

Leszek Litwinowicz

OBLICZANIE POPRAWEK DO CHARAKTERYSTYK POŁA NAPRĘŻEŃ GRUNTÓW W STANIE RÓWNOWAGI GRANICZNEJ

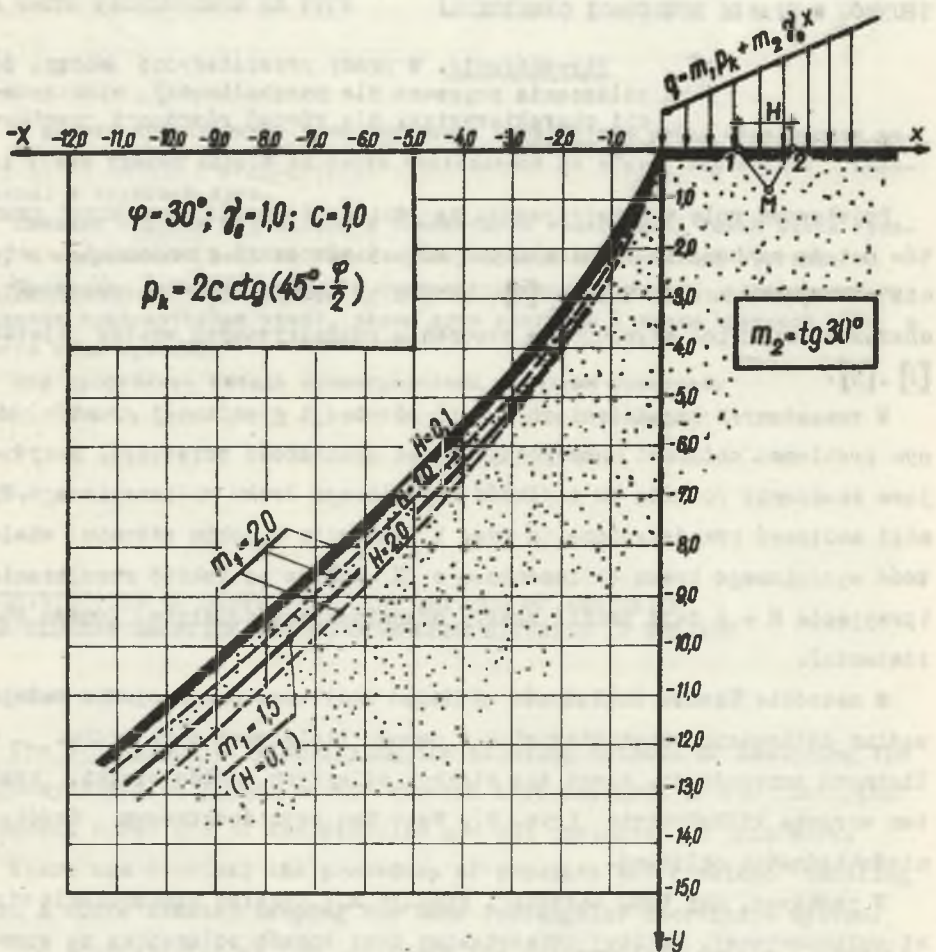
Streszczenie. W pracy przedstawiono wzory do obliczenia poprawek dla parabolicznej aproksymacji charakterystyk, dla równań równowagi granicznej gruntu.

Podstawową rolę w rozwiązywaniu zagadnień równowagi granicznej gruntów metodą całkowania różniczkowych równań równowagi granicznej, spełnia numeryczna metoda Massau [1]. Metoda ta polega na odwzorowywaniu charakterystyk ich stycznymi w otoczeniu rozpatrywanych węzłów siatki [2], [3].

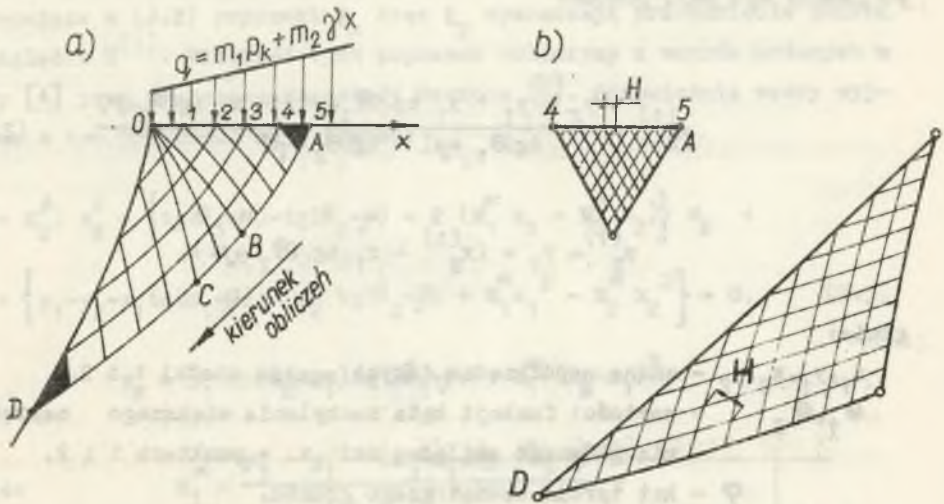
W rozważanych zagadnieniach teorii równowagi granicznej gruntów głównym problemem obliczeń numerycznych jest dokładność rozwiązań. Decydujące znaczenie posiada tu wielkość wyjściowego kroku obliczeniowego. Wyniki obliczeń przedstawione na rys. 1 ilustrują w jakim stopniu wielkość wyjściowego kroku obliczeniowego H wpływa na jakość rozwiązania (przyjęcie $H = 2$ daje profil skarpy odpowiadający zupełnie innemu obciążeniu).

W metodzie Massau dokładność obliczeń dodatkowo progresywnie maleje wzdłuż całkowanych charakterystyk z powodu stale rosnącego kroku. W licznych przypadkach, nawet dla niezbyt odległych węzłów siatki, krok ten wzrasta kilkakrotnie (rys. 2). Fakt ten jest dodatkowym źródłem niedokładności obliczeń.

W praktyce, aby temu zaradzić, stosuje się lokalne zagęszczanie siatki obliczeniowej. Poniżej przedstawimy inny sposób polegający na wprowadzeniu poprawek uwzględniających krzywoliniowość charakterystyk między węzłami siatki oraz nieliniowość poszukiwanych funkcji na tych odcinkach.



Rys. 1. Wpływ wielkości kroku obliczeniowego H na profil obliczanego zbocza skarpy



Rys. 2. Wzrost kroku obliczeniowego H

a - schemat obliczeniowy siatki, b - fragmenty siatki we współrzędnych bezwymiarowych dla przykładu: $\varphi = 30^\circ$; $m_1 = 1,5$; $m_2 = \text{tg } 30^\circ$

Sposób ten wynika z zasady aproksymacji nieliniowej, której przydatność dla obliczeń numerycznych wyjaśniono w pracach [4] i [5]. Poprawki pomyślane tak, ażeby można je było łatwo wprowadzać do obliczeń dla dowolnych wewnętrznych węzłów siatki, w szczególności tam, gdzie następuje nadmierny wzrost kroku obliczeniowego.

Proponowany niżej sposób należy traktować jako aparat pomocniczy w obliczeniach numerycznych. Przyjęte w trakcie wyprowadzenia poprawek uproszczenia nie zawsze gwarantują stabilność rozwiązania.

2. Wzory do obliczania poprawek dla współrzędnych siatki charakterystyk

2.1. Rozwiązanie dla zagadnienia brzegowego Cauchy'ego

Wzory do obliczania współrzędnych $x_N^{(1)}$ oraz $y_N^{(1)}$ kolejnego węzła N siatki charakterystyk pól naprężeń gruntu w stanie równowagi granic-

nej, metodą Massau (stycznych) dla przypadku zagadnienia brzegowego typu Cauchy'ego mają postać:

$$x_N^{(1)} = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}, \quad (2.1)$$

$$y_N^{(1)} = y_1 + (x_N^{(1)} - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu),$$

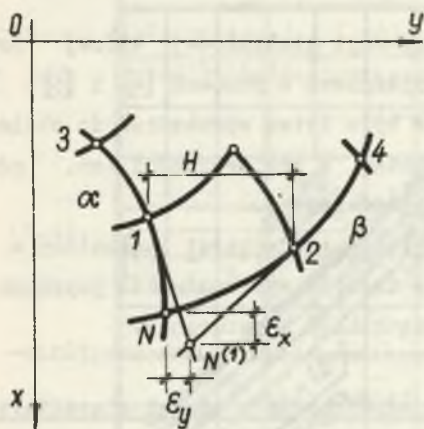
gdzie:

x_1, y_1, x_2, y_2 - znane współrzędne danych węzłów siatki 1 i 2,

θ_1, θ_2 - wartości funkcji kąta nachylenia większego naprężenia głównego względem osi x w punktach 1 i 2,

φ - kąt tarcia wewnętrzznego gruntu,

$$\mu = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$$



Rys. 3. Schemat obliczeniowy dla zagadnienia brzegowego Cauchy'ego

Indeksem (1) we współrzędnych węzła $N^{(1)}$ podkreślono fakt odwzorowania stycznymi, traktowanego jako pierwsze przybliżenie rozwiązania (rys. 3).

W rzeczywistości linie charakterystyk na odcinkach wyznaczonych odległością węzłów 1 i N oraz 2 i N dla zwiększonego H , odbiegają od kierunków stycznych do charakterystyk. Wprowadzimy więc odpowiednie poprawki uwzględniające ten fakt na bazie aproksymacji parabolicznej. Poprawki przyjmujemy następująco:

$$x_N = x_N^{(1)} + \epsilon_x, \quad (2.2)$$

$$y_N = y_N^{(1)} + \epsilon_y.$$

Występujące w (2.2) poprawki ϵ_x oraz ϵ_y wyznaczają przesunięcie punktu N względem $N^{(1)}$. Wielkość tych poprawek obliczymy z wzorów podanych w pracy [4] przy zastosowaniu metody Newtona [6]. Odpowiednie wzory wyjściowe w tym przypadku mają postać:

$$(M_1^\alpha - M_2^\beta) x_N^2 + \left\{ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) - 2 (M_1^\alpha x_1 - M_2^\beta x_2) \right\} x_N + \left\{ y_1 - y_2 - x_1 \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) + x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) + M_1^\alpha x_1^2 - M_2^\beta x_2^2 \right\} = 0, \quad (2.3)$$

$$y_N = y_1 + (x_N - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) + M_1^\alpha (x_N - x_1)^2,$$

gdzie:

$$M_1^\alpha = \frac{y_3 - y_1 - (x_3 - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu)}{(x_3 - x_1)^2}$$

$$M_2^\beta = \frac{y_4 - y_2 - (x_4 - x_2) \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}{(x_4 - x_2)^2} \quad (2.4)$$

Zakładamy, że współrzędne dodatkowych węzłów 3 i 4, odpowiednio dla charakterystyk α i β , wyznaczono z wystarczającą dokładnością.

Obliczona stąd wielkość poprawki ϵ_x wynosi:

$$\epsilon_x = \frac{M_2^\beta (x_N^{(1)} - x_2)^2 - M_1^\alpha (x_N^{(1)} - x_1)^2}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) + 2 [M_1^\alpha (x_N^{(1)} - x_1) - M_2^\beta (x_N^{(1)} - x_2)]} \quad (2.5)$$

Wzór (2.5) podaje wartość pierwszego przybliżenia ϵ_x . Dalsze przybliżenia otrzymuje się iteracyjnie zgodnie z zasadą

$$x_N^{(i)} = x_N^{(i-1)} + \epsilon_x^{(i-1)}$$

Na podstawie znajomości ϵ_x wielkość drugiej poprawki otrzymujemy bezpośrednio w postaci:

$$\epsilon_y = M_1^\alpha (x_N^{(1)} - x_1)^2 + \left[\operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) + 2 M_1^\alpha (x_N^{(1)} - x_1) \right] \epsilon_x \quad (2.6)$$

Proces iteracyjny obliczenia $\epsilon_x^{(i)}$ na ogół jest szybko zbieżny [7].

2.2. Rozwiązanie dla zagadnienia brzegowego typu mieszanego

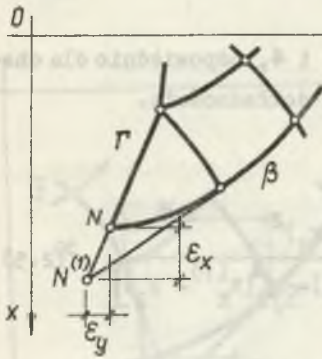
W przypadku zagadnienia brzegowego typu mieszanego (rys. 4) wzory do obliczania współrzędnych poszukiwanego węzła metodą Massau mają postać:

$$x_N^{(1)} = \frac{y_1 - y_2 + x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) - x_1 \operatorname{tg} \nu_1}{\operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) - \operatorname{tg} \nu_1} \quad (2.7)$$

$$y_N^{(1)} = y_1 + (x_N^{(1)} - x_1) \operatorname{tg} \nu_1,$$

gdzie ν_1 jest wielkością znaną.

Aproksymację paraboliczną w tym przypadku przyjmujemy tylko dla charakterystyk rodziny β , pozostawiając odwzorowanie krzywej niecharakterystycznej Γ stycznymi. W wyniku podobnego postępowania jak poprzednio, ostatecznie otrzymano:



$$\epsilon_x^{(1)} = \frac{M_2^\beta (x_N^{(1)} - x_2)^2}{\operatorname{tg} \nu_1 - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) - 2 M_2^\beta (x_N^{(1)} - x_2)} \quad (2.8)$$

Rys. 4. Schemat obliczeniowy dla zagadnienia brzegowego mieszane

oraz

$$\epsilon_y = \epsilon_x^{(1)} \operatorname{tg} \nu_1$$

$\epsilon_x^{(1)}$ jest wystarczająco dokładnym przybliżeniem tej wielkości.

3. Wzory do obliczania poprawek dla wartości funkcji w węzłach siatki charakterystyk

3.1. Rozwiązanie dla zagadnienia brzegowego Cauchy'ego

W metodzie Massau wielkości węzłowe $\delta_N^{(1)}$ oraz $\theta_N^{(1)}$ oblicza się na podstawie wzorów:

$$\delta_N^{(1)} = \frac{\delta_2 W_1 + \delta_1 W_2}{(\delta_1 + \delta_2) \operatorname{tg} 2\mu'} \quad (3.1)$$

$$\theta_N^{(1)} = \frac{W_1 - W_2}{2(\delta_1 + \delta_2)}$$

gdzie:

$$W_1 = \delta_1 (2\theta_1 + \operatorname{tg} 2\mu) - \frac{[X \sin(\theta_1 - \mu) - Y \cos(\theta_1 - \mu)] (x_N^{(1)} - x_1)}{\cos 2\mu \cos(\theta_1 + \mu)} \quad (3.2)$$

$$W_2 = -\delta_2 (2\theta_2 - \operatorname{tg} 2\mu) + \frac{[X \sin(\theta_2 + \mu) - Y \cos(\theta_2 + \mu)] (x_N^{(1)} - x_2)}{\cos 2\mu \cos(\theta_2 - \mu)}$$

Wielkości X oraz Y w (3.2) oznaczają składowe sił objętościowych gruntu. Wielkości δ_1 oraz δ_2 oznaczają tu wartości dla punktów 1 i 2 funkcji średniego sprowadzonego naprężenia normalnego:

$$\delta = \frac{1}{2} (\delta_x + \delta_y) + 2c \operatorname{ctg} \varphi,$$

gdzie δ_x oraz δ_y składowe stanu naprężenia, zaś c spójność gruntu.

Dokładniejsze wartości funkcji δ oraz θ w węzle N obliczymy wychodząc z następujących zależności:

$$\begin{aligned} \delta_N &= \delta_N^{(1)} + \mathcal{E}'_{\delta} + \mathcal{E}''_{\delta} \\ \theta_N &= \theta_N^{(1)} + \mathcal{E}'_{\theta} + \mathcal{E}''_{\theta}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie:

$\varepsilon'_\theta \varepsilon'_\theta$ - poprawki dla funkcji δ oraz θ wynikające z przesunięcia węzła $N^{(1)}$ w miejsce N (rys. 2),

$\varepsilon_\theta \varepsilon_\theta$ - poprawki dla funkcji δ oraz θ obliczonych w punkcie N wynikające z nieliniowego odwrócenia tych funkcji.

Obliczenie wyszczególnionych w (3.3) poprawek polega na wyliczaniu wzorów [4]:

$$\delta_N = \delta_1 + A_1 (\delta_3 - \delta_1) + \frac{1}{(\delta_1 + \delta_2) \operatorname{tg} 2\mu} \left[\delta_1 (B_2 D_2 + C_1 \operatorname{tg} 2\mu) + \right. \\ \left. + \delta_2 (B_1 D_1 - 2\delta_1 C_2) \right], \quad (3.4)$$

$$\theta_N = \theta_1 + A_1 (\theta_3 - \theta_1) + \frac{1}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left[2\delta_2 C_2 - B_2 D_2 + B_1 D_1 - C_1 \operatorname{tg} 2\mu \right]$$

gdzie:

$$A_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \quad (3.5)$$

$$A_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_4 - x_2},$$

$$B_1 = (x_1 - x_1) (1 - \sqrt{A_1}),$$

$$B_2 = (x_2 - x_2) (1 - \sqrt{A_2}),$$

$$C_1 = \delta_2 - \delta_1 - A_1 (\delta_3 - \delta_1) + A_2 (\delta_4 - \delta_2),$$

$$C_2 = \theta_2 - \theta_1 - A_1 (\theta_3 - \theta_1) + A_2 (\theta_4 - \theta_2),$$

$$D_1 = \frac{X \sin(\theta_1 - \mu) - Y \cos(\theta_1 - \mu)}{\cos 2\mu \cos(\theta_1 + \mu)}$$

$$D_2 = \frac{X \sin(\theta_2 + \mu) - Y \cos(\theta_2 + \mu)}{\cos 2\mu \cos(\theta_2 - \mu)}$$

W wyniku uwzględnienia (2.2) we wzorach (3.4), po odpowiednich przekształceniach i zwróceniu uwagi o członach zawierających $(\epsilon_x)^2$ ostatecznie otrzymano:

$$\epsilon'_0 = \frac{\delta_1 D_2 + \delta_2 D_1}{(\delta_1 + \delta_2) t_E 2\mu} \epsilon_x \quad (3.6)$$

$$\epsilon''_0 = \frac{(D_1 - D_2) \epsilon_x}{2(\delta_1 + \delta_2)}$$

$$\epsilon'_\theta = \frac{1}{(\delta_1 + \delta_2) t_E 2\mu} \left\{ \delta_2 w_1^* A_1 + \delta_1 w_2^* A_2 + 2\epsilon_x \left[\frac{\delta_2 w_1^* A_1}{(x_N^{(1)} - x_1)} + \frac{\delta_1 w_2^* A_2}{(x_N^{(1)} - x_2)} \right] \right\}$$

$$\epsilon''_\theta = \frac{1}{2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ (w_1^* A_1 - w_2^* A_2) + 2\epsilon_x \left[\frac{w_1^* A_1}{(x_N^{(1)} - x_1)} - \frac{w_2^* A_2}{(x_N^{(1)} - x_2)} \right] \right\}$$

gdzie:

$$w_1^* = (\delta_3 - \delta_1) t_E 2\mu + 2\delta_1 (\Theta_3 - \Theta_1) - (x_3 - x_1) D_1 \quad (3.7)$$

$$w_2^* = (\delta_4 - \delta_2) t_E 2\mu - 2\delta_2 (\Theta_4 - \Theta_2) - (x_4 - x_2) D_2$$

We wzorach (3.6) i (3.7) oznaczenia (3.5) oblicza się dla $x_N^{(1)}$.

3.2. Rozwiązanie dla zagadnienia brzegowego typu mieszanego.

Dla przypadku zagadnienia brzegowego typu mieszanego przyjmujemy, że wzdłuż krzywej Γ (rys. 3) spełniony jest warunek $\delta_N = \delta_1 = \text{const}$. Wielkość $\Theta_N^{(1)}$ dla tego przypadku oblicza się z wzoru:

$$\Theta_N^{(1)} = \frac{1}{2\delta_2} \left[(\delta_1 - \delta_2) t_E 2\mu + 2\delta_2 \Theta_2 - D_2 (x_N^{(1)} - x_2) \right] \quad (3.8)$$

Poszukiwane poprawki zgodnie z założeniem:

$$\Theta_N = \Theta_N^{(1)} + \varepsilon'_\Theta + \varepsilon''_\Theta \quad (3.9)$$

obliczymy z wzoru [4]:

$$\Theta_N = \Theta_2 + \frac{1}{2\sigma_2} \left\{ \operatorname{tg} 2\mu \left[\check{\sigma}_1 - \check{\sigma}_2 - A_2 (\check{\sigma}_4 - \check{\sigma}_2) \right] - B_2 D_2 + 2\check{\sigma}_2 A_2 (\Theta_4 - \Theta_2) \right\} \quad (3.10)$$

Ostatecznie otrzymano:

$$\varepsilon'_\Theta = \frac{D_2}{2\sigma_2} \varepsilon_x$$

$$\varepsilon''_\Theta = \frac{1}{2\sigma_2} \left\{ \left[A_2 + 2\varepsilon_x \frac{x_N^{(1)} - x_2}{(x_4 - x_2)^2} \right] \left[2\check{\sigma}_2 (\Theta_4 - \Theta_2) - \operatorname{tg} 2\mu (\check{\sigma}_4 - \check{\sigma}_2) \right] + \right. \\ \left. + D_2 \frac{x_N^{(1)} - x_2}{x_4 - x_2} \left[(x_N^{(1)} - x_2) + 2\varepsilon_x \right] \right\}.$$

Wzory do obliczania poprawek dla współrzędnych mogą być stosowane samodzielnie. W wielu przypadkach obliczeń dawało to dobre rezultaty.

Na ogół zastosowanie w obliczeniach poprawek daje wyniki nieco gorsze od omówionych w [5]. Stwierdzono to na wielu przykładach. Jednakże jest to sposób dokładniejszy od metody Massau i łatwy do zapropagowania.

Należy podkreślić, że jakkolwiek metoda Massau w zastosowaniu do zagadnień równowagi granicznej gruntu jest już dobrze rozeznana, to zastosowanie aproksymacji wyższego stopnia do obliczeń numerycznych wymaga jeszcze zbadania i przeanalizowania przydatności wielu różnych wariantów.

Dotychczasowe doświadczenia w tym kierunku [3], [4] wskazują na celowość takich poszukiwań.

LITERATURA

1. Соколовский В.В. - Статика сыпучей среды, 1960.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. - Методы вычислений, т. 2, 1962
3. Dembicki E. - Stany graniczne gruntów teoria i zastosowanie, 1970.
4. Litwinowicz L. - Numeryczne całkowanie równań równowagi granicznej gruntu przy zastosowaniu aproksymacji nieliniowej. Archiwum Inż. Łądowej, 16, 2, 1970.
5. Litwinowicz L. - Stateczność skarp krzywoliniowych w stanie równowagi granicznej. Archiwum inż. Łądowej, 16, 3, 1970.
6. Панов Д.Д. - Численное решение квазилинейных гиперполических систем дифференциальных уравнений в частных производных, 1957.
7. Мысовских И.П. - Лекции по методам вычислений, 1962.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАПРЯЖЕНИЙ ГРУНТОВ
В СОСТОЯНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Резюме

В статье рассматривается вопрос повышения точности численного решения задачи предельного равновесия грунтов методом поправок приводящих к нелинейной аппроксимации

CORRECTION ANALYSIS FOR STRESS ARCA CHARACTERICS OF SOIL IN LIMIT EQUILIBIUM STATE

Summary

In this paper the problems of decreasing of numerically computation accuracy are considered.

$$G = \frac{1}{2} \left[\left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sigma_c} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sigma_c} \right] + \frac{\sigma}{\sigma_c} \left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sigma_c} \right] \right]$$

$$+ \frac{\sigma}{\sigma_c} \left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sigma_c} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sigma_c} \right]$$

The correction analysis for stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state is presented. The analysis is based on the assumption that the soil is a homogeneous material with a constant shear modulus. The correction is applied to the stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state. The correction is applied to the stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state. The correction is applied to the stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state.

The correction analysis for stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state is presented. The analysis is based on the assumption that the soil is a homogeneous material with a constant shear modulus. The correction is applied to the stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state. The correction is applied to the stress arc characteristics of soil in limit equilibrium state.