ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

Konrad WOJCIECHOWSKI

Instytut Automatyki
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

STEROWANIE OPTYMALNE PRZY ZBIOROWYM MODELU NIEPEWNOŚCI I AGREGACJI Z FUNKCJAMI WAGI x)

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem sterowania w warunkach niepewności zbiorowej. Wtórny, deterministyczny wskaźnik jakości przyjmuje się w postaci agregaty wskaźnika pierwotnego wyznaczonej przy zadanej funkcji wagi. Pokazano, że w przypadku liniowych równań tranzycji i wyjścia, addytywnych zakłóceń o modelu zbiorowym, operacja agregacji wskaźnika jakości przenosi się na stan niepewny, a prawo sterowania ma postać liniowej funkcji agregaty stanu niepewnego oraz zachodzi równoważność praw sterowania w strukturach OLF i CL.

1. WPROWADZENIE

Przy sterowaniu w warunkach niepewności konsekwencją jej występowania jest pojawienie się niepewności wskaźnika jakości. Stąd w jednym z możliwych podejść niepewny wskaźnik pierwotny zastępuje się, stosując agregację, wskaźnikiem wtórnym.

Dla szeroko stosowanego losowego modelu niepewności wskaźnik wtórny określa się jako wartość średnią wskaźnika pierwotnego. W wyniku optymalizacji otrzymuje się tzw. prawo sterowania statystycznie optymalnego. Ma ono dla liniowych równań tranzycji i wyjścia, kwadratowego wskaźnika jakości oraz zakłóceń gaussowskich (problem LQG), postać liniowej funkcji od wartości średniej stanu niepewnego. Dodatkowo prawa sterowania wyznaczane w strukturach CL (pętla zamknięta) i OLF (pętla otwarta ze sprzężeniem) są tożsamościowo równe.

Podobnie dla zbiorowego modelu niepewności zastępując niepewny wskaźnik pierwotny wskaźnikiem wtórnym reprezentującym środek zbioru otrzymuje się tzw. prawo sterowania centralnie optymalnego. W pracy [4] pokazano, że dla takich samych założeń jak w problemie LQG, z wyjątkiem zmiany modelu zakłóceń z gaussowskiego na zbiorowy, prawo sterowania optymalnego jest liniową funkcją środka stanu niepewnego. Zachodzi również w tym przypadku równoważność praw sterowań w strukturach CL i OLF.

W prezentowanej pracy, utrzymując założenia o zbiorowym modelu niepewności, liniowych równaniach tranzycji i wyjścia, kwadratowym wskaźniku

x) Praca częściowo finansowana z projektu badawczego RP.I.02: Teorią sterowania i optymalizacji ciągłymi układami dynamicznymi i procesami dyskretnymi.

jakości, zmieniono sposób agregacji niepewnego, pierwotnego wskaźnika jakości, wprowadzając funkcję wagi. W wyniku, w zależności od przyjętej funkcji wagi, można otrzymać jako wskaźnik wtórny dowolny punkt, z założenia ograniczonego i wypukłego zbioru charakteryzującego niepewny wskaźnik pierwotny. Celem rozważań przedstawionych w pracy jest pokazanie, że również obecnie "sposób" agregacji wskaźnika jakości przenosi się na agregację stanu niepewnego, prawo sterowania optymalnego jest liniową funkcją agregacji stanu, zaś prawa sterowań w strukturach CL i OLF są równoważne.

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Liniowe równanie tranzycji jednokrokowej przy niepewności o modelu zbiorowym przedstawić można w postaci:

$$x_k(t^{k-1},t_k) = F\, x_{k-1}(t^{k-1}) + G\, u_{k-1} + w_{k-1}(t_k);\ x_o(t_o), \tag{1}$$

gdzie: F, G są deterministycznymi macierzami odpowiednio tranzycji i sterowań, $x_k(\cdot)$, $x_{k-1}(\cdot)$ są wektorami stanu w przestrzeni R^n dla chwil dyskretnych k, k-1, $u_{k-1} \in R^n$ jest sterowaniem, zaś $w_{k-1}(\cdot) \in R^n$ - wymuszeniem zewnętrznym. Dla wyjaśnienia zapisu argumentów w funkcjach x_k, x_{k-1}, w_{k-1} wprowadźmy pomocnicze oznaczenia.

Niech $T_l \subset R$, $l = 0,\dots, N-1$ będą ustalonymi podzbiorami, o elementach odpowiednio $t_l \in R$, $l = 0,\dots, N-1$. Niech $T^r = \prod_{l=0}^{r} T_l$ będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów $T_o,\dots, T_r$. Elementami zbioru T^r są zatem ciągi o postaci $(t_o,\dots,t_r)$, oznaczane jako t^r. Ciąg $(t^{r-1},t_r) = t^r \in T^r$, gdzie $t^{r-1} \in T^{r-1}$, $t_r \in T_r$.

W interpretacji fizykalnej równania (1) zbiory T_l, $l = 0,\dots, N-1$ określają parametrycznie zbiory $W_l = \{w_l(t_l) : t_l \in T_l\}$ w poszczególnych chwilach czasu. Elementy w_l można interpretować jako rzeczywiste zakłócenia lub jako poprawki wynikające z uwzględnienia dostępnej informacji bieżącej. Wpływa to jedynie na wielkości zbiorów T_l w poszczególnych chwilach dyskretnych.

Zbiór $T^r = \prod_{l=0}^{r} T_l$ określa parametrycznie stan niepewny w chwili r-tej.

W dalszym ciągu pracy będziemy zakładać, że zbiory T_l, $l = 0,\dots, N$, T^r, $r = 1,\dots, N$ są dane.

Pierwotny niepewny wskaźnik jakości stosując przyjętą konwencję zapisu można przedstawić w postaci:

$$j(t^N) = \sum_{k=0}^{N} (x_k^T(t^k) Q\, x_k(t^k) + u_k^T R\, u_k) \tag{2}$$

Wskaźnik ten jest zmienną niepewną charakteryzowaną przez zbiór

$$J = \left\{ j(t^N) \;:\; t^N \in T^N \right\}.$$

W podejściu stosowanym w pracy wskaźnik (2) zastępuje się wtórnym wskaźnikiem jakości o postaci:

$$j = \int_{t^N \in T^N} r(t^N)\, j(t^N)\, dt^N, \tag{3}$$

gdzie funkcja wagi $r(t^N)$ jest ciągła, nieujemna - $r(t^N) \geqslant 0$ i znormalizowana - $\int_{t^N \in T^N} r(t^N)\, dt^N = 1$.

Dodatkowo będziemy zakładać, że funkcja $r(t^N)$ może być przedstawiona w postaci:

$$r(t^N) = \prod_{l=0}^{N} r_l(t_l), \tag{4}$$

gdzie każda z funkcji składowych jest również ciągła, nieujemna i znormalizowana jako funkcja swego argumentu oraz niezależna od sterowania i stanu.

Odpowiednio do wcześniejszej uwagi o interpretacji zbiorów T_l będziemy zakładać, że funkcje wagi $r_l(t_l)$ mogą być dalej przedstawione w postaci:

$$r_l(t_l) = \int_{\Lambda} r_l(\lambda_l)\; r_l(t_l|\lambda_l)\, d\lambda_l, \tag{5}$$

gdzie:

$$\int_{T_l'(\lambda_l)} r_l(t_l|\lambda_l)\, d\lambda_l = 1$$

Zbiory $T_l' = T_l(\lambda_l)$ są podzbiorami zbioru T_l uzyskanymi w wyniku uwzględnienia dodatkowej informacji. Zbiór wszystkich mogących wystąpić informacji jest taki, że suma mnogościowa zbiorów odpowiadających każdej informacji daje zbiór T_l, tj.:

$$T_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_1(\lambda_1)$$

Można inaczej powiedzieć, że w wyniku uwzględnienia dodatkowej informacji zbiór zakłóceń w_1, określony przez T_1, redukuje się do podzbioru $T_1(\lambda_1) \subset T_1$.

W dalszym ciągu zakłada się, że poszukiwane prawo sterowania optymalnego przedstawia odwzorowanie z rodziny zbiorów $\left\{T'^{k-1} \times T_k(\lambda_k), \lambda_k \in \Lambda_k\right\}$ w przestrzeń R^m, tj.:

$$h_k : \left\{T'^{k-1} \times T_k(\lambda_k), \lambda_k \in \Lambda_k\right\} \rightarrow R^m \tag{6}$$

Dla uproszczenia dalszych zapisów będziemy pomijać argument odwzorowania h_k, zaś jego wartości będą oznaczone przez u_k, tj.:

$$h_k(T'^{k-1} \times T_k(\lambda_k)) = h_k(T'^k) = u_k$$

Rozpatrywane w pracy zadanie można ostatecznie sformułować następująco:

Wyznaczyć ciąg $h = (h_0, \ldots, h_N)$ odwzorowań minimalizujący wtórny wskaźnik jakości (3) przy danej funkcji wagi i ograniczeniu (1).

3. DEKOMPOZYCJA ZADANIA OPTYMALIZACJI

Uwzględnienie w sformułowanym zadaniu zmiennej informacji bieżącej zawartej niejawnie przy przyjętej konwencji zapisu w zbiorach $T_k(\lambda_k)$ wymaga dekompozycji rozpatrywanego zadania. Mamy kolejno:

$$\min_{h_0,\ldots,h_N} j = \min_{h_0,\ldots,h_N} \int_{T^N} r(t^N)\, j(t^N)\, dt^N =$$

$$= \min_{h_0,\ldots,h_N} \int_{T^N} \prod_{k=0}^{N} r_k(t_k) \sum_{k=0}^{N} (x_k^T(t^k) Q\, x_k(t^k) + h_k^T R\, h_k) dt^N =$$

$$= \min_{h_0,\ldots,h_N} \int_{T_0} r_0(t_0)(x_0^T(t_0) Q\, x_0(t_0) + h_0^T R\, h_0 + \ldots$$

$$\int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1} | t^{k-2}) Q\, x_{k-1}(t_{k-1} | t^{k-2}) + h_{k-1}^T R\, h_{k-1} +$$

$$+ \int_{T_k} r_k(t_k)(x_k^T(t_k|t^{k-1})Q\, x_k(t_k|t^{k-1}) + h_k^T R\, h_k + \ldots$$

$$+ \int_{T_N} r_N(t_N)\, x_N^T(t_N|t^{N-1})Q\, x_N(t_N|t^{N-1}) + h_N^T R\, h_N)dt_N \ldots)dt_k\, dt_{k-1} \ldots)dt_o.$$

$$\min_{h_o,\ldots,h_N} j = \min_{h_o} \int_{T_o} r_o(t_o)\, x_o^T(t_o)Q\, x_o(t_o) + h_o^T R\, h_o + \ldots$$

$$+ \min_{h_{k-1}} \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2})Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) + h_{k-1}^T R\, h_{k-1} +$$

$$+ \min_{h_k} \int_{T_k} r_k(t_k)(x_k^T(t_k|t^{k-1})Q\, x_k|(t_k|t^{k-1}) + h_k^T R\, h_k + \ldots$$

$$+ \min_{h_N} \int_{T_N} r_N(t_N)(x_N^T(t_N|t^{N-1})Q\, x_N(t_N|t^{N-1}) + h_N^T R\, h_N)dt_N \ldots)dt_k)dt_{k-1} \ldots)dt_o \tag{7}$$

Uwzględnienie informacji bieżącej "zmniejsza" zbiory T_l do zbiorów $T_l(\lambda_l)$, $l = 0,\ldots,N$. W szczególnym przypadku zbiór $T_l(\lambda_l)$ może zawierać tylko jeden element. W interpretacji fizycznej oznacza to, że na każdym etapie dysponujemy wtedy informacją pozwalającą określić "zrealizowaną" wartość zakłócenia w na danym etapie.

W przypadku wskaźnika rozpatrywanego w pracy można występującą w wyrażeniu (7) minimalizację względem odwzorowań h zastąpić minimalizacją względem u. Dla fragmentu wyrażenia (7) mamy:

$$j_{k-1}^{o*} = \min_{h_{k-1}} \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1})x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2})Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) +$$

$$+ h_{k-1}^T R\, h_{k-1} + j_k^{o*})dt_{k-1} =$$

$$= \min_{h_{k-1}} \int_{\Lambda_{k-1}} r_{k-1}(\lambda_{k-1}) \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\lambda_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-1}) \cdot$$

$$\cdot Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) + h_{k-1}^T R\, h_{k-1} + j_k^{o*})dt_{k-1}\, d\lambda_{k-1} =$$

$$= \int_{\Lambda_{k-1}} r(\lambda_{k-1}) \min_{u_{k-1}} \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\lambda_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2}) \cdot$$

$$\cdot Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) + u_{k-1}^T R\, u_{k-1} + j_k^{o*})dt_{k-1}\, d\lambda_{k-1} \tag{8}$$

W szczególnym przypadku zbioru $T_l(\lambda_l) = \{t_l\}$, $l=0,\dots,N$ mamy:

$$j_{k-1}^{o*} = \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-q}) \min_{u_{k-1}} (x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2})Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) +$$

$$+ u_{k-1}^T R\, u_{k-1} + j_k^{o*})dt_{k-1}$$

Stosując przekształcenie przedstawione w (8) do wyrażenia (7) możemy przedstawić je w postaci:

$$\min_{h_o,\dots h_N} j = \int_{\Lambda_o} r_o(\lambda_o) \min_{u_o} \int_{T_o(\lambda_o)} r_o(t_o|\lambda_o)(x_o^T(t_o)Q\, x_o(t_o)+u_o^T R\, u_o+\dots$$

$$+ \int_{\Lambda_{k-1}} r_{k-1}(\lambda_{k-1}) \min_{u_{k-1}} \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\lambda_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2}) \cdot$$

$$\cdot Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2})+u_{k-1}^T Ru_{k-1} +$$

$$+ \int_{\Lambda_k} r_k(\lambda_k) \min_{u_k} \int_{T_k(\lambda_k)} r_k(t_k|\lambda_k)(x_k^T(t_k|t^{k-1})Q\, x_k(t_k|t^{k-1}) + u_k^T R\, u_k + \dots$$

$$+ \int_{\Lambda_N} r_N(\lambda_N) \min_{u_N} \int_{T_N(\lambda_N)} r_N(t_N|\lambda_N)(x_N^T(t_N|t^{N-1})Q\, x_N(t_N|t^{N-1}) +$$

$$+ u_N^T R\, u_N)dt_N\, d\lambda_N \dots)dt_k\, d\lambda_k)dt_{k-1}\, d\lambda_{k-1} \dots)dt_o d\lambda_o \tag{9}$$

Oznaczmy:

$$j_k^{o*} = \int_{\Lambda_k} r_k(\lambda_k) \min_{u_k} \int_{T_k(\lambda_k)} r_k(t_k|\lambda_k)(x_k^T(t_k|t^{k-1})Q\, x_k(t_k|t^{k-1}) + u_k^T R\, u_k + \ldots$$

$$+ \int_{\Lambda} r_N(\lambda_N) \min_{u_N} \int_{T_N(\lambda_N)} r_N(t_N|\lambda_N)(x_N^T(t_N|t^{N-1})\, Q\, x_N(t_N|t^{N-1}) +$$

$$+ u_N^T\, R\, u_N)dt_N\, d\lambda_N \ldots)dt_k\, d\lambda_k \tag{10}$$

Dla celów dowodu indukcyjnego zakładamy:

$$j_k^{o*} = \int_{T_k} r_k(t_k)(x_k^T(t_k|t^{k-1})K_k\, x_k(t_k)t^{k-1}) + a_k(t_k|t^{k-1}) + p_k)dt_k \tag{11}$$

Stąd:

$$j_{k-1}^{o*} = \int r_{k-1}(\lambda_{k-1}) \min_{u_{k-1}} \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\lambda_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2}).$$

$$\cdot\, Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) + u_{k-1}^T\, R\, u_{k-1} + j_k^{o*})dt_{k-1}\, d\lambda_{k-1} \tag{12}$$

4. SYNTEZA PRAWA STEROWANIA

Rozpoczynając od postaci (12), wyznaczenie prawa sterowania optymalnego u_{k-1}^o wymaga uwzględnienia ograniczeń (1) oraz złożonej postaci (11) dla j_k^{o*}, w której składnik $\int r_k(t_k)\, a_k(t_k|\, t^{k-1})dt_k$ nie zależy od sterowania u_{k-1}. Mamy kolejno:

$$j_{k-1}^{o*} = \int_{\Lambda_{k-1}} r_{k-1}(\lambda_{k-1}) \min_{u_{k-1}} \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\lambda_{k-1})\Big\{(x_{k-1}^T(t_{k-1}|\, t^{k-2}).$$

$$\cdot\, Q\, x_{k-1}(t_{k-1}|\, t^{k-2}) + u_{k-1}^T\, Ru_{k-1} +$$

$$+ \int_{T_k} r_k(t_k) \Big[(F\, x_{k-1}(t_{k-1}|\, t^{k-2}) + G\, u_{k-1} + w_{k-1}(t_k))^T \cdot K_k (F\, x_{k-1}(t_{k-1}|\, t^{k-2}) +$$

$$+ G\, u_{k-1} + w_{k-1}(t_k)) + p_k(t_k) + a_k(t_k|\, t^{k-1}) \Big]\, dt_k \Big\}\, dt_{k-1} | d\lambda_{k-1}$$

Dla uproszczenia wyników zakłada się dodatkowo:

$$\hat{w}_{k-1} = \int_{T_k} r_k(t_k) w_{k-1}(t_k) dt_k = \int_{\Lambda_k} r_k(\lambda_k) \int_{T_k(\lambda_k)} r_k(t_k|\, \lambda_k) w_{k-1}(t_k) \cdot$$

$$\cdot\, dt_k\, d\lambda_k = 0 \tag{13}$$

Stąd:

$$u^o_{k-1} = (R + G^T K_k G)^{-1} G^T K_k F\, \hat{x}_{k-1}, \tag{14}$$

gdzie:

$$\hat{x}_{k-1} = \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\, \lambda_{k-1})\, x_{k-1}(t_{k-1}|\, t^{k-2}) dt_{k-1} \tag{15}$$

Optymalny wskaźnik jakości ma postać:

$$j^{o*}_{k-1} = \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1}) (x^T_{k-1}(t_{k-1}|\, t^{k-2}) (F^T K_k F + Q) x(t_{k-1}|\, t^{k-2}) dt_{k-1} -$$

$$- \int_{\Lambda_{k-1}} r_{k-1}(\lambda_{k-1}) (\hat{x}_{k-1} F^T K_k G (R + G^T K_k G)^{-1} G^T K_k F\, \hat{x}_{k-1}) d\lambda_{k-1} +$$

$$+ \int_{T_k} r_k(t_k) (p_k(t_k) + w^T_{k-1}(t_k) K_k\, w_{k-1}(t_k)) dt_k +$$

$$+ \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1}) \int_{T_k} r_k(t_k)\, a(t_k|\, t^{k-1}) dt_k\, dt_{k-1} \tag{16}$$

Założenie (13) ma wpływ na prostotę zapisów. Z praktycznego punktu widzenia nie jest realne, stąd warto rozpatrzyć również przypadek, w którym:

$$\hat{w}_{k-1} = \int_{T_k} r_k(t_k) w_{k-1}(t_k) dt_k \neq 0$$

Prawo sterowania (14) oraz odpowiadający mu wskaźnik (16) można przedstawić w postaci:

$$u^o_{k-1} = (R + G^T K_k G)^{-1} G^T K_k F \hat{x}_{k-1} + u^{o\,d}_{k-1} \tag{14a}$$

$$j^{o\,*}_{k-1} = \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1}) x_{k-1}(t^{k-1})(F^T K_k F + Q) x_{k-1}(t^{k-1}) dt_{k-1} -$$

$$- \hat{x}^T_{k-1} F^T K_k G(R + G^T K_k G)^{-1} G^T K_k F \hat{x}_{k-1} +$$

$$+ \int_{T_k} r_k(t_k)(p_k(t_k) + w^T_{k-1}(t_k) K_k w_{k-1})) dt_k +$$

$$+ \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1}) \int_{T_k} r_k(t_k) a(t_k | t^{k-1}) dt_k \, dt_{k-1} + j^{o\,d}_{k-1} \tag{16a}$$

gdzie $u^{o\,d}_{k-1}$ i $j^{o\,d}_{k-1}$ są określone przez poniższy problem deterministyczny.

Niech będzie dany następujący pomocniczy deterministyczny problem optymalizacji:

$$\min_{u^d_o, \ldots, u^d_N} \sum_{k=0}^{N} (x_k^{dT} Q x_k^d + u_k^{dT} R u_k^d)$$

przy ograniczeniu:

$$x_k^d = F x^d_{k-1} + G u^d_{k-1} + \hat{w}_{k-1}; \; x_o^d = 0$$

$u^{o\,d}_{k-1}$ jest optymalnym prawem sterowania w etapie k-1 dla tego problemu,

$j^{o\,d}_{k-1}$ jest odpowiadającym mu optymalnym wskaźnikiem jakości.

5. RÓWNOWAŻNOŚĆ PRAW STEROWANIA W STRUKTURACH OLF I CL

Zakończenie dowodu indukcyjnego odnośnie do postaci (11) optymalnego wskaźnika jakości j_k^o połączymy z badaniem wpływu założonej struktury sterowania na postać wskaźnika i wynikającą stąd postać prawa sterowania. Dla przekształcenia wskaźnika (16) do postaci (11) wykorzystamy następującą tożsamość:

$$\int_T r(t)x^T(t)P\,x(t)dt = \int_\Lambda r(\lambda)\ \hat{x}^T P\,\hat{x}\,d\lambda +$$

$$+ \int_T r(t)(x(t)-\hat{x})^T P(x(t)-\hat{x})dt + 2\int_T r(t)\hat{x}^T T(x(t)-\hat{x})dt$$

ale

$$\int_T r(t)\hat{x}^T P(x(t)-\hat{x})dt = \int_\Lambda r(\lambda)\ \hat{x}^T P \int_{T(\lambda)} r(t|\lambda)(x(t)-\hat{x})dt = 0$$

Stosując powyższą tożsamość do (16) przekształcamy je do postaci:

$$j_{k-1}^{o*} = \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1})(x_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2})\ K_{k-1}\ x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) +$$

$$+ a_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) + p_{k-1})dt_{k-1}, \tag{17}$$

gdzie:

$$K_{k-1} = F^T(K_k - K_k\,G\,R + G^T K_k\,G^{-1}\,G^T K_k)F + Q$$

$$a_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) = e_{k-1}^T(t_{k-1}|t^{k-2})K_{k-1}\ e_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) +$$

$$+ \int_{T_k} r_k(t_k)a_k(t_k(t_k|t^{k-1})dt_k$$

$$p_{k-1} = \int_{T_k} r_k(t_k)(p_k(t_k) + w_{k-1}^T(t_k)K_k\ w_{k-1}(t_k))dt_k$$

oraz

$$e_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) = x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) - \hat{x}_{k-1}$$

$$\hat{x}_{k-1} = \int_{T_{k-1}(\lambda_{k-1})} r_{k-1}(t_{k-1}|\lambda_{k-1})x_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2})dt_{k-1} \tag{18}$$

Postać (17) jest zgodna z założoną (11).

Ponieważ w trakcie wyprowadzania prawa sterowania optymalnego u^o_{k-1} korzystano z założenia o niezależności składnika $\int_{T_k} r_k(t_k)a_k(t_k|t^{k-1})dt_k$ od wyznaczonego sterowania, należy obecnie wykazać niezależność składnika $\int r_{k-1}(t_{k-1})a_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2})dt_{k-1}$ od sterowania u_{k-2} dla obydwu rozpatrywanych struktur OLF i CL, jeżeli odpowiadające im prawa sterowania mają być równoważne.

Pisząc jawną postać rozpatrywanego składnika mamy:

$$\int r_{k-1}(t_{k-1})a_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2})dt_{k-1} =$$

$$= \int_{T_{k-1}} r_{k-1}(t_{k-1})(e^T_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2})K_{k-1}\, e_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}) +$$

$$+ \int_{T_k} r_k(t_k)e^T_k(t^x_{k-1,k}|t^{k-2})K_k\, e_k(t_{k-1,k}|t^{k-2}) + \ldots\ldots +$$

$$+ \int_{T_N} r_N(t_N)\, e^T_N(t_{k-1,N}|t^{k-2})Q\, e_N(t_{k-1,N}|t^{k-2})dt_N\ldots)dt_K)dt_{k-1} \qquad (19)$$

W chwili k-2 dany jest zbiór T^{k-2}. Ponieważ jednak zbiór ten nie zależy od u_{k-2}, wystarczy badać niezależność od u_{k-2} wyrażenia (19) dla ustalonego elementu $t^{k-2} \in T^{k-2}$.

Dla struktury OLF niezależność wyrażenia (19) od u_{k-2} jest dla przyjętego modelu (1) bezpośrednio widoczna. Mamy bowiem:

$$T_i(\lambda_i) = T_i, \qquad i = k-1,\ldots,N$$

stąd po uwzględnieniu liniowości względem u równania (1) mamy:

$$e_i(t_{k-1,i}|t^{k-2}) = x_i(t_{k-1,i}|t^{k-2}) - \int_{T_i} r_i(t_i)x_i(t_{k-1,i}|t^{k-2})dt_i =$$

$$= \tilde{x}_i(t_{k-1,i}|t^{k-2}) - \int_{T_i} r_i(t_i)\tilde{x}_i(t_{k-1,i}|t^{k-2})dt_i \qquad i = k-1,\ldots N,$$

gdzie węzykiem oznaczono składowe swobodne odpowiadające $(u_{k-2},\ldots,u_{i-1}) = (0)$.

---

x) Zapis: $t_{k-1,i} = t_{k-1},\ldots, t_i$

Dla struktury CL niezależność wyrażenia (19) od u_{k-2} jest trudniejsza do badania. W pracy ograniczymy się do przypadku szczególnego przyjmując, że informację bieżącą w chwili i, pozwalającą na ograniczenie zbioru $T^{k-1,i} \mid t^{k-2}$ do $T^{k-1,i}(\lambda^{k-1,i}) \mid t^{k-2}$, stanowi ciąg wyjść od chwili k-1 do i włącznie.

Ogólnie wystarczającym warunkiem niezależności wyrażenia (19) od u_{k-2} dla liniowego modelu (1) jest niezależność zbiorów $T^{k-1,i}(\lambda^{k-1,i})$ od ciągów sterowań $(u_{k-2},\ldots, u_{i-1})$, $i=k-1,\ldots,N$. Biorąc pod uwagę założenie o niezależności wyrażenia analogicznego do (19) w chwili k-tej wystarczy obecnie niezależność zbiorów $T^{k-1,i}(\lambda^{k-1,i})$, $i = k-1,\ldots,N$ jedynie od u_{k-2}. Z kolei, jeśli założyć stacjonarność modelu (1), wystarczy niezależność zbioru $T_N(\lambda_N)$ od u_{k-2}.

Dzięki niezależności zbiorów $T^{k-1,i}(\lambda^{k-1,i})$ od ciągów $(u_{k-2},\ldots,u_{i-1})$, $= k-1,\ldots,N$, każdą z różnic występujących w wyrażeniu (19) można przedstawić w postaci:

$$e_i(t_{k-1,i} \mid t^{k-2}) = x_i(t_{k-1,i} \mid t^{k-2}) - \int_{T_i(\lambda_i)} r_i(t_i \mid \lambda_i) x_i(t_{k-1,i} \mid t^{k-2}) dt_i = \tilde{x}_i(t_{k-1,i} \mid t^{k-2}) - \int_{T_i(\lambda_i)} r_i(t_i \mid \lambda_i) \tilde{x}_i(t_{k-1,i} \mid t^{k-2}) dt_i,$$

gdzie wężykiem oznaczono odpowiednio składowe swobodne modelu (1) i filtru.

Powracając do założonej, szczególnej struktury informacji bieżącej w chwili "i" w postaci ciągu $(y_{k-1},\ldots, y_i)$, gdzie y jest wyjściem pomiarowym w modelu (1), mamy:

$$T^{k-1,i} \mid (y_{k-1},\ldots,y_i) = T^{k-1,i}(\lambda^{k-1,i}) \quad i = k-1,\ldots,N.$$

Zakładając wyjście o postaci:

$$y_k(t^k, \tau_k) = H\, x_k(t^k) + v_k(\tau_k) \tag{20}$$

można pokazać, że zachodzi:

$$T^{k-1,i} \mid (\tilde{y}_{k-1},\ldots,\tilde{y}_i) = T^{k-1,i}(\lambda^{k-1,i}), \quad i = 1,\ldots,N$$

gdzie ciąg $\tilde{y}_{k-1},\ldots,\tilde{y}_i$ odpowiada ciągowi $(u_{k-2},\ldots,u_{i-1}) = (0)$.

Wykazanie powyższej własności wymaga rozpatrzenia problemu filtracji dla niepewności o modelu ograniczonym.

Podstawową ideę dowodu pokażemy dla przejścia z chwili k-2 do k-1 i przy założeniu "niezależności" zbiorów $w_{k-2}(t_{k-1})$, $t_{k-1} \in T_{k-1}$, $v_{k-1}(\tau_{k-1})$, $\tau_{k-1} \in \mathcal{T}_{k-1}$ rozumianej jako $\forall t_{k-1} \in T_{k-1}, \mathcal{T}_{k-1} | t_{k-1} = \mathcal{T}_{k-1}$.

Dla ustalonego t^{k-2}, wykonując predykcję jednokrokową według modelu (1) przy $u_{k-2} = 0$, otrzymujemy zbiór $\tilde{X}'_{k-1} = \{\tilde{x}_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}): t_{k-1} \in T_{k-1}\}$. Znajomość wyjścia $\tilde{y}_{k-1}$ określa natomiast zbiór:

$$X''_{k-1} = \{x_{k-1} : \tilde{y}_{k-1} = H\tilde{x}_{k-1} + v_{k-1}(\tau_{k-1}),\ \tau_{k-1} \in \mathcal{T}_{k-1}\}.$$

Iloczyn mnogościowy $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}'_{k-1} \cap \tilde{X}''_{k-1} = \{\tilde{x}_{k-1}(t_{k-1}|t^{k-2}):$ $t_{k-1} \in T_{k-1}(\lambda_{k-1})\}$ odpowiada filtracji jednokrokowej przy $u_{k-2} = 0$. Dopuszczalne $u_{k-2} \neq 0$ przesuwa zbiory $\tilde{X}'_{k-1}$, $\tilde{X}''_{k-1}$, nie zmieniając ich kształtu, stąd również jedynie przesunięciu ulega zbiór $\tilde{X}_{k-1}$, a określający go zbiór $T_{k-1}(\lambda_{k-1})$ nie ulega zmianie.

6. ZAKOŃCZENIE

Podsumowując rozważania i wyniki uzyskane w pracy dla niepewności o modelu ograniczonym można stwierdzić:

1. Agregacja pierwotnego wskaźnika jakości wykonana z zadaną funkcją wagi przenosi się na agregację stanu niepewnego pod warunkiem, że agregowany wskaźnik jest kwadratowy, równanie tranzycji modelu liniowe, a funkcja agregacji nie zależy od stanu i sterowań.

2. Funkcje agregacji dla stanu w poszczególnych chwilach horyzontu sterowania są takie, by ich iloczyn dawał zadaną funkcję agregacji wskaźnika.

3. Prawo sterowania jest liniową funkcją agregacji stanu niepewnego, a określająca je macierz jest taka sama jak w przypadku deterministycznym.

4. Prawa sterowania odpowiadające strukturom CL i OLF są równoważne przy dodatkowym założeniu o liniowości równania wyjścia.

LITERATURA

[1] Åstrom K. I.: Introduction to Stochastic Control Theory. Acad. Press. New York - London 1970.

[2] Bar-Shalom Y., Tse E.: Dual Effect Certainty Equivalence and Separation in Stochastic Control. IEEE Trans on AC. Vol. AC-19. 1974.

[3] Wojciechowski K.: Sterowanie w strukturze ze sprzężeniem, otwartej w horyzoncie delta, wyznaczane przy różnych modelach niepewności. Konf. "Cybernetyka w gospodarce morskiej". Sopot 14-16.10.1984 r.

[4] Wojciechowski K.: Sterowanie optymalne w problemie LQS. ZN Automatyka z.81, Gliwice 1986.

Recenzent: Prof. dr inż. Tadeusz Puchałka

Wpłynęło do Redakcji 10.02.1982 r.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С МНОЖЕСТВЕННОЙ МОДЕЛЬЮ НЕУВЕРЕННОСТИ И АГРЕГАЦИИ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Р е з ю м е

В работе представлена проблема управления в условиях множественной неуверенности. Вторичный детерминистический показатель качества принят в виде агрегата первичного показателя, определённого при заданной весовой функции. Показано, что в случае линейных уравнений транзиции и выхода аддитивных помех с множественной моделью операция агрегации показателя качества переходит на состояние неуверенности а правило управления имеет вид линейной функции агрегации от неуверенного состояния. В этом случае имеем дело с тождеством правил управления в структурах OLF и CL.

OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH SET MEMBERSHIP MODEL OF UNCERTAINTY AND WEIGHTING FUNCTIONS AGGREGATION

S u m m a r y

A control problem in the presence of a set constrained uncertainty is presented. A secondary deterministic performance index is proposed in the form of a primary index aggregate found for a given weighting function. In the case of linear state and output equations and additive set constrained disturbances the aggregation operation is transformed onto uncertain states. The control law has a form of a linear function of the uncertain state aggregate. OLF and CL control laws are equivalent.