ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 71 Nr kol. 656

Józef PARCHAŃSKI

BŁĄD DYNAMICZNY PRZY POMIARACH SIŁY HARMONICZNEJ

Streszczenie. Przeanalizowano przebieg czasowy odpowiedzi przetwornika przy pomiarach siły harmonicznej działającej na swobodny brzeg elementu sprężystego, którego drugi brzeg jest kolejno zamocowany sztywno, swobodny lub jest dopasowany falowo do podstawy przetwornika siły.

1. Wprowadzenie

W artykułach [3, 4] wykazano, że błąd dynamiczny przy pomiarach siły spowodowany falami odbitymi, zależy od przebiegu czasowego siły, a zwłaszcza od prędkości narastania naprężenia oraz od sposobu mocowania brzegów elementu sprężystego w podstawie przetwornika siły.

Siłę o dowolnym przebiegu można przedstawić za pomocą szeregu składającego się w ogólnym przypadku ze składnika stałego i sumy harmonicznych o różnych pulsacjach [1]. Odpowiedź przetwornika siły na skok (składnik stały) przeanalizowano w artykule [4].

Ten artykuł będzie dotyczyć zjawiska falowego występującego w elemencie sprężystym, wymuszonego siłą harmoniczną, dla różnych sposobów mocowania brzegów elementu sprężystego w obudowie przetwornika siły.

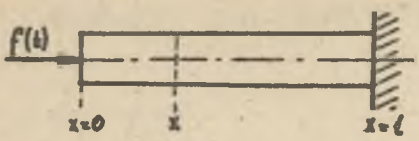
2. Odpowiedź czasowa przetwornika siły na wymuszenie harmoniczne

2.1. Element sprężysty przetwornika siły o jednym brzegu swobodnym, a drugim sztywnym

Założono, że siła harmoniczna f(t) o amplitudzie F, pulsacji ω o postaci

$$f(t) = F\,\mathbf{1}(t)\,\sin\omega t \tag{1}$$

działa na swobodny brzeg (x=0) idealnego, bezstratnego elementu sprężystego, wykonanego w postaci jednorodnego walca o przekroju poprzecznym A, długości l, gęstości ϱ i module sprężystości podłużnej E. Drugi brzeg (x=l) jest sztywno utwierdzony w podstawie przetwornika siły (rys. 1).



Rys. 1. Model elementu sprężystego

Założono, że granica sprężystości nie została przekroczona, a ruch poszczególnych cząstek walca określony jest równaniem falowym [2, 3]

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (2)$$

gdzie:

w – przemieszczenie cząstek walca,

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – prędkość rozprzestrzeniania się fali naprężeniowej w ośrodku walca.

Postępując podobnie jak w pracy [4], to znaczy rozwiązując równanie (2) z uwzględnieniem wymuszenia (1) metodą operatorów Laplace'a i przechodząc z powrotem na postać czasową, dla zerowych warunków początkowych i następujących warunków brzegowych [2]

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} &= \frac{f(t)}{EA} \\ w(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

otrzymano wyrażenie określające rozprzestrzenianie się fali naprężeniowej w elemencie sprężystym przetwornika siły

$$\sigma(x,t) = \frac{F}{A}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 1\left[t - \frac{2(k+1)l-x}{a}\right] \sin\omega\left[t - \frac{2(k+1)l-x}{a}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 1\left(t - \frac{2kl+x}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{2kl+x}{a}\right)\right\} \qquad (4)$$

Naprężenia w trzech charakterystycznych przekrojach wynoszą:

a) $x=0$; $\sigma(0,t) = \frac{F}{A}\, 1(t) \sin\omega t$,

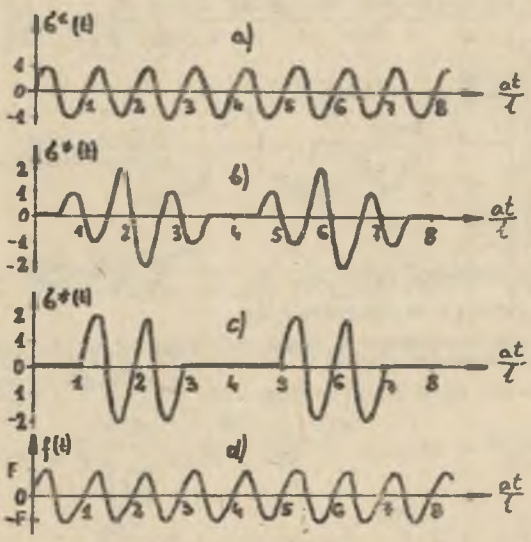
b) $x=0{,}5l$; $\sigma(0{,}5l;t) = \frac{F}{A}\left[1\left(t - \frac{0{,}5l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{0{,}5l}{a}\right) + \right.$

$$+ 1\left(t - \frac{1{,}5l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{1{,}5l}{a}\right) - 1\left(t - \frac{2{,}5l}{a}\right)\sin\omega\left(t - \frac{2{,}5l}{a}\right) -$$

$$\left. - 1\left(t - \frac{3{,}5l}{a}\right)\sin\omega\left(t - \frac{3{,}5l}{a}\right) + 1\left(t - \frac{4{,}5l}{a}\right)\sin\omega\left(t - \frac{4{,}5l}{a}\right)\ldots\right]$$

c) $x = l$; $\sigma(l,t) = \frac{2F}{A}\Big[1(1-\frac{l}{a})\sin\omega(t-\frac{l}{a}) - 1(t-\frac{3l}{a}) \cdot \sin\omega(t-\frac{3l}{a}) + 1(t-\frac{5l}{a})\sin\omega(t-\frac{5l}{a}) - \ldots\Big]$.

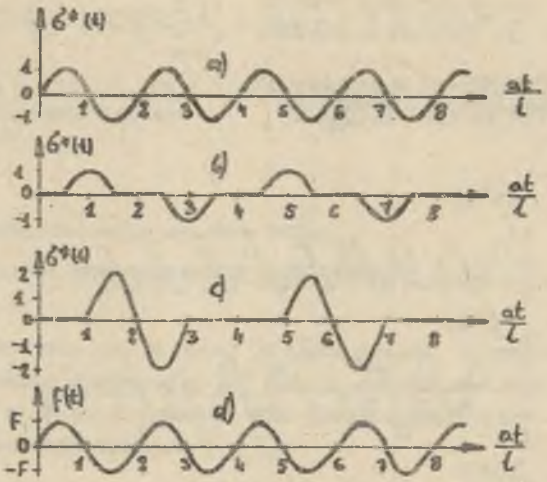
Przebiegi czasowe naprężeń w przekrojach $x = 0$; $0{,}5l$ i l oraz przebieg siły, przedstawiono na rys. 2, 3 i 4.



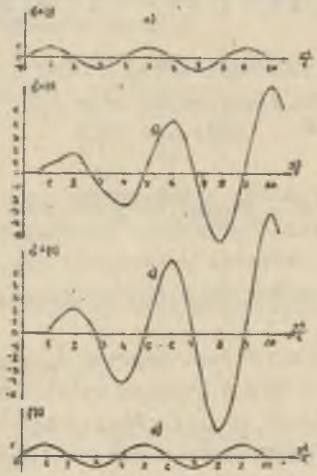
Rys. 2. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) $x=0$, b) $x = 0{,}5l$, c) $x = l$ oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = 2\pi\frac{a}{l}$

Z zależności (4) oraz rys. 2, 3 i 4 wynika, że tylko w przekroju $x = 0$ przebieg naprężenia ma kształt przebiegu działającej siły i jest z nią w fazie. W przekrojach $x \neq 0$ wskutek nakładania się fal odbitych od brzegów elementu sprężystego, pierwotna fala sinusoidalna naprężeniowa jest zniekształcona.

Stopień zniekształcenia przebiegu naprężenia wypadkowego, a tym samym stopień zniekształcenia przebiegu sygnału wyjściowego przetwornika siły jest funkcją stosunku pulsacji ω siły mierzonej do pulsacji własnej ω_{spr} elementu sprężystego. Np. naprężenie w środku długości elementu sprężystego ($x=0{,}5l$) dla $\omega = \frac{2\pi a}{l} = 4\omega_{spr}$ przedstawia opóźnione o $T/2$ fragmenty sinusoidy o amplitudach kolejno F/A, $2F/A$ oraz zero i pulsacji ω, powtarzające się cyklicznie z pulsacją ω_{spr} (rys. 2b). W przypadku $\omega = \frac{\pi a}{l} = 2\omega_{spr}$ naprężenie dla $x=0{,}5l$ stanowi opóźnione o $T/4$ połówki sinusoidy o amplitudzie F/A, pulsacji ω, powtarzające się cyklicznie z pulsacją ω_{spr} (rys. 3b). W przypadku rezonansu, czyli dla $\omega = \frac{\pi a}{2l} = \omega_{spr}$, dla



Rys. 3. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) x = 0, b) x = 0,5l, c) x = l oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = \pi\frac{a}{l}$



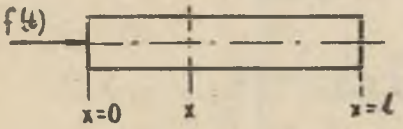
Rys. 4. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) x = 0, b) x = 0,5l, c) x = l oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = \pi\frac{a}{2l}$

x = 0,5l przebieg naprężenia rozpoczyna się opóźnioną o T/8 mocno zniekształconą sinusoidą o znacznie narastającej amplitudzie na skutek nakładania się fal odbitych od brzegów elementu sprężystego (rys. 4b).

2.2. Element sprężysty przetwornika siły o brzegach swobodnych

Model elementu sprężystego o brzegach swobodnych przedstawia rys. 5.

Postępując podobnie jak w p. 2.2 artykułu [4], to znaczy rozwiązując równanie falowe (2) przy zerowych warunkach początkowych i następujących warunkach brzegowych [2]



Rys. 5. Model elementu sprężystego o brzegach swobodnych

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} &= \frac{f(t)}{EA} \\ \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

po uwzględnieniu równania (1) otrzymano następujące wyrażenie określające rozprzestrzenianie się fali naprężeniowej w elemencie sprężystym przetwornika siły o brzegach swobodnych

$$\sigma(x,t) = \frac{F}{A}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} 1\left(t - \frac{2kl+x}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{2kl+x}{a}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} 1\left[t - \frac{2(k+1)l-x}{a}\right] \sin\omega\left[t - \frac{2(k+1)l-x}{a}\right]\right\} \tag{6}$$

Naprężenia w trzech charakterystycznych przekrojach wynoszą:

a) $x = 0$; $\sigma(0,t) = \frac{F}{A} 1(t) \sin\omega t$,

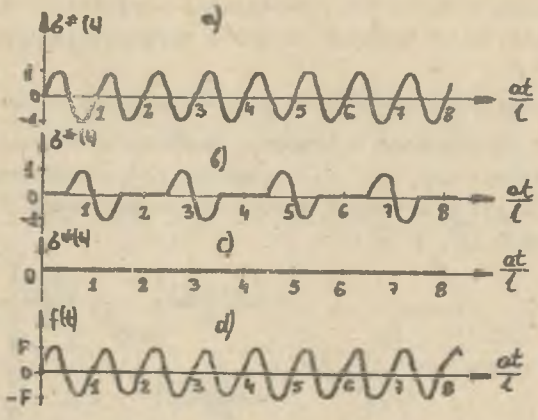
b) $x = 0{,}5l$; $\sigma(0{,}5l;t) = \frac{F}{A}\left[1\left(t - \frac{0{,}5l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{0{,}5l}{a}\right) - \right.$

$\left. - 1\left(t - \frac{1{,}5l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{1{,}5l}{a}\right) + 1\left(t - \frac{2{,}5l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{2{,}5l}{a}\right) - \ldots\right]$,

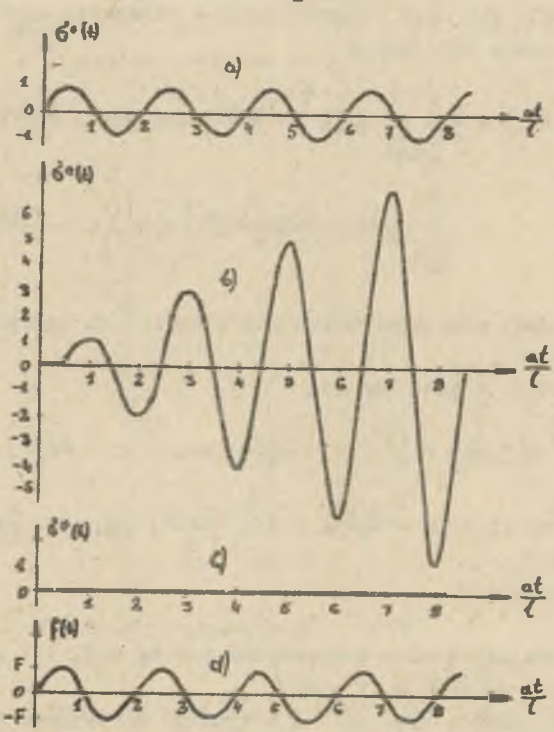
c) $x = l$; $\sigma(l,t) = 0$.

Przebiegi czasowe naprężeń w przekrojach x = 0; 0,5l i l oraz przebieg siły, przedstawiono na rys. 6, 7 i 8.

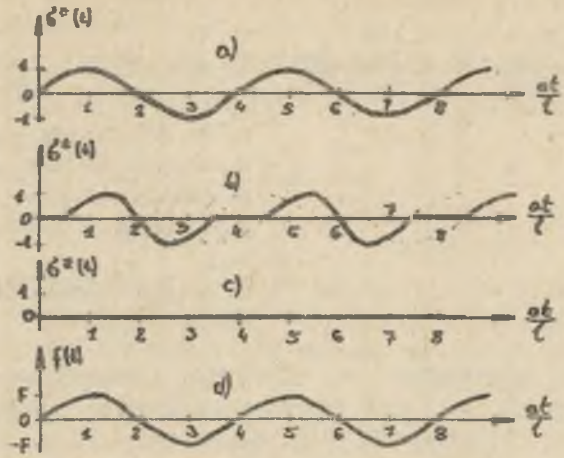
Z relacji (6) oraz z rys. 6, 7 i 8 wynika, że tylko w przekroju x = 0 przebieg naprężenia ma kształt przebiegu działającej siły i jest z nią w fazie. W przekrojach x = 0 na skutek nakładania się fal odbitych od brzegów elementu sprężystego, przebieg naprężenia znacznie różni się od przebiegu siły mierzonej.



Rys. 6. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) $x = 0$, b) $x = 0{,}51$, c) $x = 1$ oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = \frac{2\pi a}{l}$



Rys. 7. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) $x = 0$, b) $x = 0{,}51$, c) $x = 1$ oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = \frac{\pi a}{l}$

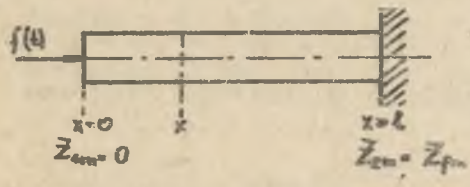


Rys. 8. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) x = 0, b) x = 0,5l, c) x = l oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = \frac{\pi \cdot a}{2l}$

Ponieważ pulsacja własna elementu o brzegach swobodnych jest dwa razy większa niż elementu o jednym brzegu swobodnym a drugim sztywnym, więc rezonans występuje przy $\omega = \omega_{spr} = \frac{\pi a}{l}$ (por.rys.4 z rys.7). W przypadku rezonansu naprężenie w środku długości elementu sprężystego (x = 0,5l) zaczyna z opóźnieniem o T/4 zmieniać się sinusoidalnie, przy czym amplitudy kolejnych połówek sinusoidy wzrastają o wartość amplitudy naprężenia fali pierwotnej.

2.3. Element sprężysty przetwornika siły o brzegu dopasowanym falowo

Model elementu sprężystego o jednym brzegu swobodnym a drugim dopasowanym falowo do podstawy przetwornika siły przedstawia rys. 9. Postępując podobnie jak w p. 2.3 artykułu [4], to znaczy przedstawiając rozwiązanie równania falowego (2) w postaci funkcji opisującej fale wędrowne, czyli



Rys. 9. Model elementu sprężystego dopasowanego falowo $(Z_{2m} = Z_{fm})$

$$\sigma(x,s) = \frac{F(s)}{A} \cdot \frac{Z_{fm}}{Z_{fm} + Z_{1m}} \cdot \frac{e^{-s\frac{x}{a}} - K_2\, e^{-s\frac{2l-x}{a}}}{1 - K_1 K_2\, e^{-s\frac{2l}{a}}} \qquad (7)$$

gdzie:

$K_1 = \frac{Z_{fm} - Z_{1m}}{Z_{fm} + Z_{1m}}$, $K_2 = \frac{Z_{fm} - Z_{2m}}{Z_{fm} + Z_{2m}}$ – współczynniki odbicia fali naprężeniowej odpowiednio od początku (1) i końca (2) elementu sprężystego,

Z_{1m}, Z_{2m} – impedancje mechaniczne mocowania, odpowiednio początku i końca elementu sprężystego w obwodzie przetwornika siły

Z_{fm} – impedancja mechaniczna falowa elementu sprężystego.

Zakładając, że początek (x=0) elementu sprężystego jest swobodny ($Z_{1m} = 0$) a koniec (x=l) jest dopasowany falowo ($Z_{2m} = Z_{fm}$) i uwzględniając równanie (1) otrzymano $K_1 = 1$, $K_2 = 0$,

$$\sigma(x,s) = \frac{F}{A\,s} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\, e^{-s\frac{x}{a}} \tag{8}$$

Po przejściu na postać czasową otrzymano

$$\sigma(x,t) = \frac{F}{A}\, 1\!\!1\left(t - \frac{x}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{x}{a}\right). \tag{9}$$

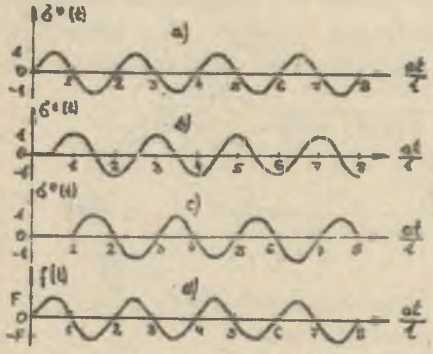
Naprężenia w trzech charakterystycznych przekrojach wynoszą:

a) $x = 0$; $\sigma(0,t) = \frac{F}{A}\, 1\!\!1(t) \sin\omega t$,

b) $x = 0{,}5l$; $\sigma(0{,}5l;\, t) = \frac{F}{A}\, 1\!\!1\left(t - \frac{0{,}5l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{0{,}5l}{a}\right)$,

c) $x = l$; $\sigma(l,t) = \frac{F}{A}\, 1\!\!1\left(t - \frac{l}{a}\right) \sin\omega\left(t - \frac{l}{a}\right)$.

Przebiegi czasowe naprężeń w przekrojach x=0; 0,5l i l oraz przebieg siły przedstawiono na rys. 10.



Rys. 10. Przebiegi czasowe naprężeń $\sigma^*(t) = \sigma(t) \cdot \frac{A}{F}$ w przekrojach a) x=0, b) x=0,5l, c) x=l oraz d) przebieg siły $f(t) = F \cdot 1\!\!1(t) \cdot \sin\omega t$, jeżeli $\omega = \frac{\pi \cdot a}{l}$

Ze wzoru (9) wynika, że przebieg czasowy naprężenia w dowolnym przekroju ma kształt przebiegu działającej siły niezależnie od wartości pulsacji ω i jest opóźniony o czas $t = \frac{x}{a}$, potrzebny na przejście fali naprężeniowej od początku ($x=0$) elementu sprężystego do danego przekroju oddalonego o x.

3. Wnioski

Z przedstawionych rozważań wynika istotny wniosek, że tylko przetwornik siły o elemencie sprężystym dopasowanym falowo do podstawy przetwornika (p. 2.3), mierzy siłę harmoniczną bez błędów amplitudowych, niezależnie od wartości pulsacji (wzór (9) i rys. 10). Sygnał wyjściowy przetwornika siły jest opóźniony w stosunku do siły działającej na wejściu, niezależnie od wartości pulsacji o czas $t = \frac{x}{a}$ potrzebny na przejście fali od miejsca przyłożenia siły do danego przekroju oddalonego o x.

W przypadku braku dopasowania falowego (p. 2.1 i 2.2), błąd dynamiczny pomiaru siły o dużej prędkości narastania naprężenia [3] jest znaczny i zależy od stosunku impedancji mechanicznej Z_{2m} mocowania brzegu do impedancji mechanicznej falowej Z_{fm} elementu sprężystego oraz od zasady działania przetwornika siły [4]. Szczególnie dużym błędem dynamicznym obarczone są pomiary siły harmonicznej o pulsacji równej pulsacji własnej elementu sprężystego przetwornika siły (rys. 4 i 7). Duży błąd dynamiczny istnieje również wtedy, gdy pulsacja n-tej harmonicznej siły mierzonej jest równa pulsacji własnej elementu sprężystego. Udział n-tej harmonicznej w sygnale wyjściowym jest wtedy nadmierny, więc przebieg czasowy sygnału wyjściowego różni się znacznie od przebiegu siły mierzonej.

LITERATURA

[1] Hagel R.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1975.

[2] Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.

[3] Parchański J.: Dokładność badań za pomocą wzorcowych impulsów siły. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. ELEKTRYKA z. 71, Gliwice 1980.

[4] Parchański J.: Błąd dynamiczny przy pomiarach skoku siły. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. ELEKTRYKA z. 71, Gliwice 1980.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОШИБКА ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Р е з ю м е

В статье рассматривается временное течение ответа датчика при измерениях гармонической силы, действующей на свободный край упругого элемента, которого второй край по очереди закреплён неподвижно, свободный или подобранный волново к основе датчика силы.

DYNAMIC ERROR IN MEASURING THE HARMONIC FORCE

S u m m a r y

The time course of transducer reply in measuring the harmonic force effecting the free edge of the elastic element has been analysed. The second edge of the element in turn is fixed stiffly, free or wave adjusted to the base of the force transducer.