ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

W. Jerzy WESOŁOWSKI

Przemysłowy Instytut
Automatyki i Pomiarów
Warszawa

PRZYBLIŻONE MODELE JAKOŚCI OBIEKTU DLA NIEPEŁNYCH DANYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposoby konstruowania przybliżonych modeli analitycznych, opartych na znajomości wektora wzrostu i równań brzegowych, dla przypadków gdy znane są tylko dwa lub trzy punkty stanu jakościowego obiektu. Ponadto w pracy przedstawiono pewne właściwości modeli addytywnych i multiplikacyjnych, które mogą być wykorzystane w problemach wielokryterialnego wyboru i oceny porównawczej. Wskazano też zasady budowy przybliżonego zintegrowanego kryterium, pozwalającego na sprowadzenie problemów polioptymalizacji do monooptymalizacji.

1. WSTĘP

Gdy jakość kompleksowa obiektu (rozumiana jako jego stan wynikowy zależny od czynników wejściowych) jest niemierzalna, nie dają się identyfikować jej stany, stanowiące w interpretacji geometrycznej punkty węzłowe lub stochastyczne dla aproksymacji funkcji wyrażającej model obiektu. Może to mieć miejsce również w przypadku, kiedy wszystkie czynniki wejściowe (cechy jakościowe) obiektu są mierzalne.

Występuje wtedy problem oceny wielokryterialnej, rozwiązywany za pomocą określonych procedur dialogowych, w których reakcja ("odpowiedź") obiektu zastępowana jest pośrednimi przybliżonymi odpowiedziami ekspertów [1], [4] lub za pomocą przybliżonego modelu jakości stanowiącego zintegrowane kryterium jakości. W takich przypadkach mogą być wykorzystywane uproszczone modele opierające się na fragmentarycznych (niepełnych) danych oraz założeniach upraszczających. Do takich uproszczonych modeli zaliczyć można przedstawione poniżej modele liniowe pojedyncze, podwójne i wielopunktowe, a także zmiennomodułowe. Przybliżone modele oceny stanu obiektów mogą być wykorzystywane do budowy modeli o złożonej wielostopniowej strukturze, w których niemierzalna jest jakość członów składowych.

Zintegrowane kryterium pozwalające na sprowadzenie problemów polioptymalizacji do monooptymalizacji może być również utworzone poprzez przedstawione w pracy przekształcanie niektórych czynników wejściowych, będących destymulantami jakości kompleksowej w stymulanty lub vice versa.

2. MODEL LINIOWY (POJEDYNCZY)

Jeżeli zmienne czynniki wejściowe obiektu oznaczymy wektorem:

$$\underline{x} = [x_i]; \quad i = 1,2,\ldots n \tag{1}$$

i założymy, że znane są tylko dwa stany jakości kompleksowej określone jako punkty: dolny $Q_d(\underline{x}_d)$ oraz górny $Q_g(\underline{x}_g)$ wyznaczające kierunek największego wzrostu jakości kompleksowej, to jej ocenę ilościową możemy przeprowadzić za pomocą modelu liniowego dwupunktowego. Wyznaczony przez ww. punkty wektor wzrostu $\overrightarrow{Q_dQ_g}$ oznaczmy jako:

$$[R_i] = [R_1, R_2, \ldots R_n], \tag{2}$$

gdzie:

R_i - i -ta składowa wektora wzrostu w kierunku współrzędnej x_i.

W modelu liniowym izokwanty stanu jakościowego będą płaszczyznami prostopadłymi do wektora największego wzrostu, a zatem ogólne równanie izokwanty przechodzącej przez punkt górny (izokwanty górnej) może być zapisane jako:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i(x_i - x_{ig}) = 0 \tag{3}$$

Oznaczając:

$$-\sum R_i x_{ig} = K \tag{4}$$

równanie (3) możemy przekształcić do postaci:

$$\sum R_i x_i - K = 0 \tag{5}$$

Wprowadzając następnie współczynnik normujący:

$$\gamma = \frac{-\mathrm{sgn}\ K}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + \ldots R_n^2}} = \frac{-\mathrm{sgn}\ K}{\| R \|}, \tag{6}$$

napiszemy równanie izokwanty górnej w postaci normalnej:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ig} \cos \alpha_i - p = \sum \frac{R_i}{\| R \|} x_{ig} - \frac{K}{\| R \|} = 0, \tag{7}$$

gdzie:

$\cos \alpha_i$ - cosinusy kierunkowe wektora wzrostu, natomiast zgodnie z (4) wielkość:

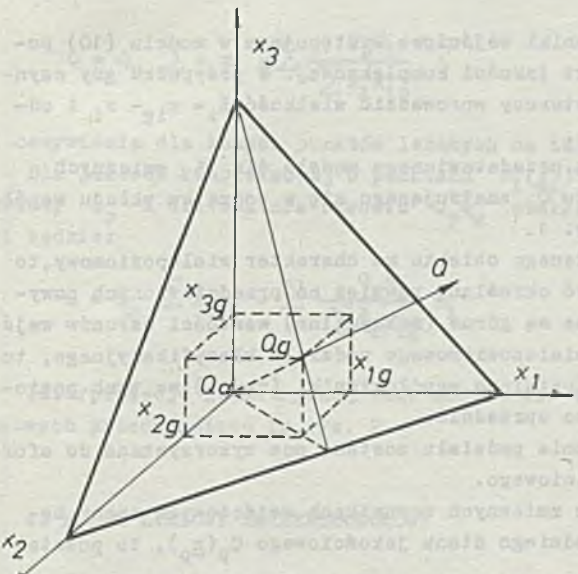
$$p = \frac{K}{\|R\|} = \frac{\sum R_i x_{ig}}{\|R\|} \qquad (8)$$

wyraża odległość izokwanty górnej od początku układu współrzędnych.

Odległość dowolnej izokwanty od początku układu współrzędnych może stanowić miarę jakości kompleksowej. Jakość ta może być mierzona w jednostkach względnych odległości izokwanty górnej od początku układu współrzędnych lub od izokwanty dolnej, a więc długości wektora wzrostu.

- W pierwszym przypadku dzieląc równanie (7) przez odległość p wyrażoną równaniem (9) otrzymamy dla izokwanty górnej:

$$\sum \frac{R_i}{\|R\| p} x_{ig} = 1, \qquad (9)$$



Rys. 1. Interpretacja geometryczna modelu stanu jakościowego dla trzech zmiennych

Fig. 1. Geometric interpretation of the performance state model for three variables

a zatem uwzględniając (8) dla dowolnej niższej izokwanty możemy napisać liniowy model jakości kompleksowej jako:

$$Q = \sum \frac{R_i}{\sum R_i x_{ig}} x_i = \sum A_i x_i, \qquad (10)$$

gdzie:

$A_i = \dfrac{R_i}{\sum R_i x_{ig}}$ - współczynnik modelu liniowego

- W drugim przypadku można napisać, że odległość od początku układu współrzędnych izokwanty przechodzącej przez punkt dolny Q_d jest:

$$Q_d = \sum A_i x_{id} \tag{11}$$

Poziom jakości wyrażony w jednostkach względnych długości wektora R dla izokwanty zerowej przechodzącej przez punkt Q_d możemy w tym przypadku określić jako:

$$\hat{Q} = \frac{Q - Q_d}{Q_g - Q_d} \tag{12}$$

Należy zwrócić uwagę, że czynniki wejściowe występujące w modelu (10) powinny mieć charakter stymulant jakości kompleksowej. W przypadku gdy czynnik x_i jest destymulantą, wystarczy wprowadzić wielkość $\check{x}_i = x_{ig} - x_i$ i odpowiednio przekształcić model.

Interpretację geometryczną przedstawionego modelu dla 3 zmiennych czynników wejściowych i punktu Q_d znajdującego się w początku układu współrzędnych przedstawiono na rys. 1.

W przypadku gdy struktura badanego obiektu ma charakter wielopoziomowy,to złożony model liniowy może być określany również na przedstawionych powyżej zasadach. Jeśli więc znane są górne (maksymalne) wartości członów wejściowych na niższym poziomie wielopoziomowego podziału klasyfikacyjnego, to w oparciu o te dane mogą być ustalone współczynniki (rangi) na tych poziomach, tak jak to przedstawiono uprzednio.

Następnie na wyższym poziomie podziału zostaną one wykorzystane do sformułowania złożonego modelu liniowego.

Jeżeli dla obiektu o wielu zmiennych czynnikach wejściowych znany będzie także trzeci punkt pośredniego stanu jakościowego $Q_p(\underline{x}_p)$, to powstaną możliwości wyznaczania:

- modelu liniowego podwójnego (dwukierunkowego), tzn. określonego przez dwa równania o dwu różnych współczynnikach,
- modelu liniowego zmiennomodułowego jednokierunkowego, tzn. modelu wyrażonego funkcją złożoną,
- modelu nieliniowego przybliżonego wyznaczonego na podstawie nieliniowych równań brzegowych.

Zasady wyznaczania tych uproszczonych modeli przedstawimy poniżej.

3. MODEL LINIOWY PODWÓJNY

Jeżeli znane są trzy punkty odzwierciedlające trzy różne stany jakości kompleksowej, które oznaczymy Q_d, Q_p, Q_g, nie leżące na prostej, to mogą one wyznaczyć różnokierunkowe wektory wzrostu $\overrightarrow{Q_dQ_p}$ oraz $\overrightarrow{Q_pQ_g}$ na zasadach przedstawionych w pkt. 2.

Dla jakości kompleksowej Q, zawierającej się w granicach:

$$Q_d \leqslant Q \leqslant Q_p$$

i wektora wzrostu $\overrightarrow{Q_dQ_p}$ o składowych R_i i izokwancie skrajnej przechodzącej przez punkt $Q_p(\underline{x}_p)$, mamy zgodnie z (11):

$$Q = Q_p \sum A_i x_i = \sum \frac{Q_p R_i}{\sum R_i x_{ip}}$$

i oczywiście dla innych punktów leżących na izokwancie Q_p będzie $Q=Q_p$.

Dla jakości kompleksowej o punktach $P_i(\underline{x}_i)$ leżących powyżej ww. izokwanty Q_p i dla wektora wzrostu $\overrightarrow{Q_pQ_g}$ o składowych $\check{R}_i$, równanie jakości będzie:

$$Q = Q_p \sum \check{A}_i x_i = \sum \frac{Q_g \check{R}_i}{\sum \check{R}_i x_{ig}} x_i$$

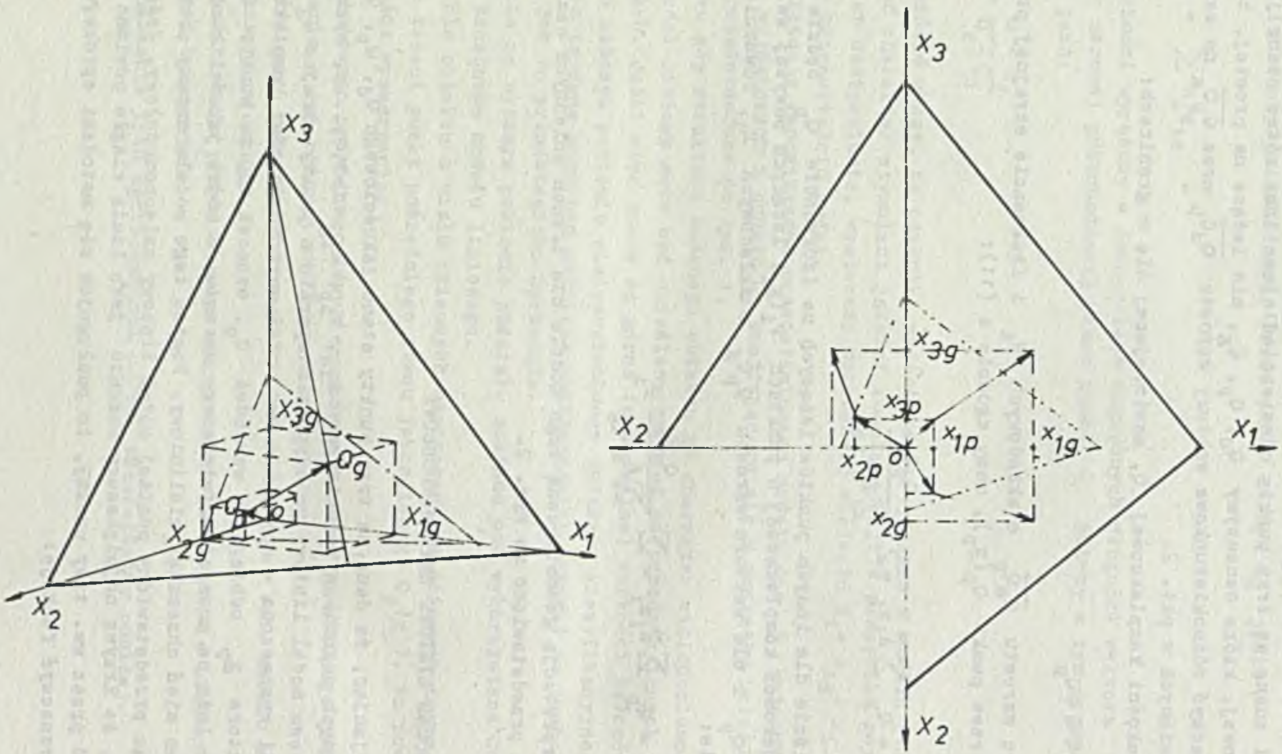
Interpretację geometryczną tego modelu dla trzech zniennych cech jakościowych przedstawiono na rys. 2.

4. MODEL LINIOWY ZMIENNOMODUŁOWY

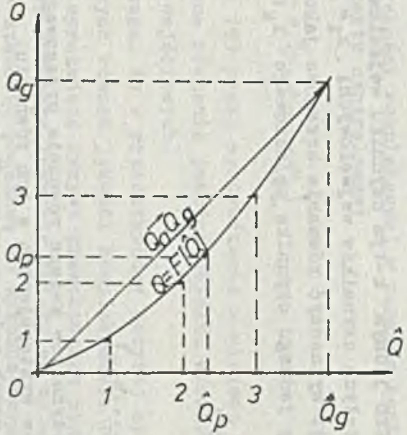
Przyjmując, że dane są trzy punkty stanu jakościowego Q_d, Q_p, Q_g dla określonych czynników wejściowych x_{id}, x_{ip}, x_{ig} $i=1,2,\ldots n$, wyznaczmy początkowo model liniowy pojedynczy w oparciu o punkty skrajne Q_d i Q_g.

Jeśli wyznaczona w oparciu o ten model wartość jakości kompleksowej $\hat{Q}_p$ dla wektora $\underline{x}_p$ odbiega od wartości Q_p, oznacza to, że punkty Q_d, Q_p, Q_g nie leżą na prostej największego wzrostu, a model jakości kompleksowej powinien mieć charakter nieliniowy. Postać tego modelu możemy przybliżyć stosując przedstawiony poniżej model liniowy zmiennomodułowy. Jeżeli założymy, że krzywa największego wzrostu jako linia ciągła powinna przechodzić przez ww. trzy punkty, to posługując się metodami aproksymacji możemy wyznaczyć funkcję:

$$Q = F(\hat{Q}), \tag{1}$$

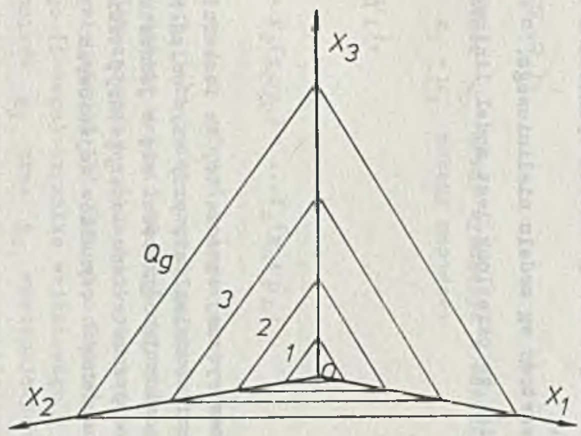


Rys. 2. Interpretacja geometryczna modelu liniowego podwójnego dla trzech zmiennych
Fig. 2. Geometric interpretation of linear doubled model for three variables



Rys. 3. Nieliniowy wzrost stanu jakości kompleksowej

Fig. 3. Nonlinear increase of a state of complex performance



Rys. 4. Interpretacja geometryczna modelu liniowego zmiennomodułowego dla trzech zmiennych

Fig. 4. Geometric performance of linear module variable model for three variables

gdzie:

$\hat{Q}$ - wartość jakości kompleksowej obiektu wyznaczona za pomocą ww. modelu liniowego,

Q - aproksymowana wartość wg modelu nieliniowego.

Uwzględniając następnie, że określony jest model liniowy:

$$\hat{Q} = \sum A_i x_i \tag{2}$$

możemy napisać, że:

$$Q = F\left(\sum A_i x_i\right) \tag{3}$$

W interpretacji geometrycznej oznacza to, że izokwanty jakości kompleksowej będą płaszczyznami równoległymi, przy czym odległość pomiędzy tymi izokwantami, których poziom jakości różni się o jednostkę (zwaną modułem), jest zmienna. Na rys. 4 przedstawiono interpretację takiego modelu zmiennomodułowego dla trzech zmiennych czynników wejściowych.

5. MODELE BRZEGOWE

Jeżeli jakość kompleksowa obiektu zależy od wielu zmiennych czynników wejściowych, tzn. jest funkcją:

$$Q = f(x_i), \quad i=1,2...n \tag{1}$$

to przy zmiennym tylko jednym k-tym czynniku wejściowym i zachowaniu stałych wartości pozostałych czynników wejściowych; $x_i = \mu_i$ dla $i \neq k$, możemy metodami aproksymacji wyznaczyć równanie brzegowe jakości kompleksowej, będące funkcją tylko jednego czynnika wejściowego x_k:

$$Q_k = f_k(\underline{a}_k; x_k), \tag{2}$$

przy czym:

$$\underline{a}_k = [a_{k1}, a_{k2}, ... a_{kK}] \tag{3}$$

jest wektorem współczynników k-tego równania brzegowego, w którym K jest liczbą współczynników występujących w tym równaniu.

Dla kolejnych dalszych zmian poszczególnych czynników otrzymamy w sumie n równań brzegowych (2), a więc możemy również równania te oznaczyć:

$$Q_i = f_i(\underline{a}_i; x_i) \tag{4}$$

Gdy równania brzegowe określają krzywe przecinające się w jednym punkcie (centralnym)

$$P(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, Q_o), \tag{5}$$

oznacza to, że wartość Q_o można wyznaczyć z każdego z równań brzegowych (4), przy czym dla $x_i = \mu_i$ możemy napisać: (5)

$$Q_o = f_i(\underline{a}_i; \mu_i), \tag{6}$$

czyli że:

$$f_i(\underline{a}_1; \mu_1) = f_2(\underline{a}_2; \mu_2) = \ldots f_n(\underline{a}_n; \mu_n) \tag{7}$$

Wybierając spośród ww. n równań brzegowych j-te równanie, którego liczba współczynników J=n-1 jako podstawowe do wyznaczenia równania jakości kompleksowej obiektu, możemy wyrazić te współczynniki jako funkcje wartości poszczególnych współrzędnych μ_i (dla $i \neq j$) punktu centralnego. Dokonać tego można na podstawie równań (7). Tak więc dla równania dotyczącego j-tego i dowolnego innego (i-tego) czynnika wejściowego w oparciu o znajomość wartości współczynników $\underline{a}_j$ oraz $\underline{a}_i$ występujących w równaniach brzegowych i wartości j-tego czynnika μ_j w punkcie centralnym możemy wyznaczyć współczynniki $\underline{a}_j$ jako funkcje liniowe wartości i-tego czynnika μ_i dla $i \neq j$. A więc dla k-tego współczynnika j-tego równania mamy:

$$a_{jk} = A_i \mu_i \quad \text{dla } i \neq j \quad k = 1,2\ldots J \tag{8}$$

Podstawiając tak określone współczynniki do j-tego równania brzegowego otrzymamy równanie jakości kompleksowej w punkcie centralnym jako funkcję współrzędnych μ_i punktu centralnego:

$$Q_o = f(\underline{\mu}) \qquad \underline{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n] \tag{9}$$

Uogólniając równanie (9) przez wprowadzenie w miejsce μ_i zmiennych x_i znajdujemy poszukiwane równania jakości obiektu wyrażonej funkcją wielu zmiennych czynników wejściowych.

Należy zwrócić uwagę, że w przedstawiony powyżej sposób można zwykle wyznaczyć kilka różnych równań jakości kompleksowej, posiadających dane równania brzegowe i wyrażające krzywe przechodzące przez określony punkt centralny. Postać wyznaczanego równania zależy od wyboru j-tego równania brzegowego, mającego stanowić podstawę do wyznaczanego równania jakości oraz od kolejności podstawiania współczynników w przyrównywanych równaniach brzegowych zapisanych dla punktu centralnego. Liczba równań kompleksowej jakości, które można wyznaczyć, jest równa liczbie wszystkich współczynników występujących w równaniach brzegowych. Jednoznaczny wybór właściwego z tych równań wymaga znajomości co najmniej jednego dodatkowego punktu odwzorowującego stan jakościowy obiektu.

Przykład

Dane są równania brzegowe jakości kompleksowej będącej funkcją trzech zmiennych czynników wejściowych:

$$Q_1 = 0,12 + 1,2x_1 \quad \text{dla} \quad x_2 = \mu_2 = 1,0 \quad x_3 = \mu_3 = 0,15, \tag{1}$$

$$Q_2 = 2,64 + 0,12x_2 \quad \text{dla} \quad x_1 = \mu_1 = 2,2 \quad x_3 = \mu_3 = 0,15, \tag{2}$$

$$Q_3 = 2,64 + 0,8x_3 \quad \text{dla} \quad x_1 = \mu_1 = 2,2 \quad x_2 = \mu_2 = 1,0, \tag{3}$$

wyrażające proste przecinające się w punkcie centralnym:

$$P(2,2; \quad 1,0; \quad 0,5; \quad 2,76)$$

Wiadomo również, że dla: $x_1 = 3,0$ $x_2 = 4,0$ $x_3 = 0,8$ stan jakościowy obiektu:

$$Q = f(x_1,x_2,x_3) = 6,16$$

Wyznaczyć należy odpowiednie równanie jakości kompleksowej obiektu, będące funkcją trzech zmiennych czynników wejściowych.

Zapiszmy powyższe równania w postaci ogólnej:

$$Q_1 = a_{10} + a_{11}x_1 \qquad a_{10} = 0,12 \qquad a_{11} = 1,2 \tag{4}$$

$$Q_2 = a_{20} + a_{21}x_2 \qquad a_{20} = 2,64 \qquad a_{21} = 0,12 \tag{5}$$

$$Q_3 = a_{30} + a_{31}x_3 \qquad a_{30} = 2,64 \qquad a_{31} = 0,8 \tag{6}$$

Ponieważ wszystkie równania brzegowe mają jednakową liczbę współczynników K=n-1, zatem liczba możliwych do wyznaczenia równań jakości spełniających warunki równań brzegowych i punktu centralnego jest:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = n \cdot K = 3 \cdot 2 = 6 \tag{7}$$

Ze względu na powtarzającą się wartość wyrazu wolnego w równaniach (3) i (2) można się spodziewać, że dwa spośród sześciu równań będą takie same.

Przyjmując najpierw równanie (4) jako podstawowe i przyrównując je do (5), dla punktu centralnego, przy uwzględnieniu, że μ_1=2,2, znajdujemy:

$$a_{10} = 0,12\,\mu_2 \tag{8}$$

Przyrównując następnie równania (4) i (6), znajdujemy podobnie, że

$$a_{11} = 0,364\,\mu_3 + 1,145 \tag{9}$$

Podstawiając (8) i (9) do równania (4) i uogólniając je mamy:

$$Q = 0,12x_2 + (0,364x_2 + 1,145)x_1 \tag{10}$$

W podobny sposób z przyrównania (4) i (5) możemy znaleźć:

$$a_{11} = 1,145 + 0,055\,\mu_2, \tag{11}$$

natomiast z drugiego przyrównania (4) i (6) możemy napisać, że:

$$a_{10} = 0,8\,\mu_3 \tag{12}$$

Podstawiając wartości (11) i (12) do (4) i uogólniając równanie mamy:

$$Q = 0,8x_3 + (0,055x_2 + 1,145)x_1 \tag{13}$$

Przyjmując równanie (5) za podstawowe i postępując podobnie znajdujemy dwa następne równania kompleksowej jakości:

$$Q = 1,2x_1 + 0,8x_2x_3 \tag{14}$$

$$Q = (1,2x_1 - 2,52)x_2 + 0,8x_3 + 2,52 \tag{15}$$

Przyjmując równanie (6) za podstawowe wyznaczymy dwa ostatnie równania:

$$\begin{aligned} Q &= 1,2x_1 + 0,8x_2x_3 \\ Q &= 2,52 + 0,12x_2 + (8x_1 - 16,8)x_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Jak widać - zgodnie z przewidywaniem - otrzymaliśmy 6 równań, z których dwa (14) i (16) są jednakowe.

W celu dokonania wyboru właściwego z tych równań sprawdzimy, które z nich spełnia sformułowany ex ante warunek:

$$Q = f(3,0;\ 4,0;\ 0,8) = 6,16$$

Podstawiając kolejno ww. wartości czynników wejściowych, otrzymamy dla poszczególnych równań:

$Q_{10} = 8,238 \quad Q_{13} = 4,735 \quad Q_{14} = 6,16 \quad Q_{15} = 7,48 \quad Q_{16} = 6,16$

Wynika z powyższego, że tylko równania (14) i (16) spełniają wymagany warunek i mogą być uznane za właściwe równania jakości kompleksowej będącej funkcją ww. trzech zmiennych czynników wejściowych.

6. JEDNO- I WIELOKRYTERIALNA OCENA STANU JAKOŚCIOWEGO OBIEKTU

Wielokryterialna ocena stanu jakościowego występuje zwłaszcza wtedy, gdy zmieniająca się pod wpływem czynników wejściowych wielkość wynikowa (jakość kompleksowa) jest niemierzalna. Występują w takim przypadku istotne trudności w ustaleniu funkcji będącej modelem analitycznym obiektu. Wspomnieliśmy już, że jeżeli czynniki wyjściowe (wynikowe) stanowią kryteria polioptymalizacji i znane są wymienione w poprzednich rozważaniach punkty stanu, to problem przybliżonego wyznaczania jednego zintegrowanego kryterium można rozwiązań na podstawie opisanej już identyfikacji, przy niepełnych danych i stosowaniu ww. modeli.

W przedstawionych poniżej przypadkach modeli addytywnych i multiplikacyjnych problem polioptymalizacji można również rozwiązywać poprzez przekształcanie stymulant w destymulanty lub vice versa.
Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy znane czynniki wyjściowe:

$$k_j = f_j(x_i) \qquad j=1,2,\ldots m; \qquad i=1,2,\ldots n \tag{1}$$

stanowią kryteria polioptymalizacji będące funkcjami czynników wejściowych x_i, mają charakter współzależny, tzn. taki, dla których modele obiektu mają zwykle postać multiplikacyjną:

$$Q = \prod_{j=1}^{m} A_j k_j = B \prod_{j=1}^{m} k_j, \tag{2}$$

gdzie:

A_j – współczynniki (wagi) j-tego czynnika,

$$B = \prod_{j=1}^{m} A_j$$

Jeżeli występujące powyżej czynniki k_j mają charakter stymulant i destymulant, to za pomocą tak zapisanego modelu (2) nie możemy dokonywać najkorzystniejszego wyboru. Jeżeli jednak uwzględnimy, że czynniki te można przekształcić tak, żeby zawsze były stymulantami, pisząc:

$$\check{k}_j = k_j^{\alpha_j}, \tag{3}$$

gdzie:

$\alpha_j = 1$ dla czynników będących stymulantami,

$\alpha_j = -1$ dla czynników będących destymulantami,

to model multiplikacyjny stanowić będzie jedno zintegrowane kryterium optymalizacyjne wyrażające stan jakościowy obiektu:

$$Q = \prod_{j=1}^{m} \check{k}_j = \prod_{j=1}^{m} (f_j(x_i))^{\alpha_j} \longrightarrow \max, \tag{4}$$

pozwalające na wyznaczenie najkorzystniejszego stanu obiektu.

Zauważmy, że dla oceny porównawczej dwu stanów wynikowych Q_a oraz Q_b, gdy czynniki k_j mają różnorodne wagi A_j, możemy napisać:

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{B\pi k_{ja}^{\alpha_j}}{B\pi k_{jb}^{\alpha_j}} = \pi r_j^{\alpha_j}; \qquad B = \pi A_j; \tag{5}$$

gdzie:

$r_j = \frac{k_{ja}}{k_{jb}}$ dla stymulant, $r_j^{-1} = \frac{k_{jb}}{k_{ja}}$ dla destymulant.

Wynika z powyższego (5), że względna ocena wartości stanów wynikowych obiektu w modelu multiplikacyjnym nie zależy od wartości współczynników A_j, a poszczególne czynniki k_j nie muszą być unormowane do jednolitej skali ocen.

Wartość współczynnika $r_j = 1$ wskazuje, że stan jakościowy j-tego czynnika dla wariantu a jest równy stanowi tego czynnika w wariancie b. Odpowiednio nierówność $r_j > 1$ oznacza, że korzystniejszy jest stan tego czynnika w wariancie a, natomiast dla $r_j < 1$ jest odwrotnie. Podobnie jest dla kompleksowej oceny porównywanych wariantów.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli oddziaływanie czynników x_i na j-te kryterium ma charakter potęgowy:

$$k_j = f_j(x_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}, \quad j=1,2...m \tag{6}$$

gdzie:

a_i – wykładnik i-tego czynnika wejściowego,

to zintegrowane kryterium optymalizacji (4) może być w ogólnym przypadku funkcją wyższego lub niższego stopnia w stosunku do czynników wejściowych x_i lub może być funkcją nie wszystkich czynników.

Jeżeli czynniki kryterialne k_j będące stymulantami i destymulantami mają charakter substytucyjny (tzn. taki, dla których stosuje się modele addytywne liniowe) i są funkcjami czynników wejściowych x_i, to polioptymalizację wg tych kryteriów można sprowadzić do optymalizacji wg jednego zintegrowanego kryterium, pisząc:

$$Q = \sum_{j=1}^{m} \pm k_j = \sum_{j=1}^{m} \pm f_j(x_i) \rightarrow \max, \tag{7}$$

gdzie:

znak plus (+) występować będzie dla stymulant,

znak minus (-) występować będzie dla destymulant.

Ocenę porównawczą dwu wariantów stanów wynikowych Q_a oraz Q_b możemy przeprowadzić wyznaczając różnicę:

$$Q_a - Q_b = \sum (\check{k}_{ja} - \check{k}_{jb}) = \sum l_j \tag{8}$$

Wartość zmiennej $l_j = 0$ wskazuje, że stan jakościowy j-tego czynnika k_j dla wariantu a jest równy stanowi tego czynnika dla wariantu b. Odpowiednio nierówność $l_j > 0$ dla czynników będących stymulantami oznacza, że korzystniejszy jest stan czynnika wariantu a. Gdy $l_j < 0$ jest odwrotnie. Podobnie jest dla kompleksowej oceny porównywanych wariantów.

Dla zilustrowania zaprezentowanych zasad przedstawimy poniższy przykład.

W pracy [3 s. 51] przedstawiono dwukryterialny wybór rozwiązania kompromisowego dotyczącego optymalnej konstrukcji sprężyny taśmowej zginanej, przy czym kryteria jakości określono jako:

1) maksymalizację energii sygnału wejściowego (dla osiągnięcia minimalnego błędu wynikającego z tarcia układu):

$$k_1 = f_1(P,l,E,s,q) = \frac{2P^2 l^3}{Esq} \rightarrow \max,$$

2) minimalizację błędu histerezy:

$$k_2 = f_2(a,P,l,s,q) = \frac{6aPl}{sq^2} \rightarrow \min.$$

Występujące w tych wzorach zmienne decyzyjne oznaczają:

P - siła (sygnał wejściowy),

l,s,q - długość, szerokość i grubość sprężyny,

E - moduł sprężystości postaciowej podłużnej materiału sprężyny,
a - współczynnik proporcjonalności błędu histerezy.

Ze względu na współzależny charakter występujących czynników zastosujemy model multiplikacyjny. Będzie więc:

$$Q = k_1 \cdot k_2^{-1} = \frac{2P^2l^3}{Eaq} \cdot \frac{aq^2}{6aPl} = \frac{2Pl^3q}{6aE} \longrightarrow \max$$

Wynika z tej funkcji kryterium, że zmienne:

P,l,q - powinny mieć wartości jak największe, natomiast
a,E - powinny być jak najmniejsze,

a więc sprężyna powinna być wykonana z brązu i mieć jak największe dopuszczalne wymiary.
Ten sam wynik otrzymano sposobem rozwiązania przedstawionym przez autora ww. pracy w formie graficznej interpretacji przestrzeni celów.

LITERATURA

[1] Fandel G., Gal T.: Multiple Criteria Decision Making - Theory and Application. Springer-Verlag, W. Germany, Berlin 1980.
[2] Konarzewska-Gubała E.: Programowanie przy wielorakości celów. PWN, Warszawa 1980.
[3] Misiakiewicz J.: O sposobach przedstawiania zbioru rozwiązań niezdominowanych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - "Automatyka" z. 67, Gliwice 1983.
[4] Peshel M., Riedel C.: Polioptymalizacja. Metody podejmowania decyzji kompromisowych w zagadnieniach inżynieryjno-technicznych. Warszawa 1979.
[5] Wesołowski W. J.: Programowanie nowej techniki. Wyd. II. PWN, Warszawa 1979.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Andrzej Ameljańczyk

Wpłynęło do Redakcji 4.08.1983 r.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МОДЕЛИ КАЧЕСТВА ОБЬЕКТА ДЛЯ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

Р е з ю м е

В работе указаны способы конструирования приближённых аналитических моделей, построенных на значи нарастающего вектора и граничных уравнений, в случае когда известны две или три точки состояния обьекта. Кроме этого указаны некоторые особенности аддитивных и мультипликативных моделей, которые могут быть использованы в задачах многокритериального выбора для сравнительной оценки. Даны также принципы построения приближённого интегрального критерия, дающего возможность приведения проблем полиоптимализации к монооптимализации.

APPROXIMATE MODELS OF PERFORMANCE FOR THE CASE WITH INCOMPLETE DATA

S u m m a r y

In the paper methods of approximate analitic models design are presented. The methods are based on the knowledge of the increase vector and boundary equations for the case when only two or three points of the performance state are known. Moreover some properties of additive and multiplicative odels which may be used in the problems of multicriterion choice for comparative estimation are presented.

The principles of design of approximate integrated criterion which enables reduction of the polioptimisation to monooptimisation are presented.