ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 68 Nr kol. 643

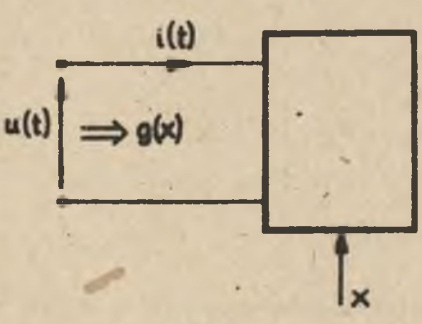
Krystyna STEC
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

# MOC W REZYSTANCYJNYCH AKTYWNYCH OBWODACH PARAMETRYCZNYCH (RAOP)

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem mocy w rezystancyjnych aktywnych układach parametrycznych (RAOP) sterowanych sygnałem $x(t)$. Wykazano, że układy takie mogą pobierać zarówno moc czynną, jak i bierną. Podano przykłady.

Dwójnik przedstawiony na rys. 1 składa się z rezystancji, liniowych sterowanych rezystancji oraz liniowych sterowanych konduktancji.




Rys. 1

Konduktancja wejściowa układu parametrycznego sterowanego sygnałem $x(t)$ jest funkcją wymierną [2], [4] mającą postać:

$$g(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_o} \tag{1}$$

Z twierdzenia weierstrassa [3] wiadomo, że dla każdej funkcji $f(x)$ ciągłej w $[a, b]$ i każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian $M_n(x)$ taki, że:

$$|f(x) - M_n(x)| < \varepsilon$$

dla każdego $x \in [a, b]$ $x(t)$ jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej $t$.

Niech $x_o$, $x_k$ będą rzeczywistymi biegunami funkcji $g(x)$. Jeżeli $|x_o|<|x_k|$ i $|x(t)| < |x_o|$, funkcja $g(x)$ jest ciągła w przedziale $[-|x_o|, |x_o|]$. Mamy więc

$$M_n(x) \approx g(x)$$

gdzie:

$$M_n(x) = \sum_{0}^{\infty} C_k x^k \tag{3}$$

Jeżeli na przykład funkcja $g(x)$ jest ciągła w przedziale $[-1, 1]$, można zastosować wielomiany Legendre'a $L_n(x)$ i wówczas

$$M_n(x) = \sum_{k} C_k L_k(x)$$

gdzie:

$$C_k = \frac{\int_{-1}^{1} g(x) L_k(x) dx}{\frac{2}{2k+1}}$$

Jeżeli $x(t)$ jest funkcją okresową, zespolony szereg Fouriera funkcji $[x(t)]^k$ ma postać:

$$[x(t)]^k = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n\, e^{jn\omega_o t} \tag{4}$$

Z (2), (3) i (4) otrzymamy

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} g_h\, e^{jh\omega_o t} \tag{5}$$

gdzie:

$$h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Prąd pobierany przez układ parametryczny pokazany na rys. 1 wyraża się wzorem

$$i(t) = u(t)\, g(x) \tag{6}$$

Niech $u(t)$ będzie funkcję okresową

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k\, e^{jk\omega_o t} \tag{7}$$

gdzie:

$$k = 0, \pm 1, \pm 2$$

Z (5), (6) i (7) otrzymamy

$$i(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k\, e^{jk\omega_o t} \sum_{-\infty}^{\infty} g_h\, e^{jh\omega_o t} = \sum_{-\infty}^{\infty} i_n\, e^{jn\omega_o t} \tag{8}$$

gdzie:

$$n = k + h \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$i_n = u_k g_h$$

Udowodnimy, wykorzystując uogólnioną teorię mocy [1], że rezystancyjny układ parametryczny może pobierać zarówno moc czynną, jak i bierną.

Funkcja korelacji

$$\psi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) \left[i(t-\tau)\right]^{*} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{k,n} u_k i_n^{*}\, e^{jk\omega_o t}\, e^{-jn\omega_o (t-\tau)}\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n \neq k \quad (A) \\ u_k i_k^{*}\, e^{jk\omega_o \tau} & \text{dla} \quad n = k \quad (B) \end{cases}$$

Rozpatrzmy przypadek (B)

$$\Theta(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} u_k i_k^{*}\, \delta(\omega - k\omega_o) \tag{9}$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\, d\omega \tag{10}$$

$$Q = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \Theta(\omega)\, d\omega \tag{11}$$

Z (9) i (10) otrzymamy

$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_k i_k^{*}\, 2\pi\, \delta(\omega - k\omega_o)\, d\omega = u_k i_k^{*}$$

i

$$P_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{-k}i^{*}_{-k}\; 2\pi\delta(\omega+k\omega_o)d\omega = u_{-k}i^{*}_{-k} = u^{*}_{k}i_{k}$$

Moc czynna k-tej harmonicznej wyraża się wzorem

$$P_k + P_{-k} = u_k i^{*}_k + u_{-k}i^{*}_{-k} \quad 2\,\mathrm{Re}\left\{u_k i^{*}_k\right\} \tag{12}$$

Z (9) i (11) otrzymamy

$$Q_k = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}\,\omega 2\pi\delta(\omega-k\omega_o)u_k i^{*}_k d\omega = -ju_k i^{*}_k$$

i

$$Q_{-k} = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}\,\omega 2\pi\delta(\omega+k\omega_o)u_{-k}i^{*}_{-k}d\omega = +ju_{-k}i^{*}_{-k} = +ju^{*}_{k}i_{k}$$

Moc bierna k-tej harmonicznej wyraża się wzorem

$$Q_k + Q_{-k} = 2\,\mathrm{Im}\left\{-ju_k i^{*}_k\right\} \tag{13}$$

Jeżeli tylko

$$u_k i^{*}_k \neq -u_{-k}i^{*}_{-k} \Longrightarrow \mathrm{Re}\left\{u_k i^{*}_k\right\} \neq 0 \tag{14}$$

mamy

$$P_k + P_{-k} \neq 0$$

i możliwe jest

$$P \neq 0$$

Jeżeli tylko

$$u_k i^{*}_k \neq u_{-k}i^{*}_{-k} \Longrightarrow \mathrm{Im}\left\{u_k i_k\right\} \neq 0 \tag{15}$$

mamy

$$Q_k + Q_{-k} \neq 0$$

i możliwe jest

$$Q \neq 0$$

Z (14) i (15) otrzymujemy warunek na niezerową moc czynną

$$\mathrm{Re}\left\{u_{k+h}u^{*}_{k}g^{*}_{h}\right\} \neq 0 \tag{14a}$$

i na niezerową moc bierną

$$\mathrm{Im}\left\{u_{k+h}u_k^* g_h^*\right\} \neq 0 \tag{15a}$$

Jest oczywiste, że przy $u_n i_n^* \neq 0$ nie może być równocześnie

$$\mathrm{Re}\left\{u_n i_n^*\right\} = 0$$

i

$$\mathrm{I_m}\left\{u_n i_n^*\right\} = 0$$

Jeżeli $\mathrm{Re}\left\{u_n i_n^*\right\} = 0$, układ pobiera wyłącznie moc bierną n-tej harmonicznej.

Układ pobiera moc bierną k + h-tej harmonicznej, nie pobierając mocy czynnej, gdy:

$$\mathrm{Re}\left\{u_{k+h}u_k^* g_h^*\right\} = 0$$

Rozpatrując przypadek (A), mamy:

$$P = 0$$
$$Q = 0$$

ale

$$|U| \neq 0$$

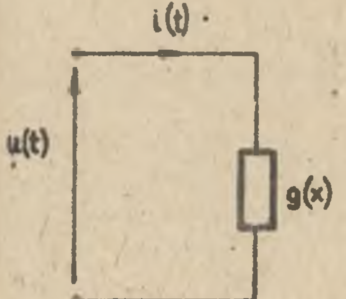
i

$$|I| \neq 0$$

Układ pobiera wyłącznie moc modułową $P_m = |U|\,|I|$.

Przykłady

1. W układzie pokazanym na rys. 2




Rys. 2

$$u(t) = |U_m|\sin\omega t = \frac{|U_m|}{2j}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right]$$

i

$$g(x) = Gx \quad \text{gdzie} \quad x(t) = \sin\omega t = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right]$$

Otrzymamy

$$i(t) = \frac{|U_m|}{4}\left[2 - e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}\right]$$

i

$$P_k = 0$$
$$Q_k = 0 \quad \text{dla każdego} \quad k$$

stąd

$$P = 0 \quad i \quad Q = 0$$

lecz

$$P_m = |U||I| = \frac{|U_m|}{\sqrt{2}} \frac{|U_m| G\sqrt{1,5}}{\sqrt{2}} = \frac{|U_m|^2 G\sqrt{1,5}}{2}$$

więc

$$P_m \neq 0$$

2. W układzie pokazanym na rys. 2

$$u(t) = |U_m| \sin\omega t = \frac{|U_m|}{2j}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right]$$

i

$$g(x) = G\,x$$

gdzie

$$x(t) = \sin 2\omega t = \frac{1}{2j}\left[e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}\right]$$

otrzymamy

$$i(t) = \frac{|U_m| G}{4}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} - e^{j3\omega t} - e^{-j3\omega t}\right]$$

dla $n = 3$

$$P_3 = 0 \quad \text{oraz} \quad Q_3 = 0$$

dla $k = -1$ i $h = +2$

$$\mathrm{Re}\left\{u_{-1+2} u^*_{-1} g^*_2\right\} = 0$$

więc

$$P_{-1} = P_1 = 0$$

a

$$Q = 2\,\mathrm{Im}\left\{-j u_1 i^*_1\right\} = \frac{-|U_m|}{2} \frac{|U_m| G}{4} \cdot 2 = \frac{-|U_m|^2 G}{4}$$

Podsumowanie

Stwierdzono, że czysto rezystancyjne liniowe układy aktywne (RAOP) zawierające rezystancje i konduktancje sterowane sygnałem okresowym o częstliwości współmiernej z sygnałem wejściowym mogą pobierać moc bierną.

Zatem dla pewnych przypadków spełniona jest relacja

$$\sum_{n} Q_n \neq 0$$

Analogicznie do relacji Manleya-Rowe'a [5] dla mocy czynnej można sformułować następującą relację dla mocy biernej w układach RAOP

$$\frac{Q_k}{\omega_k} = \pm \frac{Q_{-k}}{\omega_k}$$

przy czym znak "+" występuje dla tych harmonicznych, dla których spełniona jest relacja (15a). Dla pewnych warunków pracy układ RAOP może, przy niezerowym prądzie i napięciu, nie pobierać ani mocy czynnej ani mocy biernej.

Stwierdzone powyżej własności układów RAOP mogą być wykorzystane dla celów kompensacji mocy biernej oraz mocy odkształcenia.

## LITERATURA


[1] Nowomiejski Z.: Teoria mocy układów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Elektryka z. 49, 1977.

[2] Topór-Kamiński L.: Elementy składowe rezystancyjnych aktywnych obwodów parametrycznych. III international Conference on the Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory.

[3] Nikolsky S.M.: A Course of Mathematical Analysis. Mir Publishers, Moscow 1977.

[4] Malik N.R., Jackson G.L., Yong Sookim: Theory and Aplications of Resistor, Linear Controlled Resistor, Linear Controlled Conductor Networks. IEEE Trans. on CTS. April 1976.

[5] Louisell W.H.: Coupled Mode and Parametric Electronics, John Willey and Sons Inc. 1960.


Przyjęto do druku w maju 1979 r.

## МОЩНОСТЬ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

### Р е з ю м е

В статье рассмотрена проблема мощности в параметрических цепях активного сопротивления, управляемых сигналом $x(t)$. Доказано, что эти цепи могут потреблять не только активную, но и реактивную мощность. Представлены примеры.

POWER IN ACTIVE RESISTIVE TIME-VARYING NETWORKS

S u m m a r y

The problem of the power delivered into the active network composed of time-varying conductances was concerned. The thesis that not only real power but also reactive power can be delivered into such networks was proved. Some examples were shown.