} (x_{ku} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_k} - x_{kl} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_l}) \quad (k, l=2,3) \quad (12)$$

$$\Delta \bar{x} = x_{22} x_{33} - x_{23} x_{32}$$

Korzyści obliczeniowe wynikające ze stosowania proponowanych kształtów są wyraźnie odczuwalne. Jeśli za poziom odniesienia przyjmiemy liczbę działań arytmetycznych potrzebną do obliczenia wektora pochodnych względem x_1, x_2, x_3 w punkcie dowolnego sześciostianu zakrzywionego, to analogiczna liczba działań dla elementu SEZ-4 wyniesie $57 \div 65\%$, a dla elementu SEZ-2 tylko $25\% - 30\%$. Jest to duże skrócenie czasu, jeśli się zważy, że liczba operacji potrzebna do wyznaczenia wartości $\frac{\partial}{\partial x_k} [N]$, ($k = 1, 2, 3$) w jednym punkcie jest rzędu $n \cdot n'$. Tych punktów jest zwykle wiele, zwłaszcza gdy są to węzły numerycznego całkowania macierzy sztywności. Tu wyłania się następująca, bodaj najważniejsza zaleta elementów SEZ-2, SEZ-4. Otóż w myśl twierdzenia IRONSA [2], [3], minimalna liczba węzłów całkowania potrzebna do dokładnego obliczenia objętości elementu:

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det [J] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (13)$$

jest równocześnie najmniejszą liczbą węzłów w obliczeniu macierzy sztywności, która zapewnia zbieżność rozwiązań. Jeśli zastosujemy do całkowania najefektywniejszy wzór kwadraturowy GAUSSA-LEGENDRÉ'A, to jakobian w (13) musi być w związku z tym wielomianem stopnia $\leq 2N_k - 1$ ($k = 1, 2, 3$). Symbol N_k oznacza tu liczbę punktów GAUSSA w kierunku ξ_k .

Badając jacobiany otrzymujemy analityczne sformułowanie twierdzenia IRONSA w postaci:

$$N_k \geq \frac{3}{2} (n_k^* - 1), \quad k = 1, 2, 3 \quad (14)$$

w przypadku dowolnego sześciścianu zakrzywionego:

$$N_1 \geq \frac{1}{2} (2n_k^* - 1),$$

$$N_k \geq n_k^* - 1, \quad k = 2, 3 \quad (15)$$

dla elementu SEZ-4;

$$N_1 \geq \frac{1}{2} (n_k^* - 1),$$

$$N_k \geq \frac{1}{2} n_k^*, \quad k = 2, 3 \quad (16)$$

dla elementu SEZ-2.

Przez n_k^* należy rozumieć maksymalną liczbę węzłów definiującą geometrię w kierunku ξ_k .

Rozpatrzmy element SEZ-2 pokazany na rys. 1a. Minimum punktów GAUSSA wyniesie tu zgodnie z (16): $N_{\min} = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Gdyby rozsunąć dolne krawędzie elementu tak, by ściany boczne były płaszczyznami nachylonymi do ξ_1 , wówczas w myśl (14) $N_{\min} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. Zwykle przyjmuje się nieco większą liczbę punktów GAUSSA, niemniej oszczędność czasu w stadium całkowania jest w przypadku stosowania elementów uproszczonych bardzo wyraźna.

Jedynym poważniejszym zarzutem, jaki można by postawić elementom SEZ-2 i SEZ-4, jest pewna komplikacja programu przez wprowadzenie dwóch dodatkowych wariantów. Zarzut ten ma rację bytu, gdy program jest uniwersalny, obejmujący najszerszą klasę problemów. Bogactwo zagadnień mechaniki gruntów, czekających na analizę obliczeniową uzasadnia jednak celowość tworzenia specjalnych programów tylko dla tej dziedziny.

Wtedy zastosowanie elementów SEZ-2 i SEZ-4 wymaga wprowadzenia trzech gałęzi programu (dodatkowej dla prostopadkościanów) w stadium poprzedzającym formowanie macierzy odkształcenia.

LITERATURA

1. Ergatoudis I.G., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.: Curved, isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 7, 1968.
2. Irons B.M.: Engineering Application of numerical integration in stiffness method, *J.A.I.A.A.*, 4, 1966.
3. Zienkiewicz O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972 (tłum. z angielskiego).

ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТНОЙ ФОРМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ

Резюме

В статье представлены две более простые формы загнутых, вестигранных элементов, приспособлены к таким случаям геометрии нагруженных грунтовых массивов, которые плохо аппроксимируются параллелепипедными элементами. Вертикальные поверхности элемента СЭЗ-2 плоские и взаимно перпендикулярные а основании СЭЗ-4 горизонтальные и плоские. В статье дано упрощения формул трансформации для рассматриваемых форм в сравнении с любым загнутым элементом. Доказано, что следующие отсюда исчислительные выгоды значительны.

APPLICATION OF SPECIAL SHAPE OF FINITE ELEMENTS IN SOIL MECHANICS PROBLEMS

Summary

In this paper two simpler shapes of limited by six surfaces, curved elements, are presented. There are adjusted to such cases of geometry of subjected to a load, soil system which are approximated by parallelepipeds inaccurately. Lateral surfaces of the SEZ-2 are perpendicular reciprocally, vertical planes and bases of the SEZ-4 are horizontal planes. In this paper simplifications of transformation formulae for consider shapes in comparison to an arbitrary, curved element are described. It is proved that resulting from here computation advantages are considerable.