

Piotr ZGORZELSKI

Instytut Automatyki  
Politechniki Śląskiej w Gliwicach

## ALGORYTMY APROKSYMACJI STOCHASTYCZNEJ W ZASTOSOWANIU DO IDENTYFIKACJI OBIEKTÓW STATYCZNYCH I DYNAMICZNYCH

**Streszczenie.** Przedstawiono wyniki badań nad właściwościami algorytmów aproksymacji stochastycznej dla identyfikacji obiektów statycznych i dynamicznych. Ich własności porównano z rekurencyjną metodą najmniejszych kwadratów. Podano również pewne wskazówki mogące pomóc w praktycznym korzystaniu z tych algorytmów.

### 1. WSTĘP

Wszystkie algorytmy aproksymacji stochastycznej są algorytmami rekurencyjnymi o bardzo prostej budowie. Prostota ta oraz mała ilość informacji a priori o identyfikowanym obiekcie są jej ważnymi zaletami. Czy prostota ta jednak nie musi być czymś okupiona, np. zwiększoną liczbą kroków identyfikacji, gorszą jakością otrzymanego modelu lub tym podobnym? Aby móc odpowiedzieć na to pytanie, przeprowadzono badania symulacyjne dla stosunkowo szerokiego wachlarza różnych algorytmów aproksymacji stochastycznej. Wnioski z tych badań przedstawiono w artykule. Dla oceny własności tych algorytmów porównano je z własnościami rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów.

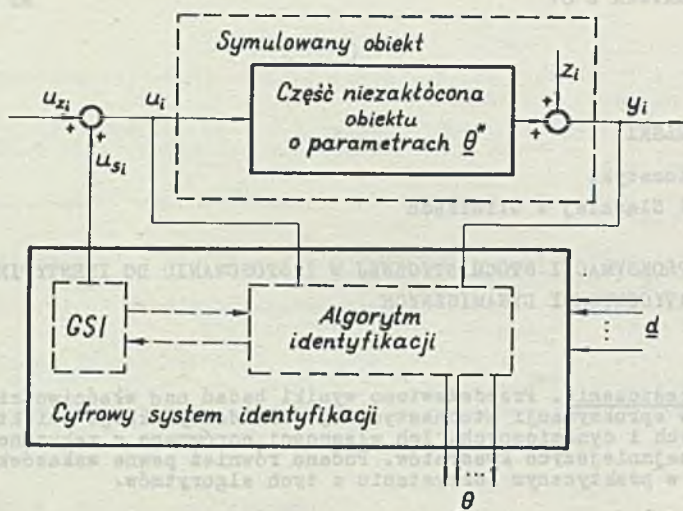
### 2. BADANE ALGORYTMY IDENTYFIKACJI

Algorytmy aproksymacji stochastycznej (AS) dla identyfikacji obiektów statycznych i dynamicznych, których właściwości badano, zamieszczono w dodatku.

### 3. WARUNKI PRZEPROWADZONYCH BADAŃ

Badania symulacyjne przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA1305. Programy napisano w języku FORTRAN.

Symulowany był układ przedstawiony na rys. 1, gdzie poszczególne symbole oznaczają:



Rys. 1. Symulowany układ identyfikacji

Fig. 1. Simulated identification system

GSI - generator sygnału identyfikującego,

$u_{si}$  - dyskretny sygnał identyfikujący,

$u_1, y_1$  - wejście i wyjście obiektu,

$u_{zi}$  - wejście obiektu wypracowane przez układy sprzężone z obiektem (dla uproszczenia przyjęto  $u_{zi} = 0$ ),

$z_i$  - zakłócenia sprowadzone na wyjście obiektu,

$\underline{d}$  - wektor danych potrzebnych systemowi identyfikacji,

$\underline{\theta}$  - wektor zidentyfikowanych parametrów obiektu.

Przyjęto sygnały identyfikujące:

1) dla obiektów statycznych - liczby generowane przez generator liczb przypadkowych o rozkładzie równomiernym z przedziału zmienności wejść, dla którego ma być zdjęta charakterystyka statyczna. Przyjęto sygnał symetryczny ( $-u_{za}; u_{za}$ );

2) dla obiektów dynamicznych - sygnał binarny pseudoprzypadkowy okresowy (SBPO), generowany przez generator liczb pseudoprzypadkowych binarnych (GLPB) rzędu 11, dający cyklicznie 2047 kolejnych różnych kombinacji, przyjmujący tylko dwie wartości  $+p_0$  lub  $-p_0$  [3].

4. MODELOWANE OBIEKTY

W czasie badań korzystano z następujących obiektów statycznych:

- a) liniowych: St1  $y = 3 + 5u$ ,
- b) kwadratowych: ST2a  $y = -8 + 0,5 u^2$ ,  
 St2b  $y = -1 + 0,25 u^2$ ,  
 St2c  $y = u + 0,25 u^2$ ,
- c) sześciennych: St3a  $y = -3u + u^3$ ,  
 St3b  $y = -2 + 3u^2 + u^3$ .

Transmitancje operatorowe wykorzystanych do badań obiektów dynamicznych zawiera tablica 1. Czas próbkowania impulsatora  $T_i$  przy przejściu z transmitancji ciągłej na dyskretną wynosił 1s.

Tablica 1

Tablica 1

	$K_o(s)$	$K_o(z^{-1})$
Dy 1	$\frac{e^{-s4}}{1+s20}$	$z^{-4} \frac{0,049z^{-1}}{1-0,951z^{-1}}$
Dy 2	$\frac{e^{-s4}}{(1+s5)(1+s15)}$	$z^{-4} \frac{0,0055z^{-1}+0,0061z^{-2}}{1-1,755z^{-1}+0,7666z^{-2}}$
Dy 3	$\frac{e^{-s4}}{(1+s10)(1+s15)(1+s20)}$	$z^{-4} \frac{0,006z^{-1}-0,0111z^{-2}+0,0054z^{-3}}{1-2,792z^{-1}+2,5979z^{-2}-0,8056z^{-3}}$
Dy 4	$\frac{e^{-s4}}{(1+s5)(1+s10)(1+s15)(1+s20)}$	$z^{-4} \frac{0,016z^{-1}-0,03766z^{-2}+0,03007z^{-3}-0,00838z^{-4}}{1-3,611z^{-1}+4,8845z^{-2}-2,93323z^{-3}+0,65976z^{-4}}$

5. WYNIKI I WNIOSKI Z PRZEPROWADZONYCH BADAŃ

5.1. Wartości początkowe ocen identyfikowanych parametrów

We wszystkich algorytmach AS jedynym warunkiem nałożonym na wartości początkowe ocen identyfikowanych parametrów jest, by były one skończone:

$$\|\underline{\theta}_0\| < \infty \tag{1}$$

Zadano więc pytanie, czy istnieje taki wektor ocen początkowych, który powoduje otrzymanie wektora ocen parametrów bardzo bliskiego wektorowi parametrów prawdziwych  $\underline{\theta}^*$  w możliwie najmniejszej ilości kroków identyfikacji. Zgodnie z przewidywaniami okazało się, że im wektor ocen początko-

wych  $\underline{\theta}_0$  był bliższy wektorowi parametrów prawdziwych  $\underline{\theta}^*$ , tym potrzebna ilość kroków identyfikacji była mniejsza. Składowe wektora  $\underline{\theta}^*$  są znane tylko wtedy, gdy obiekt jest symulowany. W warunkach przemysłowych eksperymentator nie zna składowych wektora  $\underline{\theta}^*$ . Może więc wybrać sobie dowolny wektor  $\underline{\theta}_0$ . Najprościej wybrać wektor zerowy. Badania wykazały poprawność i uniwersalność takiego wyboru w stosunku do wszystkich badanych algorytmów AS, z wyjątkiem uogólnionego algorytmu AS, gdzie elementy wektora  $\underline{\theta}_0$  musiały być od siebie różne, w przypadku, gdy przez pierwszych  $(k+2n+1)$  okresów próbkowania nie zmieniała się wartość sygnału identyfikującego.

## 5.2. Wybór częstotliwości granicznej sygnału identyfikującego

Stosowany przy identyfikacji obiektów dynamicznych sygnał SBPO ma częstotliwość graniczną określoną zależnością:

$$\omega_{gSBPO} = \frac{2\pi}{T_p}, \quad (2)$$

gdzie  $T_p$  jest okresem podstawowym tego sygnału, tzn. w chwilach czasu będących całkowitą wielokrotnością okresu  $T_p$  dokonywana jest zmiana wartości sygnału z  $+p_0$  na  $-p_0$  lub odwrotnie. Okresem  $T_0$  sygnału SBPO nazywany jest zaś czas trwania jednego cyklu kolejno występujących po sobie różnych kombinacji wyjść generatora.

Jednym z warunków, jakie musi spełniać zastosowany SBPO jest, by jego częstotliwość graniczna  $\omega_{gSBPO}$  była większa od szerokości pasma przepuszczenia obiektu, tzn. powinno zachodzić:

$$\omega_g < \omega_{gSBPO}, \quad (3)$$

gdzie  $\omega_g$  - częstotliwość graniczna obiektu.

Wtedy sygnał SBPO będzie z praktycznie wystarczającą dokładnością aproksymował szum biały [3].

Eksperymentator w warunkach przemysłowych nie zna częstotliwości  $\omega_g$ . Może ją co najwyżej oszacować. Postawiono więc pytanie, jak wpływa wybór  $\omega_{gSBPO}$  na wyniki procesu identyfikacji. W czasie symulacji okres podstawowy  $T_p$  był całkowitą wielokrotnością okresu próbkowania  $T_1$  i mógł być dowolnie nastawiony.

Przy symulacji obiektu dynamicznego znana jest jego częstotliwość graniczna  $\omega_g$ . Dla obiektów z tabelicy 1 badano 3 przypadki:

- $\omega_{gSBPO} \gg \omega_g$  ( $\omega_{gSBPO}$  było ok. 100 razy większe od  $\omega_g$ ),
- $\omega_{gSBPO} > \omega_g$  (o około 10%),
- $\omega_{gSBPO} < \omega_g$  (o około 10%).

Warunek (3) w przypadku a) został spełniony i to z nadstatkiem, a mimo to wyniki identyfikacji były bardzo niedobre. Wartość współczynnika wzmo-

nienia zidentyfikowanego modelu była dużo mniejsza (3 do 50 razy) od współczynnika wzmocnienia obiektu. Nie został bowiem spełniony inny warunek nałożony na sygnał SBPO: okres  $T_0$  sygnału SBPO powinien być znacznie większy niż czas zaniku impulsowej funkcji przejścia [3]. W przypadkach b) i c) identyfikacja dawała dobre rezultaty.

Z przytoczonych faktów wynika, że eksperymentator powinien przed przystąpieniem do identyfikacji obiektu dynamicznego oszacować częstotliwość graniczną obiektu i dobrać  $\omega_{SBPO}$  bliskie oszacowanemu  $\omega_g$ .

### 5.3. Własności współczynnika poprawki

W algorytmach AS stosowany jest skalarny lub macierzowy współczynnik poprawki. Cechą charakterystyczną skalarnego współczynnika poprawki jest to, że wartość jego zależy wyłącznie od numeru kroku identyfikacji. Najczęściej stosowaną postacią skalarnego współczynnika poprawki jest:

$$K_i = \frac{\alpha}{1 + \beta}, \quad (4)$$

którą charakteryzują dwie wielkości:

- $K_1 = \frac{\alpha}{1 + \beta}$ , czyli wartość  $K_i$  w pierwszym kroku identyfikacji,
- $\beta$ .

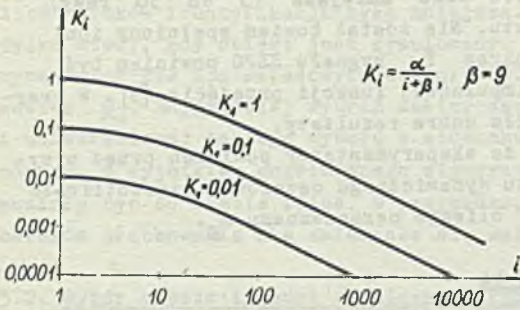
Po analizie wyników przeprowadzonych badań stwierdzono, że

- dla danego obiektu statycznego lub dynamicznego z określoną wariancją zakłóceń,
- dla danego algorytmu AS,
- przy danym sygnale identyfikującym

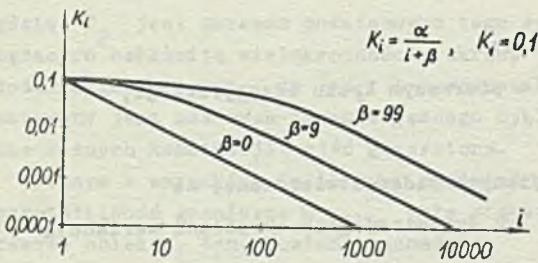
istnieją takie wielkości  $K_{1opt}$  i  $\beta_{opt}$  skalarnego współczynnika poprawki (4), które dla możliwie najmniejszej ilości kroków identyfikacji doprowadzają oceny identyfikowanych parametrów  $\underline{\theta}_i$  do wartości prawdziwych parametrów  $\underline{\theta}^*$ , przy czym  $K_{1opt}$  i  $\beta_{opt}$  można wyznaczyć tylko doświadczalnie.

Wartość  $K_1$  decyduje o wielkości pierwszych poprawek w procesie identyfikacji. Od wielkości pierwszych poprawek z kolei zależy to, czy oceny parametrów  $\underline{\theta}_i$  dążyć będą do prawdziwych wartości  $\underline{\theta}^*$  aperiodycznie lub z przeregulowaniem oraz to, czy proces identyfikacji będzie w ogóle zbieżny lub rozbieżny.

Teoretycznie proces identyfikacji-metoda AS nie może być rozbieżny, jeżeli spełnione zostały wszystkie warunki wymagane dla danego algorytmu. Jeśli jednak pierwsze poprawki są zbyt duże, doprowadzając szybko oceny  $\underline{\theta}_i$  do odpowiednio dużych wartości, to z powodu ograniczonej długości słowa maszynowego w komputerze następne, mniejsze już poprawki są przez komputer "niezauważalne" i nie są w stanie sprowadzić ocen  $\underline{\theta}_i$  do mniejszych wartości.



Rys. 2. Rodzina krzywych zmienności skalarne współczynnika poprawki dla  $K_1 = \text{var}$   
 Fig. 2. Family of curves of a scalar correction coefficients variety for  $K_1 = \text{var}$



Rys. 3. Rodzina krzywych zmienności skalarne współczynnika poprawki dla  $\beta = \text{var}$   
 Fig. 3. Family of curves of a scalar correction coefficients variety for  $\beta = \text{var}$

identyfikacji, a przy  $\beta > \beta_{\text{opt}}$   $K_i$  maleje zbyt wolno, powodując najpierw odejście  $\underline{\theta}_i$  od  $\underline{\theta}^*$  i w efekcie nieotrzymanie poprawnego wyniku dla rozsądnej ilości kroków, jeśli to odejście było zbyt duże.

Dla macierzowego współczynnika poprawki  $\underline{P}_i$ , jak wnioskuje się z wyników badań, nie trzeba dobrać doświadczalnie żadnego parametru, jeśli poziom zakłóceń obiektu nie jest zbyt duży. Współczynnik ten ma tylko jeden parametr:  $P_{00}$  określający wielkość  $\underline{P}_i$  przed pierwszym krokiem identyfikacji:

$$\underline{P}_0 = P_{00} \mathbf{1}$$

(5)

W algorytmach AS wartość  $P_{00}$  może być teoretycznie dowolna, ale skończona. Dla dowolnych wartości  $P_{00}$  otrzymano za każdym razem bardzo dobre wyniki identyfikacji i to w mniejszej liczbie kroków niż dla skalar-

Rodzinę krzywych zmienności skalarne współczynnika poprawki (4) dla różnych  $K_1$  przy  $\beta = 9$  przedstawia rys. 2.

Jeżeli  $\beta = \beta_{\text{opt}}$ , to przy  $K_1 < K_{1\text{opt}}$  oceny  $\underline{\theta}_i$  dążą aperiodycznie do  $\underline{\theta}$ , a przy  $K_1 > K_{1\text{opt}}$  - z przeregulowaniem.

Współczynnik  $\beta$  decyduje o szybkości malenia współczynnika poprawki (4), a tym samym o szybkości zbieżności procesu identyfikacji dla określonej liczby początkowych kroków identyfikacji. Z rys. 3, przedstawiającego rodzinę krzywych zmienności skalarne współczynnika poprawki dla różnych  $\beta$  przy  $K_1 = 0,1$ , wynika, że bez względu na  $\beta$  po pewnej liczbie kroków szybkość malenia  $K_i$  ustala się.

Jeżeli  $K_1 = K_{1\text{opt}}$ , to przy  $\beta < \beta_{\text{opt}}$   $K_i$  maleje początkowo zbyt szybko i oceny  $\underline{\theta}_i$  mogą nie dojść do  $\underline{\theta}^*$  dla rozsądnej ilości kroków

nego współczynnika poprawki. Jeżeli jednak poziom zakłóceń obiektu dynamicznego był odpowiednio duży, tzn. zachodziła zależność:

$$\frac{\lambda}{p_0 k_0} \geq 1, \quad (6)$$

gdzie:

- $\lambda$  - poziom białego szumu toru zakłóceń,
- $k_0$  - współczynnik wzmocnienia obiektu,
- $p_0$  - amplituda sygnału SBPO,

macierzowy współczynnik poprawki nie był w stanie przystosować całej poprawki do wielkości zmierzonych wejść i wyjść, jak to zachodziło dla mniejszych  $\frac{\lambda}{p_0 k_0}$ , a parametr  $P_{00}$  zaczynał mieć te same właściwości, nawet przybliżone wartości, co parametr  $K_1$  skalarnego współczynnika poprawki.  $P_{00}$  trzeba było wtedy dobrać doświadczalnie.

#### 5.4. Porównanie efektywności badanych algorytmów

Porównanie wyników badań nad poszczególnymi algorytmami AS umożliwiło wyciągnięcie następujących wniosków (dla uogólnionego algorytmu AS dotyczą one tylko identyfikacji  $2n+1$  parametrów Markowa):

- algorytmy AS z macierzowym współczynnikiem poprawki (drugiego rzędu) są znacznie szybsze i dają lepsze rezultaty niż algorytmy AS ze skalarnym współczynnikiem poprawki, jeśli nie zachodzi (6);
- gdy zachodzi (6), wszystkie algorytmy AS mają podobne właściwości;
- algorytmy Kiefiera-Wolfowitza i AS I rzędu dla identyfikacji obiektów statycznych dają porównywalne rezultaty, przy czym pierwszy z nich ma bardziej skomplikowaną procedurę niż drugi;
- stosowanie modyfikacji Kestena lub Kestena i Fabiana jednocześnie daje rezultaty podobne lub gorsze w stosunku do rezultatów, jakie dają te same algorytmy bez modyfikacji, a ponieważ modyfikacje komplikują procedurę algorytmu, ich stosowanie wydaje się być niepotrzebne.

Modyfikacja Fabiana ma ważną zaletę - bez względu na wartości  $K_1$  i  $\beta$  skalarnego współczynnika poprawki proces identyfikacji nie rozbiega się. Szybkość zbieżności była jednak mała. Dodanie do niej modyfikacji Kestena zwiększało tę szybkość, lecz mimo to algorytm podstawowy (bez tych modyfikacji) miał jeszcze większą szybkość zbieżności. Ponadto przy modyfikacji Fabiana nie dało się zidentyfikować obiektów statycznych mających w swej strukturze pary wejść, takich jak np.:  $1$  i  $u^2$ ,  $u$  i  $u^3$ ,  $1$  i  $u^4$  itp., gdzie:  $1$  - wejście sztuczne dla identyfikacji stałego współczynnika.

Uogólniony algorytm AS nadawał się do identyfikacji  $2n+1$  parametrów Markowa, ale nie nadawał się do identyfikacji parametrów modelu transmitencyjnego obiektu. Aby przejść z parametrów Markowa  $q$  na parametry modelu

transmitancyjnego  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$  trzeba po drodze odwracać macierz  $\underline{Q}(D50)$ , składającą się ze składowych wektora  $\underline{q}$ . Macierz  $\underline{Q}$ , jak wykazały badania, była bardzo często słabo uwarunkowana i dlatego choć składowe wektora  $\underline{q}$  po pewnej liczbie początkowych kroków identyfikacji zaczynały oscylować wokół określonych wartości, składowe wektorów  $\underline{a}$  i  $\underline{b}$  przyjmowały z kroku na krok zupełnie przypadkowe wartości. Przypuszcza się, że główną przyczyną tego zjawiska było wybranie zbyt krótkiego okresu próbkowania  $T_1$  w stosunku do dynamiki symulowanych obiektów.

### 5.5. Porównanie algorytmów AS z rekurencyjną metodą najmniejszych kwadratów

Jeśli w algorytmach AS z macierzowym współczynnikiem poprawki II rzędu podstawić:

$$\underline{Q}_0 = 0 \quad \text{i} \quad P_{00} = 10^4 \div 10^5, \quad (7)$$

otrzyma się algorytmy rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów (RMNK). Poza tym algorytmy AS II rzędu do identyfikacji obiektów statycznych nie różnią się od RMNK niczym, a dla obiektów dynamicznych tylko warunkami nieobciążoności estymatora:

- w algorytmie AS II rzędu zakłada się, że zakłóceniem działającym na wyjście obiektu jest biały szum o znanej wariancji  $\lambda^2$ , [6], [8];
- w algorytmie RMNK zakłada się tylko to, że zakłóceniem tym jest szum kolorowy będący wynikiem przepuszczenia szumu białego przez filtr  $\frac{1}{A(z^{-1})}$ .

Dla algorytmów AS II rzędu i algorytmów RMNK otrzymamy takie same wyniki zarówno co do jakości wyestymowanego modelu, jak i co do ilości kroków identyfikacji do tego potrzebnych.

Algorytmy AS ze skalarnym współczynnikiem poprawki okazały się znacznie gorsze od algorytmów RMNK tak co do jakości otrzymanego modelu, jak i ilości potrzebnych do tego kroków identyfikacji. Szczególnie zauważalna różnica istniała przy identyfikacji obiektów statycznych, gdzie algorytmowi RMNK wystarczało 30÷60 kroków na otrzymanie dobrego modelu, a algorytmem AS ze skalarnym współczynnikiem poprawki w tych samych warunkach - 100÷500 lub czasem więcej.

Gdy zachodziła zależność (6), algorytm RMNK był bezużyteczny, a algorytm AS przy odpowiednio dobranych  $K_1$  i  $\beta$  lub  $P_{00}$  pozwalały otrzymać model mający co prawda zawsze mniejsze stałe czasowe niż symulowany obiekt, ale za to prawie ten sam współczynnik wzmocnienia.

### 5.6. Zakończenie procesu identyfikacji

W literaturze prawie w ogóle nie jest rozważany sposób zakończenia procesu identyfikacji metodą AS. Zaproponowano więc i zbadano dwa równoległe działające kryteria zakończenia obliczeń iteracyjnych:



1. Przerwanie obliczeń, gdy w kolejnych 20 krokach identyfikacji norma gradientu wskaźnika jakości jest mniejsza od zadanej dodatniej liczby  $S$ :

$$\left\| \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right\| < S \quad (8)$$

2. Przerwanie obliczeń po zadanej liczbie kroków identyfikacji  $i_{ogr}$ . Liczbę  $i_{ogr}$  określa w praktyce jednoznacznie ilość dostępnych danych pomiarowych, czas trwania reakcji chemicznej, podczas której dokonywana jest identyfikacja itp.

Wybór właściwej liczby  $S$  jest kolejnym zadaniem doświadczalnym przy stosowaniu algorytmów AS. Stwierdzono, że wartość tej liczby zależy musi przede wszystkim od wariancji zakłóceń spowodowanych na wyjście obiektu. Za duże  $S$  powoduje otrzymanie niedobrego modelu wskutek zbyt wczesnego przerwania procesu identyfikacji, a za małe  $S$  powoduje pracę systemu do chwili wyczerpania się danych pomiarowych.

Liczba kroków identyfikacji jaka potrzebna była dla otrzymywania poprawnych wyników przy identyfikacji opisanych w p. 4 obiektów statycznych podana została w p. 5.5. Dla wykorzystanych obiektów dynamicznych liczba ta była taka sama dla algorytmów AS ze skalarnym i z macierzowym współczynnikiem poprawki i wynosiła co najmniej 800, a często była znacznie większa. Im wyższego rzędu był identyfikowany model, tym większą liczbę iteracji trzeba było wykonać.

## 6. PODSUMOWANIE

Właściwości badanych algorytmów AS w zastosowaniu do identyfikacji obiektów statycznych i dynamicznych dadzą się sprowadzić do następujących pięciu punktów:

1. Prostota obliczania skalarnego współczynnika poprawki okupiona jest zwiększoną ilością kroków identyfikacji, co sprawia, że algorytmy AS ze skalarnym współczynnikiem poprawki mają wolniejszą zbieżność niż algorytmy RMNK i algorytmy AS z macierzowym współczynnikiem poprawki.

2. W przypadku stosowania algorytmów ze skalarnym współczynnikiem poprawki potrzebna jest, przed rozpoczęciem właściwego procesu identyfikacji, dodatkowa ilość kroków identyfikacji do wyznaczenia  $K_1$  i  $\beta$  bliskich

$$K_{1opt} \text{ i } \beta_{opt}$$

3. Algorytmy AS z macierzowym współczynnikiem poprawki mogą konkurować pod względem szybkości zbieżności i jakości otrzymanych wyników z algorytmami RMNK.

4. Przed rozpoczęciem procesu identyfikacji wymagana jest stosunkowo mała informacja a priori o identyfikowanym obiekcie.

5. W warunkach dużych zakłóceń przy identyfikacji obiektów dynamicznych, kiedy inne metody, jak np. RMNK, nie dają żadnych rezultatów metoda AS pozwala dobrze oszacować wzmocnienie obiektu.

DODATEK

"Badane algorytmy identyfikacji"

1. Algorytmy do identyfikacji obiektów statycznych

Przyjmuje się następujący opis obiektu statycznego:

$$y = \underline{u}^T \underline{\beta} + z, \quad (D1)$$

gdzie:

$y$  - wyjście obiektu,

$\underline{u}^T = [1 \quad u_1 \quad u_1 \dots u_s]$  - wektor wejść obiektu,

$\underline{\beta}^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \dots \beta_s]$  - wektor  $s + 1$  parametrów obiektu,

$z$  - zakłócenie będące szumem białym o właściwościach:

$$E \{z\} = 0, \quad \text{var} \{z\} < \sigma^2 < \infty.$$

Zakłada się, że znana jest struktura identyfikowanego obiektu. Identyfikowany model obiektu ma postać:

$$\hat{y} = \underline{u}^T \underline{b}, \quad (D2)$$

gdzie:

$\hat{y}$  - wyjście modelu,

$\underline{b}^T = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \dots b_s]$  - wektor  $s + 1$  identyfikowanych parametrów.

Błąd identyfikacji w  $i$ -tym kroku identyfikacji definiuje się:

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = \underline{u}_i^T \underline{b}_{i-1}, \quad (D3)$$

gdzie  $\underline{b}_{i-1}$  to wektor parametrów obliczony w kroku  $i-1$ .

1.1. Algorytm Kiefiera-Wolfowitza

Tworzy się wskaźnik jakości  $J(\underline{b})$  będący unimodalną funkcją parametrów

$\underline{b}$ :

$$J(\underline{b}_i) = \varepsilon_{i+1}^2 = [y_{i+1} - \underline{u}_{i+1}^T \underline{b}_i]^2 \quad (D4)$$

i oblicza się przybliżone wartości składowych gradientu tego wskaźnika:

$$\frac{\partial J(\underline{b}_i)}{\partial b_j} \approx \frac{J(\underline{b}_i + c_j \underline{e}^j) - J(\underline{b}_i - c_j \underline{e}^j)}{2c_j} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, s, \quad (D5)$$

gdzie  $\underline{e}^j$  - wektor jednostkowy mający oprócz zer jedynekę na j-tym miejscu. Algorytm Kiefera-Wolfowitza ma postać [1], [2], [5]:

$$\underline{b}_{i+1} = \underline{b}_i - \frac{K_i}{2c_i} \begin{bmatrix} J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^1) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^1) \\ J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^2) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^2) \\ \vdots \\ J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^s) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^s) \end{bmatrix} \quad (D6)$$

czyli czym muszą być spełnione warunki [5]:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} K_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{K_i}{c_i}\right)^2 < \infty \quad (D7)$$

$$\|b_0\| < \infty \\ \exists_{A, B} |J(\underline{b}_2) - J(\underline{b}_1)| < A \|\underline{b}_2 - \underline{b}_1\| + B < \infty \quad \text{dla } \underline{b}_2 \neq \underline{b}_1. \quad (D8)$$

Warunek (D8) jest zawsze spełniony, gdy tylko wektor  $\underline{b}_1$  ma składowe skończonych wartościach.

Modyfikacja Fabiana algorytmu Kiefera-Wolfowitza ma postać: [1], [2]:

$$\underline{b}_{i+1} = \underline{b}_i - K_i \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{sgn} \frac{J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^1) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^1)}{2c_i} \\ \operatorname{sgn} \frac{J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^2) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^2)}{2c_i} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn} \frac{J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^s) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^s)}{2c_i} \end{bmatrix} \quad (D9)$$

Modyfikacja Kestens algorytmu Kiefera-Wolfowitza ma dwie wersje:

1) Współczynnik poprawki  $K_i$  zmienia swoją wartość w danej iteracji tylko wtedy, gdy gradient wskaźnika jakości w poprzedniej iteracji zmienił znak, tzn. gdy [1]:

$$\frac{\partial J(\underline{b}_i)}{\partial \underline{b}} \cdot \frac{\partial J(\underline{b}_{i-1})}{\partial \underline{b}} < 0. \quad (D10)$$

2) Każdy element gradientu posiada swój własny współczynnik  $K_{ji}$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ):

$$\underline{b}_{i+1} = \underline{b}_i - \frac{1}{2c_i} \begin{bmatrix} K_{1i} \{J(\underline{b} + c_i \underline{e}^1) - J(\underline{b} - c_i \underline{e}^1)\} \\ K_{2i} \{J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^2) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^2)\} \\ \vdots \\ K_{si} \{J(\underline{b}_i + c_i \underline{e}^s) - J(\underline{b}_i - c_i \underline{e}^s)\} \end{bmatrix} \quad (D11)$$

Współczynnik  $K_{ji}$  zmienia swoją wartość, gdy  $j$ -ty element gradientu zmienił w poprzedniej iteracji znak, tzn. gdy:

$$\frac{\partial J(\underline{b}_i)^T}{\partial b_j} \cdot \frac{\partial J(\underline{b}_{i-1})}{\partial b_j} < 0. \quad (D12)$$

W obu wersjach  $c_i = \text{const}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ).

### 1.2. Algorytm aproksymacji stochastycznej I rzędu

Gradient wskaźnika jakości (D4) obliczany jest z zależności:

$$\frac{\partial J(\underline{b}_i)}{\partial \underline{b}} = -2\underline{u}_{i+1} (y_{i+1} - \underline{u}_{i+1}^T \underline{b}) \quad (D13)$$

Algorytm AS pierwszego rzędu ma postać [1], [5], [8] :

$$\underline{b}_{i+1} = \underline{b}_i + K_i \underline{u}_{i+1} (y_{i+1} - \underline{u}_{i+1}^T \underline{b}), \quad (D14)$$

przy czym muszą być spełnione warunki:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} K_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} K_i^2 < \infty \quad (D15)$$

$$\|\underline{b}_0\| < \infty, \quad (D16,$$

a wskaźnik jakości  $J(\underline{b})$  powinien przyjmować skończone wartości dla skończonych wartości wejść  $u_1, u_2, \dots, u_s$ .

Modyfikacja Kestena tego algorytmu polega na tym, że współczynnik  $K_i$  zmienia swą wartość, gdy zachodzi (D10).

### 1.3. Algorytm aproksymacji stochastycznej II rzędu

Minimalizowany jest wskaźnik jakości:

$$J(\underline{b}_i) = \sum_{l=1}^i \varepsilon_l^2 = \sum_{l=1}^i (y_l - \underline{u}_l^T \underline{b}_{l-1})^2 \quad (D17)$$

za pomocą dwóch rekurencyjnych zależności:

$$\underline{b}_{i+1} = \underline{b}_i + \underline{P}_{i+1} \underline{u}_{i+1} (y_{i+1} - \underline{u}_{i+1}^T \underline{b}_i) \quad (D18)$$

$$\underline{P}_{i+1} = \underline{P}_i - \underline{P}_i \underline{u}_{i+1} (1 + \underline{u}_{i+1}^T \underline{P}_i \underline{u}_{i+1})^{-1} \underline{u}_{i+1}^T \underline{P}_i, \quad (D19)$$

przy spełnionym warunku (D16) na  $\underline{b}_0$  i warunku na początkową macierz poprawek:

$$\underline{P}_0 < \infty \quad (D20)$$

Można udowodnić [4], [5], że dla odpowiednio dużego  $l$  macierz  $\underline{P}_l$  jest równa:

$$\underline{P}_l = \frac{1}{l} \underline{M}_l.$$

gdzie elementy macierzy  $\underline{M}_l$  z iteracji na iterację prawie się nie zmieniają, a macierz  $\underline{P}_l$  spełnia warunki:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \underline{P}_l = \underline{0}, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \underline{P}_l = \infty, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \underline{P}_l^2 < \infty \quad (D20a)$$

## 2. Algorytmy do identyfikacji obiektów dynamicznych

Przyjmuje się następujący opis obiektu dynamicznego:

$$y(i) = z^{-k} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} u(i) + d(i), \quad (D21)$$

gdzie:

$y(i)$  - wyjście obiektu,

$u(i)$  - wejście obiektu,

$d(i)$  - zakłócenie spowodowane na wyjście obiektu,

$$A(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n},$$

$$B(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n}. \quad (D22)$$

Zakłada się, że znana jest struktura identyfikowanego obiektu. Identyfikowany model ma postać:

$$\hat{y}(i) = z^{-k} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(i), \quad (D23)$$

gdzie:

$\hat{y}(i)$  - wyjście modelu,

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}. \quad (D24)$$

### 2.1. Algorytm aproksymacji stochastycznej pierwszego rzędu

Przyjmuje się, że zakłócenie  $d(i)$  jest dyskretnym szumem białym  $e(i)$ :

$$d(i) = e(i), \quad (D25)$$

spełniającym zależność:

$$E \{e(i)\} = 0, \quad \text{var} \{e(i)\} = \lambda^2 \quad (D26)$$

i mającym skończone wartości momentów aż do czwartego włącznie [5], [6].

Tworzony jest błąd uogólniony identyfikacji obiektu dynamicznego:

$$\xi(i) = A(z^{-1}) [y(i) - \hat{y}(i)]$$

$$\xi(i) = A(z^{-1}) y(i) - z^{-k} B(z^{-1}) u(i) \quad (D27)$$

$$\xi(i) = y(i) + \varphi^T(i-1) \underline{\theta}(i-1),$$

gdzie:

$$\underline{\varphi}^T(i-1) = [y(i-1) \ y(i-2) \dots \ y(i-n) \ -u(i-k) \ -u(i-k-1) \dots \ -u(i-k-n)] -$$

- wektor pomiarów,

$$\underline{\theta}^T(i-1) = [a_1(i-1) \ a_2(i-1) \dots \ a_n(i-1) \ b_0(i-1) \ b_1(i-1) \dots \ b_n(i-1)] -$$

- wektor parametrów uzyskanych w  $i-1$ -szym kroku identyfikacji.

Wekownik jakości ma postać:

$$J[\underline{\theta}(i-1)] = \xi^2(i+n+k) = [y(i+n+k) + \varphi^T(i+n-1+k) \underline{\theta}(i-1)]^2, \quad (D28)$$

a jego gradient:

$$\frac{\partial J[\underline{q}(i-1)]}{\partial \underline{q}} = -2\varphi(i+n-1+k) [y(i+n+k) + \underline{\psi}^T(i+n-1+k)\underline{q}(i-1)] \quad (D29)$$

Algorytm aproksymacji stochastycznej pierwszego rzędu ma postać [6], [8]:

$$\underline{q}(i+n) = \underline{q}(i-1) - K\left(\frac{i-1}{n+1}\right) \left\{ \underline{\psi}(i+n-1+k) [y(i+n+k) + \underline{\psi}^T(i+n-1+k)\underline{q}(i-1)] - \lambda^2 \underline{E} \underline{q}(i-1) \right\}, \text{ dla } i=1, n+2, 2n+3, \dots \quad (D30)$$

gdzie:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & | & \frac{0}{0} \\ \hline \frac{0}{0} & | & \frac{0}{0} \end{bmatrix}, \quad (D31)$$

przy czym  $K\left(\frac{i-1}{n+1}\right)$  spełnia warunki (D15) a  $\underline{q}(0)$  - warunek (D16).

W algorytmach dotyczących identyfikacji obiektów dynamicznych indeks przy współczynniku poprawki  $K_1$  musi uwzględniać nie tylko numer kroku identyfikacji, lecz także chwilę czasową, w której dany krok miał miejsce. W algorytmie (D30), jeśli chwile czasu zmieniają się w porządku:

$$i = 1, \quad n + 2, \quad 2n + 3, \dots$$

to indeks współczynnika poprawki  $K\left(\frac{i-1}{n+1}\right)$  stawiany, dla odróżnienia od algorytmów do identyfikacji obiektów statycznych, w nawiasach zmienia się w porządku: 0, 1, 2, 3, ...

Przy modyfikacji Kestens tego algorytmu współczynnik poprawki zmienia swą wartość tylko wtedy, gdy:

$$\frac{\partial J[\underline{q}(i-1)]^T}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial J[\underline{q}(i-n-2)]}{\partial \underline{q}} < 0 \quad (D32)$$

## 2.2. Algorytm aproksymacji stochastycznej drugiego rzędu

Wskaźnik jakości ma postać:

$$J[\underline{q}(i-1)] = \sum_{l=1}^i \varepsilon^2(\delta_{1+n+k}) = \sum_{l=1}^i [y(\delta_{1+n+k}) + \underline{\psi}^T(\delta_{1+n-1+k})\underline{q}(i-1)]^2 \quad (D33)$$

gdzie:

$$\delta_1 = (i-1)n+1.$$



Algorytm aproksymacji stochastycznej drugiego rzędu minimalizuje (D33) za pomocą zależności rekurencyjnych:

$$\underline{Q}(i+n) = \underline{Q}(i-1) - \underline{P}(i+n) \left\{ \underline{\Psi}(i+n-1+k) [y(i+n+k) + \right. \\ \left. + \underline{\Psi}^T(i+n-1+k) \underline{Q}(i-1)] - \lambda^2 \underline{E} \underline{Q}(i-1) \right\}, \quad (D34)$$

$$\underline{P}(i+n) = \underline{P}(i-1) - \underline{P}(i-1) \underline{\Psi}(i+n-1+k) [1 + \underline{\Psi}^T(i+n-1+k) \underline{P}(i-1) \cdot \\ \cdot \underline{\Psi}(i+n-1+k)]^{-1} \underline{\Psi}^T(i+n-1+k) \underline{P}(i-1) \quad (D35)$$

dla  $i=1, n+2, 2n+3, \dots$

gdzie  $\underline{Q}(0)$  spełnia warunek (D16), a macierz  $\underline{P}(0)$  - warunek (D20). Macierz  $\underline{P}(1)$  spełnia warunki (D20a) [5].

### 2.3. Uogólniony algorytm aproksymacji stochastycznej pierwszego rzędu

Przyjmuje się, że zakłócenie  $d(i)$  jest szumem kolorowym postaci:

$$d(i) = \frac{\mathcal{C}(z^{-1})}{A(z^{-1})} e(i), \quad (D36)$$

gdzie:

$e(i)$  - szum biały o tych samych właściwościach co szum (D25),

$$\mathcal{C}(z^{-1}) = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \dots + \gamma_n z^{-n} \quad (D37)$$

Opisowi obiektu (D21) z zakłóceniem (D36) odpowiada opis w postaci równań stanu i równania wyjść:

$$\underline{x}(i+1) = \underline{\Phi} \underline{x}(i) + \underline{b}_r u(i-k) + \underline{c}_r e(i), \\ \underline{y}(i) = \underline{h}^T \underline{x}(i) + \underline{b}_{r0} u(i-k) + e(i), \quad (D38)$$

gdzie:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ -a_r^T & & \end{bmatrix},$$

$$\underline{a}_r^T = [a_{r1} \ a_{r2} \ \dots \ a_{rn}], \quad \underline{b}_r^T = [b_{r1} \ b_{r2} \ \dots \ b_{rn}],$$

$$\underline{b}_{r0}^T = [b_{r0} \ b_{r1} \ b_{r2} \ \dots \ b_{rn}],$$

$$\underline{c}_r^T = [c_{r1} \ c_{r2} \ \dots \ c_{rn}], \quad \underline{h}^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad \underline{x}^T(i) = [x_1(i)x_2(i)\dots x_n(i)]. \quad (D39)$$

Parametry opisu obiektu (D21), (D36) i (D38) są powiązane ze sobą zależnościami:

$$\underline{\alpha} = \underline{T} \underline{a}_r, \quad \underline{\beta} = \underline{T}_{n+1} \underline{b}_{ro}, \quad \underline{\gamma} = \underline{T}_n \underline{c}_r + \underline{T}_1 \underline{a}_r. \quad (D40)$$

gdzie:

$$\underline{\alpha}^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n], \quad \underline{\beta}^T = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_n], \quad \underline{\gamma}^T = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_n],$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{T}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{rn} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r2} & a_{r3} & \dots & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{T}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{rn} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r3} & a_{r4} & \dots & 0 \\ a_{r2} & a_{r3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (D41)$$

Odpowiedź obiektu (D38), (D39) określa zależność:

$$\underline{y}(i) = \underline{u}^T(i-k) \underline{q} + \underline{e}(i) + \underline{e}^T(i-1) \underline{p} + \underline{v}(i-2n-1), \quad (D42)$$

gdzie:

$$\underline{v}(i-2n-1) = \underline{h}^T \sum_{l=2n}^{\infty} \underline{\phi}^l [\underline{b}_r u(i-l-1-k) + \underline{c}_r e(i-l-1)], \quad (D43)$$

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} b_{ro} \\ \underline{h}^T \underline{b}_r \\ \underline{h}^T \underline{\phi} \ \underline{b}_r \\ \vdots \\ \underline{h}^T \underline{\phi}^{2n-1} \ \underline{b}_r \end{bmatrix}, \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} \underline{h}^T \ \underline{c}_r \\ \underline{h}^T \underline{\phi} \ \underline{c}_r \\ \vdots \\ \underline{h}^T \underline{\phi}^{2n-1} \ \underline{c}_r \end{bmatrix}. \quad (D44)$$

$$\underline{u}^T(i) = [u(i) \ u(i-1) \ \dots \ u(i-2n)], \quad \underline{e}(i) = [e(i) \ e(i-1) \ \dots \ e(i-2n+1)], \quad (D45)$$

Błąd identyfikacji jest zdefiniowany:

$$\xi(i+2n+k+1) = y(i+2n+k+1) - \underline{u}^T(i+2n+1) \underline{q}(i-1), \quad (D46)$$

a wskaźnik jakości:

$$J[\underline{q}(i-1)] = \xi^2(i+2n+k+1) \quad (D47)$$

Uogólniony algorytm aproksymacji stochastycznej pierwszego rzędu ma postać [5], [7], [8]:

$$\begin{aligned} \underline{q}(i+2n+1) &= \underline{q}(i-1) + K\left(\frac{i-1}{2n+2}\right) \underline{u}(i+2n+1) \times \\ &\times [y(i+2n+k+1) - \underline{u}^T(i+2n+1) \underline{q}(i-1)] \quad \text{dla } i=1, 2n+3, 4n+5, \dots \end{aligned} \quad (D48)$$

przy czym  $K\left(\frac{i-1}{2n+2}\right)$  spełnia warunki (D15), a  $\underline{q}(0)$  - warunek (D16).

Znając parametry Markowa  $\underline{q}$  można na podstawie (D44) otrzymać  $\underline{a}_r$  i  $\underline{b}_{ro}$ :

$$\underline{b}_{ro} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_r = \underline{Q}^{-1} \begin{bmatrix} -q_{n+1} \\ -q_{n+2} \\ \vdots \\ -q_{2n} \end{bmatrix}, \quad (D49)$$

gdzie:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ q_2 & q_3 & \dots & q_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_n & q_{n+1} & \dots & q_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad (D50)$$

a z nich, stosując zależności (D40), parametry identyfikowanego modelu (D23), (D24).

#### 2.4. Uogólniony algorytm aproksymacji stochastycznej drugiego rzędu

Uogólniony algorytm aproksymacji stochastycznej drugiego rzędu ma postać:

$$\underline{q}(i+2n+1) = \underline{q}(i-1) + \underline{P}(i+2n+1) \underline{u}(i+2n+1) \times \\ \times [y(i+2n+k+1) - \underline{u}^T(i+2n+1) \underline{q}(i-1)], \quad (D51)$$

$$\underline{P}(i+2n+1) = \underline{P}(i-1) - \underline{P}(i-1) \underline{u}(i+2n+1) [1 + \underline{u}^T(i+2n+1) \underline{P}(i-1) \times \\ \times \underline{u}(i+2n+1)]^{-1} \underline{u}^T(i+2n+1) \underline{P}(i-1) \quad (D52)$$

dla  $i=1, 2n+3, 4n+5, \dots$

przy spełnieniu warunku (D16) na  $\underline{q}(0)$  i warunku (D20) na  $\underline{P}(0)$ . Macierz  $\underline{P}(i)$  spełnia warunki (D20a) [4].

Algorytm ten minimalizuje wskaźnik jakości:

$$J[\underline{q}(i-1)] = \sum_{l=1}^i \varepsilon^2(\delta_1 + 2n+k+1), \quad (D53)$$

gdzie:

$$\delta_1 = 2(1-l)n+1.$$

#### LITERATURA

- [1] Mańczak K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1979.
- [2] Mańczak K., Noworski Z.: Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. PWN, Warszawa 1983.
- [3] Niederliński A.: Systemy cyfrowe automatyki przemysłowej. T. II. WNT, Warszawa 1977.
- [4] Sage A. P., Melsa J. L.: System identification. Academic Press, New York and London 1971.
- [5] Saridis G. N.: Stochastic approximation methods for identification and control—a survey. IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-19, pp. 798-809, December 1974.
- [6] Saridis G. N., Stein G.: Stochastic approximation algorithms for linear discrete-time system identification. IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, pp. 515-523, October 1968.
- [7] Saridis G. N., Stein G.: A algorithm for linear system identification. IEEE Trans. Automatic Control (Corresp.), vol. AC-13, pp. 592-594, October 1968.
- [8] Zgorzelski P.: Identyfikacja obiektów dynamicznych metodą aproksymacji stochastycznej. Praca dyplomowa, Gliwice 1981.

Recenzent: Dr inż. Zbigniew Nahorski

Wpłynęło do Redakcji 25.06.1984 r.

## АЛГОРИТМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

## Р е з ю м е

В работе представлены результаты исследований свойств алгоритмов стохастической аппроксимации для идентификации статических и динамических объектов. Их свойства сравнены со свойствами рекуррентного метода наименьших квадратов. Даны также некоторые указания по практическому пользованию этим алгоритмом.

## STOCHASTIC APPROXIMATION ALGORITHMS FOR IDENTIFICATION OF STATICAL AND DYNAMICAL SYSTEMS

## S u m m a r y

Results of research works on properties of stochastic approximation algorithms for identification of static and dynamic systems are presented. The properties of the stochastic approximation method are compared with those of the recursive least squares method. Some remarks which may help in practical use of the algorithms are given too.