ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

Andrzej ŚWIERNIAK

Instytut Automatyki
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

O PEWNYM STEROWANIU DLA UKŁADU Z NIERÓWNOŚCIOWYM MODELEM NIEPEWNOŚCI x)

Streszczenie. W pracy przedstawiono syntezę prawa sterowania zapewniającego zadawalającą wartość wskaźnika jakości. Sterowanie to jest nieciągłe i nie uwzględnia się jego kosztów we wskaźniku jakości. Niepewność modelu jest reprezentowana przez ograniczenia dopuszczalnych odchyłek macierzy stanu i wejść.

1. WSTĘP

Pojęcie sterowania zadowalającego czyli gwarantującego odpowiednią wartość wskaźnika jakości zostało wprowadzone w [1]. Sterowanie to ma zapewniać określone zachowanie się wskaźnika przy najmniej korzystnym zachowaniu się zmiennych niepewnych, których obecność wynika z niedokładnie znanych parametrów modelu, zmian tych parametrów, czy wręcz niepełnej adekwatności modelu. Niepewność jest scharakteryzowana przez ograniczenia na dopuszczalne odchyłki parametrów modelu.

Również w niniejszym opracowaniu niepewność ma podobny charakter, zbliżający jej model do tzw. modelu o rozkładzie ograniczonym, np. [2], [3]. Charakter tych ograniczeń jest jednak nieco innego typu niż w [1], gdyż znamy ograniczenia normy poszczególnych zmiennych niepewnych. Jest to więc model typu nierównościowego [4], [5]. Ponadto przyjmujemy, że dodatkowe sterowanie (poprawka sterowania) jest ograniczone, natomiast jego koszty nie są uwzględniane we wskaźniku jakości. Sterowanie to jest podobne do proponowanego w np. [6], [7] sterowania zapewniającego ostateczną ograniczoność trajektorii, dopuszcza się jednak jego nieciągłość, gdyż nie stanowi ona przeszkody w stosowaniu aparatu Bellmana - Hamiltona - Jacobiego, który jest podstawą rozważań przedstawionych w pracy.

2. MODEL OBIEKTU I NIEPEWNOŚCI

Rozważany jest model liniowy układu o postaci równań stanu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u + Cv \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

x) Praca częściowo finansowana z projektu badawczego RP.I.02: Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych.

w którym niepewność tkwi w $\Delta A, \Delta B$ oraz w v. Wartości zerowe zmiennych niepewnych prowadzą do modelu nominalnego.

Wskaźnik jakości dany jest w postaci funkcjonału kwadratowego:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{2}$$

Zakładać dodatkowo będziemy, że zmienne niepewne nie mają "większych" możliwości oddziaływania niż tor sterowania, tzn. że istnieją takie A_1, B_1, C_1, że

$$\begin{aligned} \Delta A &= BA_1 \\ \Delta B &= BB_1 \\ C &= BC_1 \end{aligned} \tag{3}$$

Przy czym wielkości te nie są znane z wyjątkiem ich ograniczeń co do normy o postaci:

$$\begin{aligned} \|A_1\| &\leqslant a \\ \|B_1\| &\leqslant b < 1 \\ \|C_1 v\| &\leqslant c \end{aligned} \tag{4}$$

Modelem niminalnym nazywać będziemy model (1), w którym źródła niepewności $\Delta A, \Delta B$, v są równe zero, tzn. ma on postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= Ax^* + Bu \\ x^*(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5}$$

Uwzględniając (3) można model (1) zapisać w postaci:

$$\dot{x} = Ax + B(u + e), \tag{6}$$

gdzie:

$$e = A_1 x + B_1 u + C_1 v \tag{7}$$

Norma e jest zatem ograniczona przez:

$$\|e\| \leqslant a \|x\| + b \|u\| + c \leqslant E(\|x\|) \tag{8}$$

Prawo sterowania składa się z nominalnego prawa sterowania, tzn. minimalizującego wskaźnik dla modelu nominalnego, którego koszt wliczany jest do wskaźnika oraz poprawki sterowania Δu, której kosztu nie wliczamy do wskaźnika, ale która jest ograniczona, ściślej, której norma nie przekracza górnego ograniczenia błędu e, tzn. wartości $E(\|x\|)$.

3. SYNTEZA PRAWA STEROWANIA

Nominalne prawo sterowania ma postać:

$$u^*(x) = -R^{-1}B^TKx, \tag{9}$$

gdzie K jest symetrycznym, dodatnio określonym rozwiązaniem równania Riccatiego z zerowym warunkiem końcowym. Oszacowanie (8) przyjmuje zatem postać:

$$\|e\| \leqslant a\|x\| + b\|R^{-1}B^TKx\| + b\|\Delta u(x)\| + c = E(\|x\|) \tag{10}$$

Przyjmując (dla x niezerujących B^TKx)[x)]

$$\Delta u(x) = -\frac{B^TKx}{\|B^TKx\|}E(\|x\|) \tag{11}$$

pokażemy, że sterowanie

$$u = u^* + \Delta u \tag{12}$$

pozwala na uzyskanie wartości wskaźnika nie większej niż optymalna dla modelu nominalnego (przy założeniu, że tylko u^* wchodzi do wskaźnika). Innymi słowy, chcemy, aby koszt trajektorii mierzony wskaźnikiem

$$\int_0^T x^T(Q + KBR^{-1}B^TK)x\,dt$$

nie przekraczał wartości $x^T(0)Kx(0)$.

Przekształcając (10) mamy:

$$a\|x\| + b\|R^{-1}B^TKx\| + bE(\|x\|) + c = E(\|x\|),$$

czyli:

$$E(\|x\|) = (1-b)^{-1}(a\|x\| + b\|R^{-1}B^TKx\| + c) \tag{13}$$

W celu wykazania prawdziwości hipotezy wysuniętej przy formułowaniu prawa sterowania udowodnimy, że funkcja

$$V = \frac{1}{2}x^TKx \tag{14}$$

spełnia nierówność:

$$\frac{1}{2}(x^TQx + u^{*T}Ru^*) + \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + B(u^* + \Delta u + e)) + \frac{\partial V}{\partial t} \leqslant 0 \tag{15}$$

---

x) Dla x zerujących B^TKx, tzn. $x \in N(B^TKx)$ można przyjąć dowolne $\|\Delta u(x)\| \leqslant E(\|x\|)$

Mamy bowiem (równanie Hamiltona - Jacobiego - Bellmana dla modelu nominalnego):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\,(x^T Q\, x + u^{*T} R\, u^*) + \frac{\partial V}{\partial x}\,(A\, x + B\, u^*)$$

Z drugiej strony

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\, B(\Delta u + e) = x^T KB\left(-\frac{B^T Kx}{\|B^T Kx\|}\, E(\|x\|) + e\right) = -\frac{x^T KBB^T Kx\; E(\|x\|)}{\|B^T K\, x\|} +$$

$$+\, x^T KBe \leqslant -\|B^T K\, x\|\; E(\|x\|) + \|B^T K\, x\|\, \|e\| \leqslant 0$$

A zatem zachodzi (15). Z (15) wynika, że:

$$\int_0^T (\hat{x}^T Q\, \hat{x} + u^{*T}(\hat{x}) R u^*(\hat{x}))\, dt \leqslant \hat{x}^T(0) K(0) \hat{x}(0) \tag{16}$$

dla dowolnego $\hat{x}$ będącego rozwiązaniem (1) przy u danym przez (12). Tak więc dodanie "taniej" poprawki sterowania umożliwia uzyskanie wartości wskaźnika nie większej niż dla modelu nominalnego sterowanego przy zastosowaniu nominalnego prawa sterowania.

Przyjmijmy, że podobnie jak poprzednio dysponujemy możliwością zastosowania "taniego" (tzn. nie uwzględnionego we wskaźniku) sterowania ograniczonego co do normy przez:

$$\|\Delta u\| < U \tag{17}$$

Jeśli tylko zachodzi:

$$U > E(\|x\|) \tag{18}$$

dla $E(\|x\|)$ danego przez (13), to wówczas (11) jest dopuszczalną poprawką sterowania zapewniającą ten sam efekt co poprzednio.

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy proponuje się zastosowanie nieliniowego nieciągłego regulatora zapewniającego gwarantowaną wartość wskaźnika jakości. Rezultat ten osiągnięto przy założeniu, że sterowanie dominuje niepewność modelu liniowego, tzn. działa w tym samym torze i jego poprawka może mieć nie mniejszą normę oraz że koszt poprawki niwelującej wpływ niepewności nie jest wliczany do wskaźnika. To pozornie sztuczne założenie staje się naturalne, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że w większości rzeczywistych problemów pełny wskaźnik kwadratowy jest jedynie narzędziem syntezy, podczas gdy w rzeczywistości interesuje nas jedynie koszt trajektorii, a więc część zależna jawnie od stanu. Racjonalne sformułowanie problemu syntezy można w tym przypadku przedstawić jako takie ukształtowanie trajektorii, aby jej koszt, mierzony w postaci:

$$\int_0^T x^T(Q + KBR^{-1}B^TK)x dt,$$

nie przekraczał wartości $x^T(0)Kx(0)$. Problem nie komplikuje się, jeśli założyć pomiar wektora stanu z błędem o ograniczonej normie. Wymagana jest jedynie większa (co do normy) wartość sterowań.

LITERATURA

[1] Chang S. S. L., Peng T. K. C.: Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters, IEEE Trans. on A. C., AC - 17, n. 4 (1972), pp. 474-482.

[2] Schweppe F.: Układy dynamiczne w warunkach losowych, WNT, Warszawa 1978.

[3] Witsenhausen H. S.: A minimax control problem for sampled linear systems, IEEE Trans. on A. C., AC - 13, n. 1 (1968), pp. 5-21.

[4] Świerniak A.: State inequalities approach to control systems with uncertainty, Proc. IEE, v. 129, pt. D, n. 6 (1982), pp. 271-275.

[5] Świerniak A.: Wpływ błędu aproksymacji MNK na jakość sterowania obiektami dynamicznymi, Podstawy Sterowania T. 11, z. 2, (1981), pp. 161-168.

[6] Leitmann G.: On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems, ASME, J. of Dynamic Systems, Meas. and Control, v. 102 (1982), pp. 96-102.

[7] Świerniak A.: Zastosowanie pojęcia stabilności praktycznej do syntezy układów z nierównościowym modelem niepewności, Mat. IV Konf. Cybernetyka w Gospodarce Morskiej, 1985 ss. 206-214.

Recenzent: Prof. dr inż. Tadeusz Puchałka

Wpłynęło do Redakcji 20.04.1985 r.

УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕРАВЕНСТВЕННОЙ МОДЕЛЬЮ НЕУВЕРЕННОСТИ

Р е з ю м е

В работе дан синтез закона управления дающего удовлетворительное значение квадратичного показателя качества для обьекта описанного линейной моделью с неуверенностью. Управление это не является непрерывной функцией и его стоимость не входит в показатель качества. Неуверенность модели представляется путём наложения ограничений на допустимые отклонения матрицы состояния и входов.

GUARANTEED COST CONTROL OF SYSTEMS WITH INEQUALITY MODELS OF UNCERTAINTY

S u m m a r y

Control law design ensuring a guaranteed value of a quadratic performance index for a plant described by a linear model with uncertainty is presented. The control law is discontinuous and is assumed to be "cheap". The uncertainty of the model is represented by the bounds of feasible deviations of the state and the input matrices.