ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 81 Nr kol. 851

Konrad WOJCIECHOWSKI

Instytut Automatyki
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

STEROWANIE OPTYMALNE W PROBLEMIE L Q S*)

Streszczenie. W pracy przedstawiono syntezę praw sterowania optymalnego w problemie L Q S , scharakteryzowanym przez liniowe dyskretne równania tranzycji jednokrokowej, wyjścia i kwadratowy sumacyjny wskaźnik jakości. W odróżnieniu do klasycznego L Q G problemu w rozpatrywanym założono zbiorowy model niepewności. Pokazano, że otrzymane prawa sterowania i określające je macierze są analogiczne do znanego rozwiązania problemu L Q G .

1. WPROWADZENIE

W teorii sterowania optymalnego w warunkach niepewności podstawowe rezultaty analityczne uzyskano dla tzw. problemu LQG (liniowy model, kwadratowy wskaźnik jakości, gaussowskie zakłócenia). W dyskretnej wersji tego problemu zakłada się liniowość równań tranzycji jednokrokowej i wyjścia dla modelu procesu. Niepewność reprezentowana jest przez występujące w równaniach nieskorelowane zakłócenia o rozkładzie gaussowskim i zerowej wartości średniej. Jakość sterowania jest wyrażona przez średnią wartość kwadratowego sumacyjnego wskaźnika jakości.

Pokazuje się, że przy powyższych założeniach, argumentem liniowej funkcji, reprezentującej prawo sterowania optymalnego, jest ocena stanu wykonana na podstawie informacji bieżącej. Dodatkowo funkcja ta jest tożsama z funkcją przedstawiającą prawo sterowania dla przypadku deterministycznego, otrzymanego z omawianego przez pominięcie wszystkich zakłóceń losowych.

Przyjęty w problemie LQG losowy model niepewności powoduje w zastosowaniach szereg wątpliwości co do zasadności korzystania z rezultatów teoretycznych. Sprawdzenie czy występujące w realnym procesie zakłócenia są losowe, mają postulowany rozkład normalny i w końcu określenie ich parametrów wymaga dużego nakładu pracy, a niekiedy jest wprost niewykonalne. W przypadku odpowiedzi negatywnej stosowanie wyników teoretycznych jest heurystyczne.

x) Praca częściowo finansowana z projektu badawczego RP.I.02: Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych.

W pracy proponuje się inny, tzw. zbiorowy, model niepewności. Model ten zakłada, że wartości występujących zakłóceń należą do znanego wypukłego i ograniczonego zbioru. Proponowany model niepewności jest prostszy od losowego, a jednocześnie bliższy sytuacjom praktycznym.

Praca pokazuje, że dla przyjętego modelu niepewności zbiorowej przy niezmienionych założeniach odnośnie do liniowości równań tranzycji i wyjścia oraz kwadratowego wskaźnika jakości uzyskać można wyniki o strukturze analogicznej jak w problemie LQG. Przez analogię do powyższego rozpatrywany problem nazywa się w pracy LQS (liniowy model, kwadratowy wskaźnik jakości, zakłócenia o zbiorowym modelu niepewności).

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Ogólnie, założony liniowy dyskretny model sterowanego procesu można przedstawić w postaci:

$$\tilde{x}_{k+1} = F\,\tilde{x}_k + G\,u_k + \tilde{w}_k\ ;\ \tilde{x}_o \tag{1}$$

$$\tilde{y}_{k+1} = H\,\tilde{x}_{k+1} + \tilde{v}_{k+1} \tag{2}$$

gdzie:

$\tilde{x}_i, \tilde{w}_i, \tilde{v}_i$ - zmienne niepewne,

u_i - sterowanie deterministyczne,

F, G, H - macierze deterministyczne.

Wskaźnik jakości, oceniający efekt sterowania, ma postać:

$$\tilde{j} = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{x}_k^T\,Q\,\tilde{x}_k + u_k^T\,R\,u_k), \tag{3}$$

gdzie:

$\tilde{j}$ - zmienna niepewna,

Q, R - deterministyczne, dodatnio określone macierze wag,

N - indeks ostatniej chwili rozpatrywanego horyzontu sterowania.

W zapisach (1), (2), (3) dodatkowego określenia wymagają występujące w nich działania na zmiennych niepewnych. Ponieważ w pracy rozpatruje się jedynie zmienne niepewne o modelu zbiorowym, ograniczymy się do działań na tych zmiennych.

Zakłada się, że charakterystykę zmiennej niepewnej o modelu zbiorowym przedstawia zbiór, stąd w dalszym ciągu stosowany będzie zapis:

$$\tilde{a} \triangleq A = \left\{ a(t) : a(t) \in R^1,\ t \in T \subset R \right\} \tag{4}$$

Dla wprowadzonego typu zmiennych niepewnych określamy następujące działania dodawania tych zmiennych i mnożenia ich przez zmienne deterministyczne (skalarne, wektorowe lub macierzowe)

i) $\alpha \in R \quad A = \{a(t);\ t \in T\};\quad \alpha A = \{\alpha a(t) : t \in T\}$

$w \in R^1,\ A = \{a(t): a(t) \in R^1,\ t \in T\};$

$w^T A = \{w^T a(t) : t \in T\}$

ii) $A = \{a(t): a(t) \in R^1,\ t \in T\},\ B = \{b(\tau) : b(\tau) \in R^1,\ \tau \in \mathcal{T}\};$

$A + B = \{a(t) + b(\tau) : t \in T,\ \tau \in \mathcal{T}\}$

Działanie ii) bywa nazywane sumą wektorową zbiorów.

Dodatkowo wprowadza się operację agregacji określoną następująco:

$$S\,A = \underset{A}{S}\,A = \int_A a\,da \Big/ \int_A da = \frac{1}{c_A} \int_A a\,da \tag{5}$$

przy założeniu, że element określony przez wyrażenie (5) istnieje i należy do zbioru A. Założenie to jest spełnione, jeśli zbiór A jest ograniczonym i wypukłym podzbiorem przestrzeni R^1.

Po powyższych wyjaśnieniach model (1), (2) i wskaźnik jakości (3) przepisać można w postaci:

$$X_{k+1} = F\,X_k + G\,u_k + W_k\ ;\ X_o \tag{6}$$

$$Y_{k+1} = H\,X_{k+1} + V_{k+1} \tag{7}$$

$$I = \sum_{k=1}^{N} (X_k^T\ Q\ X_k + u_k^T\ R\ u_k) \tag{8}$$

Ponieważ z założenia sterowanie ma być wielkością deterministyczną, wskaźnik (8) zastępujemy wyrażeniem

$$j = S\,J \tag{9}$$

Sprecyzowania wymaga struktura sterowania. Zakłada się tu analogicznie jak w problemie LQG, że poszukiwane na kolejnych etapach są prawa sterowania optymalnego, rozumiane jako funkcje informacji bieżącej w procesie. Mamy:

$$u_i : \{(X_{i-1},\ y_i)\} \rightarrow U,$$

gdzie przez $\{(X_{i-1}, y_i)\}$ oznaczono zbiór par, w których element pierwszy jest zbiorem X_{i-1} "podsumowującym" informację bieżącą do chwili i-1 włącznie, element drugi oznaczony przez y_i - informację uzyskiwaną w chwili i-tej. Przez U określono zbiór wartości sterowań.

Poszukując optymalnych praw sterowania będziemy zakładać, że równania (6), (7) obowiązują również dla informacji, tj. aktualna informacja bieżąca lub stan niepewny określają przyszłe informacje już jako zmienne niepewne. Inaczej zakładamy, że sterowanie posiada strukturę CL (pętla zamknięta).

Ostatecznie sformułowanie przyjęte do dalszych rozważań ma postać:

$$\min_{(u)} \; S\, J \tag{10}$$

przy ograniczeniach (6), (7) z dodatkowymi upraszczającymi rozwiązanie warunkami:

$$S\, W_i = 0, \quad S\, V_{i+1} = 0 \quad i = 0,\dots,N-1 \tag{11}$$

3. SYNTEZA PRAWA STEROWANIA

Do rozwiązania problemu optymalizacji (10) przy ograniczeniach (6), (7) wykorzystuje się metodę programowania dynamicznego w warunkach niepewności. Mamy:

$$\min_{(u)} S\, J = \min_{(u)} S(X_1^T Q X_1 + u_1^T R u_1 + \dots + X_{n-1}^T Q X_{n+1} +$$

$$+ u_{n-1}^T R u_{n-1} + X_n^T Q X_n + u_n^T R u_n + \dots +$$

$$+ X_N^T Q X_N + u_N^T R u_N)$$

Ponieważ operacja S określona przez (5) jest: i) łączna, ii) rozdzielna względem dodawania skalarów, zaś sterowanie jest z założenia funkcją stanu niepewnego na danym etapie, można dalej napisać:

$$\min_{(u)} S\, J = \underset{Y_1|X_0}{S} \; \min_{u_1(X_0,y_1)} \; \underset{|X_0,y_1}{S} (X_1^T Q X_1 + u_1^T R u_1 + \dots +$$

$$\underset{Y_{n-1}|X_{n-2}}{S} \; \min_{u_{n-1}(X_{n-2},y_{n-1})} \; \underset{X_{n-2},y_{n-1}}{S} (X_{n-1}^T Q X_{n-1} + u_{n-1}^T R u_{n+1} +$$

$$\underset{Y_n|X_{n-1}}{S} \quad \min_{u_n(X_{n-1},y_n)} \quad \underset{|X_{n-1},y_n}{S} (X_n^T Q X_n + u_n^T R u_n + \ldots +$$

$$\underset{Y_N|X_{N-1}}{S} \quad \min_{u_N(X_{N-1},y_N)} \quad \underset{|X_{N-1},y_N}{S} (X_N^T Q X_N + u_N^T R u_N)\ldots))\ldots) \quad (12)$$

W powyższym zapisie zastosowano dla przejrzystości oznaczenia:

$$\underset{A|B}{S} \quad f(A, B) = S(f(A,B) \mid B)$$

$$\underset{A,B|C}{S} \quad f(A,B,C) = \underset{|C}{S} \quad f(A,B,C) = S(f(A,B,C) \mid C)$$

Podstawowe dla dalszych rozważań równanie optymalności ma w rozpatrywanym przypadku postać:

$$j_{n-1}^{o*} = \underset{Y_{n-1}|X_{n-2}}{S} \quad \min_{u_{n-1}(X_{n-2},y_{n-1})} \quad \underset{|X_{n-2},y_{n-1}}{S} (X_{n-1}^T Q X_{n-1} + u_{n-1}^T R u_{n-1} +$$

$$+ j_n^{o*}(X_n))$$

Zakładając:

$$j_n^{o*} = \underset{|X_{n-1}}{S} (X_n^T K_n X_n) + \underset{|X_{n-1}}{S} (A_n), \quad (13)$$

gdzie, również z założenia, $\underset{|X_{n-1}}{S} (A_n)$ nie zależy od u_{n-1} i uwzględniając, że:

$$j_N^{o*} = \underset{|X_{N-1}}{S} (X_N^T Q X_N)$$

można indukcyjnie pokazać słuszność postaci (13), co zamieszczono w Dodatku. Wynikające stąd prawo sterowania optymalnego ma postać:

$$u_{n-1}^o = -(R + G^T K_n G)^{-1} G^T K_n \underset{|X_{n-2},y_{n-1}}{S} (X_{n-1}), \quad (14)$$

gdzie deterministyczna, zmienna wraz z numerem etapu macierz K_n spełnia równanie:

$$K_{n-1} = F^T K_n F - F^T K_n G(R + G^T K_n G)^{-1} G^T K_n F + Q; \; K_N = Q \tag{15}$$

4. WNIOSKI

Prawo sterowania optymalnego dla problemu L Q S przedstawia wyrażenie (14) wraz z dodatkowym równaniem (15). Otrzymany wynik jest w pełni analogiczny do rozwiązania problemu L Q G pomimo tego, że modele niepewności przyjmowane w problemach L Q G i L Q S, gaussowski i zbiorowy, są różne.

Otrzymany wynik uzasadnia stosowanie prawa sterowania (14) w realnych, odnośnie do założeń o zakłóceniach, przypadkach praktycznych, przy czym dodatkowe przyjęte w pracy założenie, mówiące, że środki ciężkości zbiorów W_i, V_i leżą w początku układu współrzędnych, ma charakter upraszczający i przytoczone rozważania łatwo rozszerzyć na przypadek dowolnego ich położenia.

Problem wyznaczania na podstawie informacji bieżącej środka ciężkości zbioru X_{n-1} nie jest w pracy rozpatrywany. W swojej strukturze logicznej jest on analogiczny do klasycznego problemu filtracji.

Pewne przykładowe rozwiązanie tego problemu dla zbiorowego modelu niepewności można znaleźć w [3].

Dodatek

Podstawiając (13) do równania programowania dynamicznego otrzymamy:

$$j^{o*}_{n-1} = \underset{Y_{n-1}|X_{n-2}}{S} \; \min_{u_{n-1}} \; \underset{X_{n-2}, y_{n-1}}{S} (X^T_{n-1} Q X_{n-1} + u_{n-1} R u_{n-1} +$$

$$+ \underset{|X_{n-1}}{S} (X^T_n K_n X_n) + \underset{|X_{n-1}}{S} (A_n)) \tag{D.1}$$

W powyższym równaniu i dalej przez u rozumie się wartość funkcji dla pewnego nie wymienionego jawnie argumentu. Argumentem tym jest warunek w wewnętrznej operacji S, (porównaj z (12)).

Odpowiednio dla zapisu $\underset{|X_{n-1}}{S}$ w postaci (D.1), X_n wyrażamy przez X_{n-1}, W_{n-1} i u_{n-1}, wykorzystując równanie:

$$X_n = F X_{n-1} + G u_{n-1} + W_{n-1} \tag{D.2}$$

Po podstawieniu (D.2) do (D.1), wykonaniu odpowiednich operacji oraz przy założeniu:

i) $S_{|X_{n-1}} W_{n-1} = S_{Y_n} \; S_{X_n|X_{n-1},y_n} W_{n-1} = S\, W_{n-1}$

wyrażającym niezależność zbiorów W_{n-1}, V_{n-1} oraz

ii) $S\, W_{n-1} = 0$,

mającym uprościć wyniki, otrzymujemy:

$$j^{o*}_{n-1} = S_{Y_{n-1}|X_{n-2}} \min_{u_{n-1}} S_{X_{n-2},y_{n-1}} (X^T_{n-1}(F^T K_n F + Q) X_{n-1} +$$

$$+ u^T_{n-1} (G^T K_n G + R) u_{n-1} + S(W^T_{n-1} K_n W_{n-1}) +$$

$$+ 2 u^T_{n-1} G^T K_n F X_{n-1} + S_{|X_{n-1}} (A_n))$$

Przyrównując do zera pochodną względem u_{n-1} wyrażenia objętego minimalizacją mamy:

$$u^o_{n-1} = - (R + G^T K_n G)^{-1} G^T K_n \hat{x}_{n-1}, \tag{D.3}$$

gdzie:

$$\hat{x}_{n-1} = S_{|X_{n-2},y_{n-1}} X_{n-1}$$

Stąd uwzględniając, że $S_{Y_{n-1}|X_{n-2}} S_{|X_{n-2},y_{n-1}} (.)$, otrzymujemy dalej:

$$j^{o*}_{n-1} = S_{|X_{n-2}} (X^T_{n-1}(F^T K_n F + Q)X_{n-1}) -$$

$$+ S_{Y_{n-1}|X_{n-2}} (\hat{x}^T_{n-1} F^T K_n G (R + G^T K_n G)^{-1} G^T K_n F \hat{x}_{n-1}) +$$

$$+ S(W^T_{n-1} K_n W_{n-1}) + S_{|X_{n-2}} S_{|X_{n-1}}$$

$$= S_{|X_{n-2}} (X^T_{n-1}(F^T K_n F - F^T K_n G(R + G^T K_n G)^{-1} G^T K_n F +$$

$$+ Q)\, X_{n-1} - S_{|X_{n-2}}(\bar{X}^T_{n-1}\, P_n\, \bar{X}_{n-1}) +$$

$$+ S(W^T_{n-1}\, K_n\, W_{n-1}) + S_{|X_{n-2}}\, S_{|X_{n-1}}\, A_n \tag{D.4}$$

W ostatnim przekształceniu wykorzystano następującą tożsamość:

$$Y_{n-1}\, S_{|X_{n-2}}\, \hat{x}^T_{n-1}\, P_n\, \hat{x}_{n-1} = S_{|X_{n-2}}(X^T_{n-1}\, P_n X_{n-1}) - S_{|X_{n-2}}(\bar{X}^T_{n-1}\, P_n \bar{X}_{n-1}),$$

gdzie:

$$P_n = F^T K_n\, G(R + G^T K_n\, G)^{-1}\, G^T K_n\, F$$

$$\bar{X}_{n-1} = X_{n-1} - \hat{x}_{n-1}$$

Oznaczając w wyrażeniu (D.4)

$$K_{n-1} = F^T K_n\, F - F^T K_n\, G(R + G^T K_n\, G)^{-1}\, G^T K_n\, F + Q$$

$$S\, A_{n-1}{}_{|X_{n-2}} = S((\bar{X}^T_{n-1}\, P_n\, \bar{X}_{n-1})_{|X_{n-2}} + S_{|X_{n-1}}\, A_n) + S(W^T_{n-1}\, K_n\, W_{n-1})$$

$$S_{|X_{N-1}}\, A_N = 0 \tag{D.5}$$

otrzymuje się zgodność z założoną postacią (13), co kończy dowód indukcyjny, jeśli dodatkowo pokazać, że $S_{|X_{n-2}}\, A_{n-1}$ nie zależy od u_{n-2}.

W tym celz rozpatrzmy składniki: $S_{|X_{n-2}}(\bar{X}^T_{n-1}\, P_n\, \bar{X}_{n-1})$, $S_{|X_{n-2}}\, A_n$.

W pierwszym z nich występuje różnica $\bar{X}_{n-1}$ określona jako

$$\bar{X}_{n-1}|X_{n-2}, y_{n-1} = \hat{x}_{n-1}|X_{n-2}, y_{n-1} - X_{n-1}|X_{n-2}$$

Mamy:

$$\hat{x}_{n-1}|X_{n-2}, y_{n-1} = S_{|X_{n-2}, y_{n-1}}((X_{n-1}|X_{n-2}) \cap (X_{n-1}|y_{n-1})) =$$

$$= S_{|X_{n-2}, y_{n-1}}((X^S_{n-1}\, G\, u_{n-2}|X_{n-2}) \cap (X^S_{n-1} + G\, u_{n-2}|y^S_{n-1} +$$

$$+ H G u_{n-1})) = S_{|X_{n-2}, y^S_{n-1}} ((X^S_{n-1}|X_{n-2}) \cap (X^S_{n-1}|y_{n-1})) +$$

$$+ G u_{n-2} = \hat{x}^S_{n-1} + G u_{n-2}$$

oraz $X_{n-1}| X_{n-2} = F X_{n-2} + G u_{n-2}$.

Stąd rozpatrywana różnica nie zależy od u_{n-1} i wynosi:

$$\bar{X}_{n-1} = \hat{x}^S_{n-1} - X^S_{n-1},$$

gdzie:

$$X^S_{n-1} = F X_{n-2}$$

Wobec powyższego składnik $S_{|X_{n-2}} (\bar{X}^T_{n-1} P_n \bar{X}_{n-1})$ nie zależy od u_{n-2}.

Pozostaje do rozpatrzenia składnik $S_{|X_{n-2}} (A_n)$. Z założenia (13) nie zależy od u_{n-1}.

Istotnym do rozważań składnikiem zmiennej niepewnej A_n jest

$$\bar{X}^T_n P_{n+1} \bar{X}_n, \text{ gdzie:}$$

$$\bar{X}_n| X_{n-2}, y_{n-1}, y_n = \hat{x}_n|X_{n-2}, y_{n-1}, y_n - X_n|X_{n-2}$$

Mamy:

$$\hat{x}_n| X_{n-2}, y_{n-1}, y_n = S_{|X_{n-2}, y_{n-1}, y_n} [F((F X_{n-2} + G u_{n-2}) \cap (F X_{n-2} +$$

$$+ G u_{n-2}|y_{n-1})) + G u_{n-1}] \cap [(F^2 X_{n-2} +$$

$$+ F G u_{n-2} + G u_{n-1})| y_n],$$

gdzie:

$$F((F X_{n-2} + G u_{n-2}) \cap (F X_{n-2} + G u_{n-2}|y_{n-1}) + G u_{n-1} =$$

$$F(F X_{n-2} \cap F X_{n-2}|y^S_{n-1}) + F G u_{n-2} + G u_{n-1} = X_n|X_{n-2}, y_{n-1}$$

$$(F^2 X_{n-2} + F G u_{n-2} + G u_{n-1})| y_n =$$

$$F^2 X_{n-2}|y^S_n + F G u_{n-2} + G u_{n-1} = X_n|X_{n-2}, y_n.$$

stąd:

$$S_{|X_{n-2},y_{n-1},y_n}(X_n|X_{n-2},y_{n-1}) \cap (X_n|X_{n-2},y_n) =$$

$$= S_{|X_{n-2},y^S_{n-1},y^S_n}(X_n|X_{n-2},y^S_{n-1}) \cap (X_n|X_{n-2},y^S_n) + F\,G\,u_{n-2} + G\,u_{n-1}$$

Biorąc pod uwagę, że jednocześnie:

$$X_n|X_{n-2} = F^2\,X_{n-2} + F\,G\,u_{n-2} + G\,u_{n-1},$$

otrzymujemy, że rozpatrywana różnica nie zależy od u_{n-2}. Rozumowania podobne do przedstawionego dla różnic $\bar{X}_{n-1}$ i $\bar{X}_n$ powtarzają się dla $\bar{X}_{n+1},\ldots,\bar{X}_N$, gdzie $\bar{X}_N = 0$.

LITERATURA

[1] Åstrom K. I.: Introduction to Stochastic Control Theory Acad. Press. New York-London 1970.

[2] Bar-Shalom Y., Tse E.: Dual Effect Certainty Equivalence and Separation in Stochastic Control, IEEE Trans. on A C. vol. AC-19, 1974.

[3] Schweppe F. C.: Układy dynamiczne w warunkach losowych. WNT, Warszawa 1978.

[4] Wojciechowski K.: Sterowanie w strukturze ze sprzężeniem, otwartej w horyzoncie delta, wyznaczane przy różnych modelach niepewności, Konf. "Cybernetyka w Gospodarce Morskiej", Sopot 14-16.10.1984.

Recenzent: Prof. dr inż. Tadeusz Puchałka

Wpłynęło do Redakcji 15.02.1984 r.

ОПТИИАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ПРОБЛЕМЕ

Р е з ю м е

В работе дан синтез правил оптимального управления в проблеме L Q S , охарактеризованного линейными дискретными уравнениями одношаговой транзиции, уравнениями выхода и крадратным показателем качества в виде суммы. В отличии от классической LQG проблемы в рассматриваемой предположена множественная модель неуверенности. Показано, что полученные правила и определяющие их матрицы являются аналогичными в отношении к известному решению проблему L Q S .

OPTIMAL CONTROL IN L Q S PROBLEM

S u m m a r y

In the paper optimal control law design in the L Q S problem is presented. The problem is described by a linear discrete one-step transition equation, output equation and quadratic additive performance index. In the contrary to the classical L Q G problem the set-membership model of uncertainty is considered. The control law is proved to be analogical to the solution of the L Q G problem.