ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

Lesław TOPÓR - KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

ANALIZA OBWODÓW OSOBLIWYCH METODĄ MACIERZOWYCH FORMUŁ BOOLOWSKICH

Streszczenie. Opisano metodę analizy obwodów wielowęzłowych za pomocą formuł boolowskich zawierających macierze boolowskie połączeń pośrednich oraz pełnych połączeń sieci złożonych z elementów osobliwych.

1. WSTĘP

Jak pokazano w pracach [3], [4], [5], elementy osobliwe, takie jak: nullator, norator, przerwa, zwarcie, źródła autonomiczne, idealne diody oraz uogólnione komutatory elektroniczne można opisywać za pomocą formuł boolowskich o postaci:

$$A\,\tilde{i} + B\,\tilde{u} = 0, \tag{1}$$

w której:

A, B - operatory logiczne o wartościach ze zbioru $\{0,\ 1\}$, „."„+"„=" - odpowiednio logiczne działania koniunkcji, alternatywy i równoważności.

Natomiast $\tilde{i}$, $\tilde{u}$ są N transformacjami prądu i napięcia. Transformacja N przekształca zbiór R liczb rzeczywistych w zbiór dwuelementowy $\{0,\ 1\}$ według następującej definicji:

$$Nx = \tilde{x} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in R \text{ i jest równe tylko } 0 \\ 1 & \text{gdy } x \in R \text{ i jest dowolne} \end{cases} \tag{2}$$

Własności opisywanego przez formułę (1) dwójnika osobliwego określone są jednoznacznie przez operatory A, B, gdyż prąd i napięcie mogą przyjmować tylko takie wartości, dla których formuła ta jest spełniona. Operatory te mogą być stałe [3], zależne od czasu [3] lub od zmiennych zaciskowych i, u [5].

2. MACIERZE BOOLOWSKIE

Macierzami boolowskimi będą nazywane macierze kwadratowe, których elementy mogą przyjmować jedynie wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0,1\}$. Na macierzach tych można zdefiniować pewne operacje poprzez operacje na ich elementach. Niech macierze $A = [a_{ij}]$ oraz $B = [b_{ij}]$ są macierzami boolowskimi o wymiarze $k \times k$, wtedy zachodzi:

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{dla } i,j = 1,\dots k \tag{3}$$

$$A + B = C \Longleftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \qquad - " - \tag{4}$$

$$A \cdot B = C \Longleftrightarrow a_{ij} \cdot b_{ij} = c_{ij} \qquad - " - \tag{5}$$

W odróżnieniu od operacji (4) i (5), które można nazwać sumą i iloczynem logicznym macierzy A i B, można także zdefiniować sumę macierzową oraz iloczyn macierzowy macierzy boolowskich A i B (relacje (6) i (7)).

$$A \# B = C \Longleftrightarrow c_{ij} = \prod_{l=1}^{k} (a_{il} + b_{lj}) \quad \text{dla } i,j = 1,\dots k \tag{6}$$

$$A \times B = C \Longleftrightarrow c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj} \quad \text{dla} \quad - " - \tag{7}$$

Przez zerową macierz boolowską będzie rozumiana macierz 0 o wszystkich elementach równych zero. Na podstawie relacji (6) i (7) można także w oczywisty sposób zdefiniować potęgowanie sumacyjne (6a) oraz iloczynowe (7a) macierzy boolowskich:

$$A^{\# n} = \underbrace{A \# A \# \dots \# A}_{n} \tag{6a}$$

$$B^{xn} = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{n} \tag{7a}$$

3. MACIERZOWE FORMUŁY BOOLOWSKIE

Sieć k-węzłową złożoną z elementów osobliwych, opisywanych formułami boolowskimi typu (1), można opisać macierzową formułą boolowską połączeń bezpośrednich o postaci:

$$A \cdot \breve{I}_G + B.\breve{U}_G = 0, \tag{8}$$

w której:

$A = [a_{ij}]$ - prądowa boolowska macierz połączeń bezpośrednich sieci osobliwej,

a_{ij} - operator A dwójnika osobliwego w gałęzi łączącej węzeł i z j,

$a_{ij} = 0$ dla $i = j$

$B = [b_{ij}]$ - napięciowa boolowska macierz połączeń bezpośrednich sieci osobliwej,

b_{ij} - operator B dwójnika osobliwego w gałęzi łączącej węzeł i z j,

$b_{ij} = 1$ dla $i = j$,

$\tilde{I}_G = [\tilde{i}^G_{ij}]$ - macierz N transformacji prądów gałęziowych, i^G_{ij} - N transformacja prądu gałęzi łączącej węzły i oraz j,

$\tilde{U}_G = [\tilde{u}^G_{ij}]$ - macierz N transformacji napięć gałęziowych, u^G_{ij} - N transformacja napięcia gałęzi łączącej węzły i oraz j, przy czym $i, j = 1, 2, \ldots k$.

Macierze A i B połączeń bezpośrednich sieci osobliwej można otrzymać natychmiast ze znajomości operatorów A i B opisujących poprzez formuły (1) elementy osobliwe poszczególnych gałęzi. Dla pełnej analizy własności sieci konieczna jest znajomość wypadkowych zastępczych dwójników osobliwych określonych między poszczególnymi węzłami. Opis zawierający taką informację ma postać macierzowej formuły boolowskiej pełnych połączeń sieci osobliwej (9).

$$K\,\tilde{I}_w + L\,\tilde{U}_w = 0, \tag{9}$$

w której:

$K = [h_{ij}]$ - prądowa macierz boolowskich pełnych połączeń sieci osobliwej, h_{ij} - operator A osobliwego dwójnika zastępczego sieci widzianego na zaciskach węzłów i oraz j, $h_{ij} = 0$ dla $i = j$.

$L = [l_{ij}]$ - napięciowa macierz boolowska pełnych połączeń sieci osobliwej, l_{ij} - operator B osobliwego dwójnika zastępczego sieci widzianego na zaciskach węzłów i oraz j, $l_{ij} = 1$ dla $i = j$,

$\tilde{I}_w = [\tilde{i}^w_{ij}]$ - macierz N transformacji prądów międzywęzłowych,

$\tilde{U}_w = [\tilde{u}^w_{ij}]$ - macierz N transformacji napięć międzywęzłowych, przy czym $i, j = 1, \ldots k$.

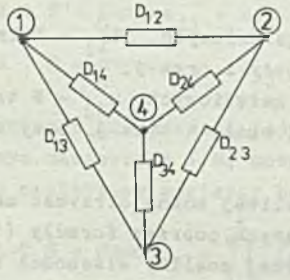
Elementów macierzy K i L pełnych połączeń sieci osobliwej można poszukiwać bezpośrednio ze znajomości operatorów A i B poszczególnych gałęzi metodami podanymi w pozycjach [3], [4], [5] lub z zależności wiążących macierze A z K oraz B z L. Zależności te dla sieci o k węzłach są następujące:

$$K = A^{\#(k-1)} \quad (10)$$

$$L = B^{x(k-1)} \quad (11)$$

Elementy macierzy A, B, K, L, znajdujące się na głównej przekątnej, opisują połączenie każdego węzła z "samym sobą" jako uogólniony przypadek zwarcia (określająca para operatorów $\{A, B\} = \{0, 1\}$, rys. 2b).

4. PRZYKŁAD SIECI OSOBLIWEJ CZTEROWĘZŁOWEJ



Rys. 1. Rozpatrywana pełna sieć czterowęzłowa

Rozpatrywana będzie pełna sieć czterowęzłowa (rys. 1) o gałęziach w postaci dwójników osobliwych D_{ij}, opisanych parami operatorów A i B jako elementami macierzy A i B, równymi a_{ij} oraz b_{ij}. Zakłada się, że dwójniki te nie zależą od orientacji gałęzi, czyli że zachodzi: $a_{ij} = a_{ji}$ oraz $b_{ij} = b_{ji}$. Macierze A i B mają zatem postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & 1 & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & 1 & b_{34} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

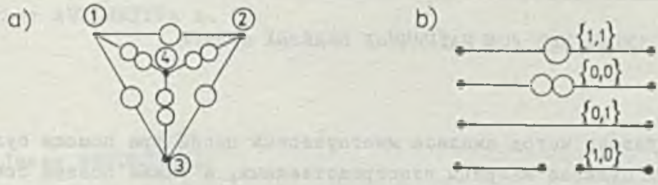
Elementy macierzy K oraz L na podstawie realacji (6) i (7) oraz (10) i (11) dla k = 4 opisywane są wzorami:

$$h_{ij} = \prod_{k=1}^{4} \left[\prod_{l=1}^{4} (a_{il} + a_{lk}) + \prod_{l=1}^{4} (a_{kl} + a_{lj}) \right] \quad (12)$$

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{l=1}^{4} b_{il}\, b_{lk} \sum_{l=1}^{4} b_{kl}\, b_{ij} \right) \quad (13)$$

Przykładowo dla sieci o elementach gałęziowych jak na rys. 2a macierze A i B wynoszą:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 2. Przykładowa sieć czterowęzłowa (a) oraz pary operatorów A i B dla typowych dwójników osobliwych (b)

Pary operatorów A i B dla typowych dwójników osobliwych przedstawione są na rys. 2b. Macierze pełnych połączeń **K** lub **L** wyliczone na podstawie relacji (12) i (13) lub bezpośrednio z (10) i (11) wynoszą:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z przedstawionych obliczeń wynika, że rozpatrywana sieć widziana z dowolnej pary węzłów ① ② i ③ stanowi zwarcie, natomiast między węzłem ④ a pozostałymi jest widziana jako norrator.

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawiona metoda opisu sieci złożonych z elementów osobliwych metodą macierzowych formuł boolowskich może mieć zastosowanie jako algorytm komputerowej analizy własności tej sieci, szczególnie w postaci zależności (12) i (13) wyprowadzonych dla sieci o dowolnej liczbie węzłów.

LITERATURA

[1] Luce R.D.: - A Note on Boolean Matrix Theory. Proc. Amer. Math. Soc. t. 3, 1953.

[2] Yoeli M.: A Note on a Generalization of Boolean Matrix Theory Amer. Math. Montly. t. 68, nr 6, 1961.

[3] Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V SPETO, Ustroń 1981, Z. N. Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 79, 1982.

[4] Topór-Kamiński L.: Wprowadzenie idealnych źródeł autonomicznych i źródlatora do zbioru elementów osobliwych. Z. N. Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 71., 1983.

[5] Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. VI SPETO, Ustroń 1983. Z.N. Polit. Śląskiej, Elektryka z. 98, 1985.

АНАЛИЗ АНОМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ МАТРИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ

Р е з ю м е

В статье представлен метод анализа многоузловых цепей при помощи булевых формул, содержащих булевые матрицы непосредственных, а также полных соединений сетей сложенных из аномальных элементов.

AN ANALYSIS OF SINGULAR NETWORKS USING BOOLEAN MATRIX FORMULAS

S u m m a r y

Multinode networks have been analised Boolean formulas containing Boolean matrices. They describe direct interconnections and complete complex networks containing singular elements.