ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

Andrzej ŚWIERNIAK

Instytut Automatyki
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

ZBIEŻNOŚĆ ALGORYTMÓW STEROWANIA ADAPTACYJNEGO DLA NIERÓWNOŚCIOWEGO MODELU NIEPEWNOŚCI[x)]

Streszczenie. W pracy rozważa się problem realizacji celu sterowania w układzie sterowania adaptacyjnego zawierającym układ sterujący, estymujący parametry oraz model.

Obiekt opisywany jest modelem nierównościowym wejściowo-wyjściowym. Dowód zbieżności algorytmu opiera się na zastosowaniu twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

1. WPROWADZENIE

Modele obiektów wykorzystywane do sterowania są aproksymacją rzeczywistych zależności między zmiennymi procesowymi. Różnica między obiektem a modelem wywołana nieznajomością lub niepełną znajomością parametrów i zakłóceń oraz niedokładnością pomiaru powoduje, iż zmienne występujące w modelu są w rzeczywistości zmiennymi niepewnymi. Uzupełnienie modelu podstawowego o model niepewności umożliwia syntezę algorytmów sterowania zapewniających realizację celu sterowania mimo niepełnej informacji o obiekcie. Jest to przy tym cel sterowania zmodyfikowany w stosunku do pierwotnie stawianego przez użytkownika systemu, uwzględniający istnienie niepewności. Najpopularniejszy jest model probabilistyczny (np. [1], [2]), w którym zmienne niepewne są zmiennymi losowymi lub procesami stochastycznymi, a wymaganie pożądanego zachowania się wyjścia układu zastępujemy, nieprecyzyjnie mówiąc, pożądanym przeciętnym zachowaniem się układu. Model probabilistyczny jest również najczęściej stosowanym modelem w literaturze dotyczącej sterowania adaptacyjnego, zwłaszcza regulacji samonastrajającej (np. [3], [4]) i sterowania suboptymalnego opartego na sterowaniu dualnym (np. [5], [6]). Innym modelem niepewności jest model o rozkładzie ograniczonym, w którym zmienne niepewne są elementami określonych zbiorów, najczęściej elipsoid lub wielościanów (np. [7], [8]). Podobnie interpretowane mogą być zmienne niepewne w modelach nierównościowych w dziedzinie równań stanu (np.: [9], [10]) lub wejściowo-wyjściowej (np.: [11]), których

x) Praca częściowo finansowana z projektu badawczego R.P.I.02: Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych.

geneza jest jednak odmienna niż modeli o rozkładzie ograniczonym. Niepewność reprezentuje w nich bowiem błąd aproksymacji obiektu równaniami modelu. W pracy wykorzystywany jest model nierównościowy niepewności typu wejście-wyjście do syntezy układu sterowania adaptacyjnego. Wymogi stawiane układowi przypominają warunki narzucane na układ z modelem odniesienia (np. : [12]), które jednak analizowane są metodami czysto deterministycznymi, bez uwzględnienia modelu niepewności. Podstawą przedstawionej analizy jest twierdzenie Banacha o punkcie stałym, które wykorzystywane było w literaturze dotyczącej układów sterowania (np.: [13], [14]) do rozwiązywania problemów deterministycznych. Należy podkreślić, że zbieżność algorytmu sterowania adaptacyjnego będzie rozumiana w sensie realizacji celu sterowania aczkolwiek pokażemy, że warunki ją zapewniające gwarantują również zbieżność w sensie zgodności modelu z obiektem.

2. MODEL Z NIEPEWNOŚCIĄ

Przyjmować będziemy, że model podstawowy układu jest modelem wejściowo-wyjściowym:

$$y = f(u,a), \tag{1}$$

gdzie u, y, a oznaczają odpowiednio wejście, wyjście i parametry modelu, natomiast: $f: U \times \mathcal{A} \to \mathcal{Y}$ jest odwzorowaniem iloczynu kartezjańskiego przestrzeni wejść U i parametrów $\mathcal{A}$ w unormowaną przestrzeń wyjść $\mathcal{Y}$. Jeśli znamy ograniczenie co do normy, błędu wprowadzanego przez aproksymację obiektu modelem, można uważać, że wyjścia obiektu są kulami:

$$Y = \{y : \| y - f(u,a)\| < \varepsilon\}, \tag{2}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest ograniczeniem błędu aproksymacji. Obiekt można zatem opisać modelem z niepewnością:

$$Y = F(u,A), \tag{3}$$

gdzie wyjścia Y są określone przez (2), A oznacza zbiory parametrów, które mogą być użyte w modelu (2), tzn.:

$$A = \{a : (2) \text{ jest spełnione}\}, \tag{4}$$

natomiast $F : U \times 2^{\mathcal{A}} \to B_y$ odwzorowuje iloczyn kartezjański wejść i podzbiorów parametrów w kule wyjść.

Cel, jaki stoi zazwyczaj przed projektantem systemu sterowania, polega z reguły na zapewnieniu pożądanego zachowania się układu w sensie otrzymywania określonych odpowiedzi układu (pożądanych przebiegów wyjściowych) w określonych warunkach (zadanych pobudzeniach zewnętrznych, w określonym przedziale czasu, w zadanej chwili, np.: końcowej itp.). Nawet w przypadku

braku niepewności realizacja celu sterowania w postaci zapewnienia określonego przebiegu sygnału wyjściowego jest często niemożliwa ze względu na istniejące ograniczenia narzucone na sterowanie. Tym bardziej jest to wymaganie nierealne w przypadku występowania niepewności. Zostanie ono zastąpione wymaganiem pozostawienia wyjścia w określonym otoczeniu pożądanej odpowiedzi.

Model celu sterowania można zatem zapisać w postaci:

$$y(t) \in Y(t) \subset Y^*(t) = \left\{ y(t) : \| y(t) - y^*(t) \| \leq \varepsilon^* \right\}, \tag{5}$$

gdzie t jest parametrem charakteryzującym określone warunki (który w dalszym zapisie będzie pominięty), natomiast $y^*(t)$ jest pożądanym przebiegiem, a $\varepsilon^* > 0$ określa pożądane otoczenie.

Niech ponadto $V : U \times B_y \longrightarrow 2^A$ będzie odwzorowaniem odwrotnym do odwzorowania (3) charakteryzującego obiekt. Wówczas:

$$A = V(u, Y) \tag{6}$$

może być uważane za model estymatora parametrów.

3. MODEL UKŁADU STEROWANIA ADAPTACYJNEGO

W modelu układu adaptacyjnego (rys. 1) wyróżnić można obiekt oraz regulator adaptacyjny składający się z trzech elementów: sterującego R, estymującego G oraz modelu obiektu F. Element sterujący reprezentowany przez odwzorowanie $R : B_y^2 \times 2^A \times B_y \longrightarrow U$ wypracowuje sygnał sterujący na podstawie informacji o wyjściu obiektu Y oraz ocenie parametru A, a także wyjściu z modelu Z i celu sterowania Y^*. Element estymujący $G : B_y^2 \times U \times B_y \longrightarrow 2^A$ określa ocenę parametru A, natomiast model ma strukturę identyczną jak (3), przy czym parametr A jest zastąpiony jego oceną $\hat{A}$.

Taki sposób sterowania adaptacyjnego może być zaliczony do algorytmów explicite ze względu na fakt wyznaczania parametrów modelu obiektu i stosowania tych ocen w algorytmie sterowania. Możliwy jest również model sterowania adaptacyjnego z algorytmem implicite, tzn. wyznaczającym od razu parametry regulatora. Wówczas niepotrzebny jest element reprezentujący model obiektu, zaś element estymujący może realizować odwzorowanie:

$$G(Y, Z, u, Y^*) = V(u, Y^*), \tag{7}$$

czyli jest estymatorem dla Y równego Y^*.

Model takiego układu sterowania adaptacyjnego przedstawia rys. 2. W dalszej części pracy analizowany jest głównie układ z rys. 1, gdyż układ z rys. 2 może być uważany jako jego szczególny przypadek.

Rys. 1. Model układu adaptacyjnego typu explicite

Fig. 1. Model of adaptive system of explicite type

Rys. 2. Model układu adaptacyjnego typu implicite

Fig. 2. Model of adaptive system of amplicite type

Zauważmy, że w pracy stosowane są zatem trzy formy modelu obiektu:

- model podstawowy (1) bez niepewności, którego wyjścia nie odpowiadają na ogół wyjściom obiektu;
- model rozszerzony (3), utożsamiany z obiektem w tym sensie, że wyjścia obiektu należą do zbiorów, którymi są wyjścia modelu (3). Model ten wynika z relacji 2 zachodzącej w obiekcie, może zatem strukturą przypominać model podstawowy (np. jeśli chodzi o liczbę parametrów). Parametry modelu (3) oznaczone przez A są jednak zbiorami, nie zaś pojedynczymi elementami, jakimi są parametry a w modelu (1). Zauważmy, że mimo utożsamiania modelu (3) i obiektu w wyżej wspomnianym sensie model ten nie jest obiektem, którego rzeczywista struktura, liczba parametrów, a nawet charakter zależności między poszczególnymi zmiennymi nie są znane;
- model wykorzystywany w układzie sterowania adaptacyjnego, który można nazwać modelem z dostrajaniem, posiadający strukturę identyczną jak model rozszerzony, lecz którego parametry $\hat{A}$ (których liczba jest taka jak A) mają wartości estymowane przez element estymujący. Wyjścia tego modelu mogą różnić się zarówno od wyjść obiektu, jak i modelu rozszerzonego. Pokażemy, że będą się one pokrywały w przypadku realizacji przez układ adaptacyjny celu sterowania.

4. WARUNKI REALIZACJI CELU STEROWANIA

Nim przejdziemy do sprecyzowania warunków zbieżności algorytmu sterowania adaptacyjnego, wprowadzimy pewne wstępne założenia. Przyjmiemy, że przestrzeń sygnałów wyjściowych jest przestrzenią zupełną. Przestrzeń wejściowa U jest przestrzenią metryczną z metryką $\rho: U \times U \to R$.

W przestrzeni zbiorów wprowadzimy metrykę Hausdorffa $d(\cdot,\cdot)$ zdefiniowaną jako:

$$d(X,Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\| , \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\| \right\} \tag{8}$$

Przestrzeń B_y z metryką Hausdorffa jest przestrzenią zupełną [15]. Podobnie, przyjmując że w przestrzeni parametrów $\mathcal{A}$ można określić metrykę ρ_A, zdefiniujemy w $2^{\mathcal{A}}$ metrykę Hausdorffa $d_A(\cdot,\cdot)$ jako:

$$d_A(A,B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho_A(a,b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho_A(a,b) \right\} \tag{9}$$

Ponadto zdefiniujemy odległości w iloczynie kartezjańskim przestrzeni metrycznych (P, d_P), (Q, d_Q) jako:

$$d_x((P_1,Q_1),(P_2,Q_2)) = \max (d_P(P_1,P_2), d_Q(Q_1,Q_2)) \tag{10}$$

Obecnie możemy sformułować twierdzenie określające warunki realizacji celu sterowania.

Twierdzenie:

Przyjmujemy następujące założenia:
Istnieją stałe m, k dodatnie takie, że $m\,k < 1$ oraz

Z 1. $d(F(u_1,A_1), F(u_2,A_2)) \leqslant k\, d_x((u_1,A_1), (u_2,A_2))$

(Warunek ten jest spełniony np. w przypadku dowolnych modeli różniczkowalnych w sposób ciągły względem sterowań i parametrów przy założeniu ograniczoności zbiorów parametrów (4).

Z 2. $d(V(u_1,Y_1), V(u_2,Y_2)) \leqslant m\, d_x((u_1,Y_1), (u_2,Y_2))$

Z 3. Istnieje u^* takie, że $F(u^*, \hat{A}) = \hat{Y} \subset Y^*$

Wówczas zachodzi:

T. W układzie z rys. 1 cel Y^* jest osiągalny, tzn.

$$Y \subset Y^*$$

Związki Z 1., Z 2., zachodzą dla dowolnych $u_1, u_2 \in U$, $Y_1, Y_2 \in B_y$, $A_1, A_2 \in 2^{\mathcal{A}}$. Można je interpretować jako warunki Lipschitza.

Założenie Z 3. może być interpretowane jako wymaganie (w pewnym sensie zdefiniowanej) sterowalności modelu do Y^*. Dowód przeprowadzimy w oparciu o twierdzenie Banacha o punkcie stałym [13].

Dobierzmy R oraz G tak, aby:

$$F(R(Y,Y,\hat{A},Y^*), \hat{A}) = Y^* \tag{11}$$

$$G(Y,Y,u,Y^*) = V(u,Y^*) = \hat{A} \tag{12}$$

Spełnienie (11) jest możliwe, gdyż wystarczy przyjąć dla $Y = Z$:

$$R(Y,Z,\hat{A},Y^*) \subset F^{-1}(Y,\hat{A})^{x)}$$

i np.: R liniowe w funkcji $Y - Z$ dla $Y \neq Z$.
Aby spełnić (12) można przykładowo przyjąć:

$$G(Y,Z,u,Y^*) = V(u,Y^*)$$

(tak jak w układzie bez modelu). Załóżmy ponadto, że dla $u = \hat{u}$ zachodzi:

$$Y = Z, \quad \text{czyli} \quad F(\hat{u},A) = F(\hat{u},\hat{A}) = \hat{Y}$$

Zatem $A = V(\hat{u},\hat{Y}) = \hat{A}$,
ale wówczas:

$$\hat{A} = G(\hat{Y},\hat{Z},\hat{u},Y^*) = V(\hat{u},Y^*),$$

czyli

$$\hat{Z} = F(\hat{u},\hat{A}) = F(\hat{u},V(\hat{u},Y^*)) = Y^*,$$

więc

$$\hat{Z} = \hat{Y} = Y^*. \tag{13}$$

(13) wskazuje, że para (Y^*, Y^*) jest punktem stałym produktu (Y,Z) otrzymanego w układzie zamkniętym z rys. 1.

Dla zakończenia dowodu trzeba pokazać, że jest to punkt przyciągania.

W tym celu dobierzmy element sterujący i estymujący tak, aby R i G spełniały warunek Lipschitza względem iloczynów kartezjańskich swoich argumentów odpowiednio ze stałymi m_1 i m_2.
A zatem zachodzi:

$$\varrho(u_1,u_2) \leqslant m_1[\max(d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\ d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2))] \tag{14}$$

$$d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2) \leqslant m_2[\max(d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\ \varrho(u_1,u_2))], \tag{15}$$

ale na podstawie (12) G musi się dla $Y = Z$ pokrywać z V, a zatem $m_2 \leqslant m$.
Przyjmijmy $m_2 = m$. Z założenia Z 1. wynika, że

$$d(F(u_1,\hat{A}_1),\ F(u_2,\hat{A}_2)) \leqslant k\{\max[\varrho(u_1,u_2),\ d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2)]\}.$$

---

x) Odwracalność odwzorowania F należy traktować symbolicznie, tzn. w sensie matematycznym operator może być nieodwracalny lub jego odwrotność nierealizowalna. Zapis tu przyjęty oznacza taki dobór sterowania u, aby podanie go na model $F(u,\hat{A})$ dawało $Z=Y$. Istnienie choć jednego takiego sterowania można interpretować jako pewnego rodzaju warunek sterowalności modelu.

Weźmy pod uwagę odległość w iloczynie kartezjańskim (Y,Z):

$$d_x((F(u_1,\hat{A}_1),\ F(u_1,A)),\ (F(u_2,\hat{A}_2),\ F(u_2,A))) =$$

$$= \max\left\{d(F(u_1,\hat{A}_1),\ F(u_2,\hat{A}_2)),\ d(F(u_1,A),\ F(u_2,A))\right\} =$$

$$= k\left\{\max[\varrho(u_1,u_2),\ d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2)]\right\} \tag{16}$$

Z kolei

$$\varrho(u_1,u_2) \leqslant m_1\left\{\max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\ m(\max d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\varrho(u_1,u_2))]\right\}$$

Niech $m \leqslant 1$,
wówczas:

$$\varrho(u_1,u_2) < m_1\left\{\max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\ m\varrho(u_1,u_2)]\right\},$$

co jest sens rozważać tylko dla $m_1 m < 1$.
Wówczas:

$$\varrho(u_1,u_2) \leqslant m_1\left\{\max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2)]\right\} \tag{17}$$

Niech z kolei $m > 1$,
wówczas:

$$\varrho(u_1,u_2) \leqslant m_1\ m\left\{\max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\varrho(u_1,u_2)]\right\}$$

dla $m_1\ m < 1$

$$\varrho(u_1,u_2) \leqslant m_1\ m\left\{\max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2)]\right\} \tag{18}$$

Przechodząc do oszacowania $d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2)$ otrzymujemy:

$$d_A(A_1,A_2) \leqslant m\left\{\max\left[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\ m_1[\max(d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2),\ d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2)]\right]\right\}$$

Przyjmując $m_1 \leqslant 1$, mamy dla $m_1\ m < 1$

$$d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2) \leqslant m\left\{\max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2)]\right\},$$

natomiast dla $m_1 > 1$

$$d_A(\hat{A}_1,\hat{A}_2) < m_1\ m\ \max[d(Y_1,Y_2),\ d(Z_1,Z_2)]$$

Reasumując:

$$\varrho(u_1,u_2) \leqslant \begin{cases} m_1\ d_x((Y_1,Z_1),(Y_2,Z_2)) & m \leqslant 1 \\ d_x((Y_1,Z_1),(Y_2,Z_2)) & m > 1 \end{cases} \tag{19}$$

$$d_{\mathcal{A}}(\hat{A}_1,\hat{A}_2) \leqslant \begin{cases} m d_x((Y_1,Z_1),\ (Y_2,Z_2)) & m_1 \leqslant 1 \\ d_x((X_1,Z_1),\ (Y_2,Z_2)) & m_1 > 1 \end{cases} \tag{20}$$

Podstawiając (19), (20) do (16) otrzymuje się:

$$d_x((F(u_1,\hat{A}_1),\ F(u_1,A)),\ (F(u_2,\hat{A}_2),\ F(u_2,A))) \leqslant c\ d_x((Y_1,Z_1),(Y_2,Z_2)), \tag{21}$$

gdzie:

$$c = k \max(m,m_1), \tag{22}$$

Warunek zwężania $0 < c < 1$ w połączeniu z warunkiem $m_1\ m < 1$ sprowadza się do żądania doboru m_1 tak, by:

$$m_1 < \begin{cases} \min\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{k}\right), & \text{gdy} \quad m \leqslant 1 \\ \frac{1}{m}, & \text{gdy} \quad m > 1 \end{cases}$$

Warunek zwężania zapewnia, że para (Y^*, Y^*) będąca punktem stałym odwzorowań dających parę (Y,Z) w zamkniętym układzie sterowania adaptacyjnego jest punktem przyciągania. A zatem Y^* jest osiągalny zarówno przez model, jak i obiekt.

UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano warunki zbieżności pewnego modelu algorytmu sterowania adaptacyjnego w przypadku nierównościowego modelu niepewności typu wejście -wyjście. Cechą charakterystyczną proponowanego modelu sterowania adaptacyjnego jest to, że estymator wytwarza ocenę parametrów w postaci zbiorów. W praktycznej realizacji zbiory te muszą być przybliżane zbiorami wypukłymi, np.: kulami, co jednak nie zmienia przedstawionych warunków realizacji celu sterowania. Warunki te wynikają z zastosowania twierdzenia Banacha o punkcie stałym w przestrzeni Banacha sygnałów wyjściowych. Podobny model i sposób określania warunków zbieżności może być przedstawiony dla ogólnego modelu niepewności [16], w którym wyjścia i parametry byłyby określone jako elementy odpowiednich przestrzeni Mengera.

LITERATURA

[1] Aström K. J.: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, New York 1970.

[2] Schweppe F. C.: Układy dynamiczne w warunkach losowych, WNT, Warszawa 1978.

[3] Aström K. J., Wittenmark B.: On self tuning regulators, Automatica, v. 9, n. 2, ss. 185-199, 1973.

[4] Clarke D. W. Gawthrop P. I.: Self-tuning controller, Proceedings IEE, v. 122, n. 9, ss. 929-934, 1975.

[5] Bar-Shalom Y., Tse E.: An actively adaptive control for linear systems with random parameters via the dual control approach, IEEE Trans. AC,AC-18, n. 2, ss. 109-117, 1973.

[6] Jacobs O. L. R.: Introduction to adaptive control, [w:] Self tuning and adaptive control, Pergamon Press, Oxford, 1982.

[7] Bertsekas D. P., Rhodes I. B.: Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty, IEEE Trans. AC. AC-16, n. 2, ss. 117-128, 1971.

[8] Bertsekas D. P., Rhodes I. B.: On the minimax reachability of target sets and target tubes, Automatica, v. 7, n. 3, ss. 233-247, 1971.

[9] Świerniak A.: State inequalities approach to control systems with uncertainty, Proceedings IEE, pt., D, v. 129, n. 6, ss. 271-275, 1982.

[10] Leitmann G.: On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems, ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, 103, ss. 95-102, 1981.

[11] Świerniak A.: Wpływ błędu aproksymacji MNK na jakość sterowania układami dynamicznymi, Podstawy Sterowania, t. 11, z. 2, ss. 161-167, 1981.

[12] Landau I. D.: A survey of model-reference adaptive techniques theory and applications, Automatica, v. 10, n. 4, ss. 353-379, 1974.

[13] Kudrewicz J.: Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektroników. PWN, Warszawa 1976.

[14] Kulikowski L.: Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej. WNT Warszawa 1965.

[15] Kuratowski K., Topology, v. 1, PWN, Warszawa, 1966.

[16] Świerniak A.: A unified approach to controllers design for uncertain systems, Int. J. Control, v. 37, n. 3, ss. 463-470, 1983.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek

Wpłynęło do Redakcji 30.10.1984.

СХОДИМОСТЬ АЛГОРИТМОВ АДАПТАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕРАВЕНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ НЕУВЕРЕННОСТИ

Р е з ю м е

В работе обсуждается проблема реализации цели управления в системе адаптативного управления, состоящей из системы, управления оценивающей параметры и модели. Объект описывается неравенственной входно-выходной моделью. Приводится доказательство сходимости на основании теоремы Банаха о постоянной точке.

ADAPTIVE CONTROL ALGORITHMS CONVERGENCE FOR INEQUALITY MODELS OF UNCERTAINTY

S u m m a r y

An adaptive control system consisting of a controller, parameter estimator and model is considered. Conditions of control objective reachability are found in the case of an inequality input-output model with uncertainty. Convergence of an algorithm is proved using Banach fixed point theorem.