ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

Jan KAŁUSKI

Instytut Automatyki
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

ZASTOSOWANIE RÓWNAŃ FOKKERA - PLANCKA - KOŁMOGOROWA DO WYZNACZANIA NIEZAWODNOŚCI METROLOGICZNEJ PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH

Streszczenie. W pracy uzasadniono i pokazano przykład zastosowania metody równań kinetycznych Fokkera - Planka - Kołmogorowa do wyznaczania wskaźników niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych. Przedstawiono wzory obliczeniowe w celu praktycznego wyznaczania omawianych wskaźników.

1. WSTĘP

W pracy [1] wykazano, że proces zmian dokładności wskazań S(t) wybranych przyrządów pomiarowych może być aproksymowany niestacjonarnym jednorodnym procesem Markowa. Zmiana dokładności wskazań przyrządów w funkcji czasu spowodowana jest zmianą ich właściwości metrologicznych. Stąd najistotniejszą charakterystyką eksploatacyjną jest ich niezawodność ze względu na wymagane właściwości metrologiczne, a w szczególności na wymaganą dokładność wskazań w określonym czasie t.

Problemy niezawodności metrologicznej zostały omówione w pracy autora [2].

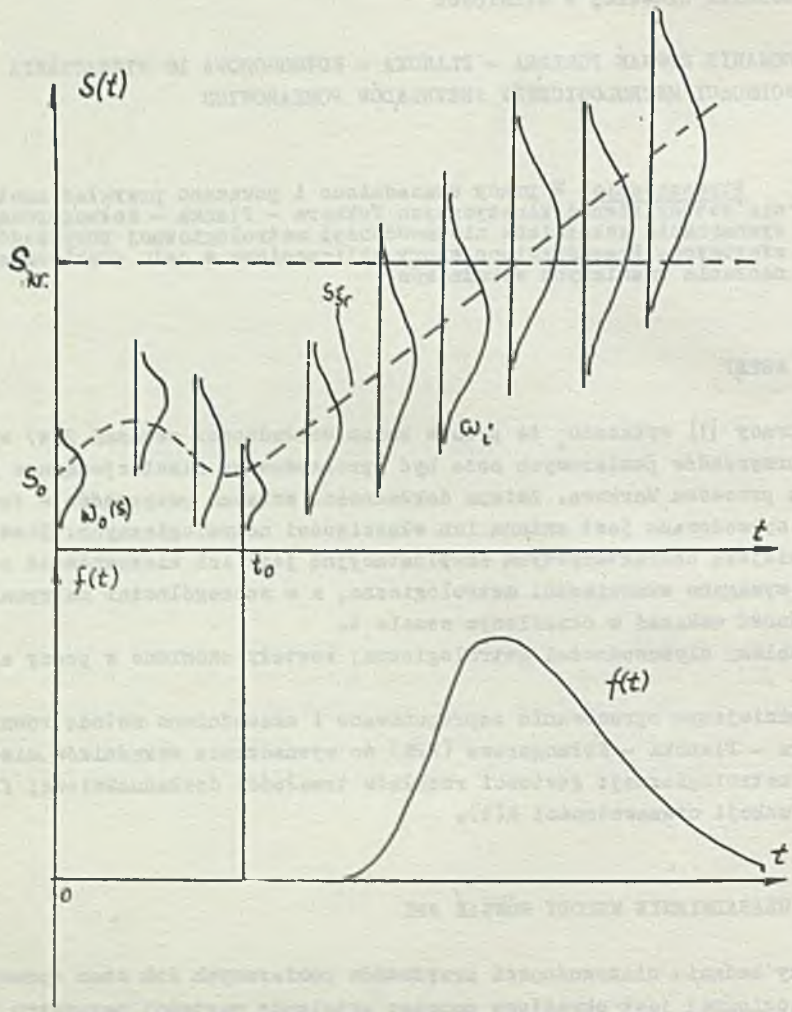
W niniejszym opracowaniu zaproponowano i uzasadniono metodę równań Fokkera - Plancka - Kołmogorowa (FPK) do wyznaczania wskaźników niezawodności metrologicznej: gęstości rozkładu trwałości dokładnościowej f(t) oraz funkcji niezawodności R(t).

2. UZASADNIENIE METODY RÓWNAŃ FPK

Przy badaniu niezawodności przyrządów pomiarowych ich stan sprawności metrologicznej jest określony poprzez ustalenie wartości parametru uogólnionego (np. dokładności) w stosunku do wcześniej przyjętych ograniczeń na ten parametr. Zwykle jest to górna granica nieprzekroczenia wartości tego parametru w określonym czasie t. Model uszkodzeń w tym przypadku konstruuje się na podstawie analizy uszkodzeń dokładności w rozpatrywanym czasie pracy przyrządu pomiarowego. Analiza ta może dotyczyć statystycz-

nych wyników badań reprezentatywnej próbki losowej określonych przyrządów pomiarowych [1]. Można również zbudować model uszkodzeń na podstawie analizy kinetyki uogólnionego parametru badanych przyrządów pomiarowych.

Rozpatrzmy odpowiadający unormowanemu reżimowi pracy proces zmian dokładności S(t), którego wartość średnia i wariancja rosną z czasem (rys. 1).



Rys. 1. Proces zmian dokładności wskazań S(t)
Fig. Process of variety of accuracy of indication S(t)

Proces ten pokazuje przefiltrowany, złagodzony przebieg poszczególnych realizacji procesu S(t), które wskutek krótkiego czasu (czas pojedynczego pomiaru) nie doprowadzają do uszkodzenia dokładności przyrządu pomiarowe-

go. Można jednak zauważyć, że strumień pojedynczych pomiarów z niedokładnością przewyższającą granicę krytyczną s_{kr} stale rośnie wskutek wzrostu wartości oczekiwanej i wariancji błędów.

Biorąc pod uwagę ten fakt oraz to, że proces S(t) może być aproksymowany procesem markowskim dyfuzyjnego typu można przyjąć, że kinetyka badanego procesu zmian dokładności w czasie dla bardzo ogólnego przypadku może być opisana stochastycznym różniczkowym równaniem pierwszego rzędu o postaci:

$$dS(t) = a(t)dt + b(t)d\varepsilon(t) \tag{1}$$

gdzie:

a(t) i b(t) - pewne deterministyczne funkcje, charakteryzujące zmianę wartości średniej i intensywność procesu Wienera,

$\varepsilon(t)$ - funkcja losowa.

Funkcja losowa $\varepsilon(t)$ jest to funkcja powstała w wyniku sumowania się całego szeregu nieskorelowanych i słabo skorelowanych mechanoelektrycznych i fizykochemicznych procesów towarzyszących tarciu i zużyciu, przepływowi prądu oraz działaniu pól magnetycznych i elektrostatycznych.

Jako uogólnione procesy, które mogą być związane z powstawaniem błędów przyrządów pomiarowych, można wymienić następujące: mechaniczne procesy (deformacje) w warstwach poszczególnych elementów przyrządów, zmiany na powierzchni metali powstałe wskutek działania obciążeń stałych i cyklicznych, procesy dyfuzyjne, przemieszczenie i rozmnażanie się dyslokacji, procesy elektrolityczne i inne.

Różnorodność i liczba statystycznie sumujących się fluktuacji tworzących proces $\varepsilon(t)$ pozwala przyjąć, że ma on rozkład normalny o wartości oczekiwanej "0" i wariancji liniowo rosnącej z czasem. Ze względu na powyższe można założyć, że równanie (1) jest stochastycznym różniczkowym równaniem typu Itô,[x)] którego rozwiązaniem jest losowy markowski proces dyfuzyjnego typu.

Biorąc pod uwagę przeprowadzoną analizę, problem określenia analitycznych zależności dla wskaźników niezawodności można przedstawić w następujący sposób.

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa poprawnej pracy bezpośrednio związana jest z gęstością prawdopodobieństwa znajdowania się uogólnionego parametru w tym przypadku dokładności s, w zadanym przedziale wartości dopuszczalnych. Natomiast prawdopodobieństwo przekroczenia zadanego poziomu wyraża się znaną zależnością dla warunkowej gęstości prawdopodobieństwa przejścia procesu dyfuzyjnego otrzymuje się jako rozwiązanie drugiego (prospektywnego) równania FPK dla określonych warunków początkowo-brzegowych.

---

x) lub Stratanowicza

Równanie FPK dla warunkowej gęstości prawdopodobieństwa przejścia $\omega(s,t/s_0,t_0)$, odowiadającej jednorodnemu procesowi (1), ma postać: [5]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left[a(t,s)\omega\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[b(t,s)\omega\right] = 0, \tag{2}$$

gdzie:

$a(t,s)$ - współczynnik przenoszenia,

$b(t,s)$ - współczynnik dyfuzji.

Warunki początkowo-brzegowe dla rozwiązania równania ruchu strumienia prawdopodobieństwa przejścia określone są, wychodząc z ograniczeń fizycznych badanego procesu. W ogólnym przypadku jako warunek początkowy można przyjąć:

$$\omega(s,t/s_0,t_0) = \omega_0(s), \qquad t = t_0 \tag{3}$$

Dla funkcji $\omega_0(s)$ powinien być spełniony warunek unormowania.

Warunki brzegowe, odpowiadające badanemu procesowi zmian dokładności $S(t)$, analitycznie można wyrazić w następujący sposób:

$$\frac{\partial\omega(s,t/s_0,t_0)}{\partial s} = 0, \qquad s = 0 \tag{4}$$

$$\omega(s,t/s_0,t_0) = 0, \qquad s = s_{kr} \tag{5}$$

Gęstość prawdopodobieństwa osiągnięcia przez proces losowy $S(t)$ poziomu krytycznego związana jest z gęstością prawdopodobieństwa przejścia zależnością: [5]

$$f(t) = -\int_{\infty}^{s_{kr}} \frac{\partial\omega(s,t/s_0,t_0)}{\partial t}\, ds \tag{6}$$

3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA FPK I WYZNACZENIE WSKAŹNIKÓW NIEZAWODNOŚCI

Równanie FPK (2) jest liniowym różniczkowym równaniem o pochodnych cząstkowych typu parabolicznego drugiego rzędu, o zmiennych współczynnikach $a(.)$ i $b(.)$. Metody rozwiązywania równań FPK są znane (patrz np. [3], [4], [5], [6], [7], [8] i tu nie będą omawiane. W dalszej części pracy pokażemy przykład znajdowania rozwiązania równania FPK dla określonych współczynników $a(.)$ i $b(.)$ oraz warunków początkowo-brzegowych.

Zakładamy, że $a(t,s) = m$, $b(t,s) = \sigma^2$, wówczas (2) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{m\partial\omega}{\partial s} + \frac{\sigma^2\partial^2\omega}{2\partial s^2} \tag{7}$$

Przez podstawienie [3]

$$\omega = \omega^* \cdot e^{\frac{m}{\sigma^2}(s-s_0) - \frac{m^2 t}{2\sigma^2}} \tag{8}$$

równanie (7) daje się sprowadzić do postaci równania typu dyfuzyjnego

$$\frac{\partial\omega^*}{\partial t} - \frac{\sigma^2\partial^2\omega^*}{2\partial s^2} = 0, \tag{9}$$

gdzie ω^* - nowa zmienna zależna.

Rozwiązaniem szczególnym równania (9) jest gęstość normalna

$$\omega^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \cdot \exp\left[-\frac{(s-s_0)^2}{2(t-t_0)\,\sigma^2}\right] \tag{10}$$

Przekształćmy warunki brzegowe (4) i (5) zgodnie z (8). Otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^* = \omega_0^*(s), \quad t = t_0 \\ &\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial s} + \frac{m}{\sigma^2}\cdot\omega^*\right) = 0, \quad s = 0 \\ &\omega^* = 0, \quad s = s_{kr} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dalej, dla uproszczenia obliczeń, przyjmujemy $t_0 = 0$, $s_{kr} = 1$. Wówczas rozwiązanie ogólne równania (9) będzie wyrażało się wzorem:

$$\omega^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \left\{\omega_0^*(\alpha)\left[\exp\left[-\frac{(\alpha-s)^2}{2\sigma^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(\alpha-s+2)^2}{2\sigma^2 t}\right]\right] + \right.$$

$$\left. + \omega_0^*(-\alpha)\cdot\left[\exp\left[-\frac{(\alpha+s)^2}{2\sigma^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(\alpha+s+2)^2}{2\sigma^2 t}\right]\right]\right\}\cdot d\alpha \tag{12}$$

Kładąc $\omega_0(s) = \delta(s)$ dla $s_0 = 0$ po pewnych przekształceniach, uwzględniając (8) oraz wzór

$$\omega(s,t/s_0,t_0) = \omega^*(s,t/s_0,t_0)\left|\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}\right|, \tag{13}$$

gdzie:

$\varphi(s,t) = s^*, \quad t^* = \varphi(t)$

$\varphi(.)$ - odwrotna do (8)

otrzymamy:

$$\omega(s,t/0,0) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\left\{\exp\left[-\frac{(s-mt)^2}{2\sigma^2\cdot t}\right] - \exp\left[-\frac{(s-2-mt)^2}{2\sigma^2\cdot t} + \frac{2m}{\sigma^2}\right]\right\} +$$

$$-\frac{2m}{\sigma^2}\,\Phi\left(\frac{mt-s}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \frac{2m}{\sigma^2}\exp\left[\frac{2m}{\sigma^2}(s-1)\right]\cdot\Phi\left(\frac{mt+s+2}{\sigma\cdot\sqrt{t}}\right), \tag{14}$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ - funkcja Laplace'a.

Gęstość trwałości dokładnościowej f(t) nietrudno już obliczyć ze wzoru (6) (całkując dla uproszczenia w granicach od 0 do 1).

$$f(t) = \frac{1+mt}{2\sigma t\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{(1-mt)^2}{2\sigma^2 t}\right] - \frac{m^2}{2\sigma^2}\,\Phi\left(\frac{1-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right), \tag{15}$$

Jeżeli uwzględni się tylko górną granicę dla procesu S(t), otrzymamy:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\cdot t\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{(1-mt)^2}{2\sigma^2\cdot t}\right] \tag{16}$$

Dla jednorodnego procesu Markowa z niemonotonicznymi realizacjami prawdopodobieństwo niewyjścia uogólnionego parametru z przedziału dopuszczalnego otrzymamy natychmiast ze wzoru (16):

$$R(t) = P(T \geqslant t) = \Phi\left(\frac{1-mt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left[\frac{2m}{\sigma^2}\right]\Phi\left(-\frac{1-mt}{\sigma\cdot\sqrt{t}}\right) \tag{17}$$

Człon drugi we wzorze (15) zwykle można pominąć, wówczas

$$R(t) = \Phi\left(\frac{1-mt}{\sigma\cdot\sqrt{t}}\right). \tag{18}$$

4. WNIOSKI

Niezawodność metrologiczna jest ważną eksploatacyjną charakterystyką urządzeń pomiarowych. Wyznaczenie jej wskaźników jest związane z analizą losowego procesu zmian właściwości metrologicznych w czasie badanych przyrządów pomiarowych. Jedną z metod pozwalających na wyznaczenie wskaźników

niezawodności może być metoda równań FPK w zastosowaniu do analizy markowskich procesów dyfuzyjnego typu[x)], będących modelami procesów zmian dokładności pomiaru. Niezbędne są przy tym opisane w pracy założenia i uproszczenia dotyczące procesu $\varepsilon(t)$, który w tym przypadku musi być "białym szumem", a więc procesem o przyrostach niezależnych.

Należy wreszcie zwrócić uwagę na fakt, że stosowanie równań FPK dla rozwiązywania podobnego problemu, gdy wymiarowość $n > 1$, napotyka na znaczne trudności, gdyż dla równania

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s_i}(a_i \cdot \omega) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 (b_{ij} \cdot \omega)}{\partial x_i \cdot \partial x_j} = 0 \quad n > 1 \tag{19}$$

do dziś nie otrzymano rozwiązania ogólnego.
Często jednak rozwiązuje się go numerycznie.

LITERATURA

[1] ФИРКОВИЧ Ш., БУТКЕВИЧ Я., КАЛУСКИ Я.: Марковский процесс как модель изменений точности измерительного прибора. АКТА IMEKO VI, Section 1, Dresden 1973, ss, 173-183.

[2] KAŁUSKI J.: Niezawodność metrologiczna przyrządów pomiarowych. Skrypt Politechniki Slaskiej nr 1143, Gliwice 1983.

[3] КОЛМОГОРОВ А. Н.: Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи Математических Наук, V, 1983.

[4] PISZCZEK K.: Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1982.

[5] СВЕШНИКОВ А. А.: Прикладные методы теории случайных функций. Наука, Москва, 1968, 464 стр.

[6] ПРАНИК Б. В., СТРЕЛЬНИКОВ В. П.: Приложение теории процессов Маркова к исследованию электрического контактирования слаботочных скользящих контактов. Электромеханика 1982, No I.

[7] СВЕШНИКОВ А. А.: Об одной задаче теории надёжности. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, No 3.

[8] СВЕШНИКОВ А. А. и др.: Вычисление вероятности пребывания одномерного марковского процесса в области с переменными границами. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, No 5.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski

Wpłynęło do Redakcji 5.11.1984 r.

x) Dla przypadku monotonicznych realizacji procesu S(t) sposób otrzymania f(t) i R(t) został pokazany w [2].

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА - ПЛАНКА - КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ НАДЁЖНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Р е з ю м е

В работе оговорены условия и показан пример применения метода кинетических уравнений Фоккера - Планка - Колмогорова для определения показателей метрологической надёжности измерительных приборов. Приведены расчетные формулы для практического пользования.

THE USE FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV EQUATIONS FOR ASSESSMENT OF METHROLOGICAL RELIABILITY OF MEASUREMENT EQUIPMENT

S u m m a r y

Conditions of the application and an example of the use of the method of kinetic Fokker - Planck - Kolmogorov equations for the assessment of performance indices of methrological reliability of measurement equipment are presented in the paper. Computational formula for practical assignment of the indices discussed in the paper are given.