ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 71 Nr kol. 656

Andrzej WARMUZEK

FUNKCJE KORELACYJNE WYŻSZYCH RZĘDÓW I ICH WŁAŚCIWOŚCI

Streszczenie. W artykule przedstawiono definicje i podstawowe właściwości funkcji autokorelacyjnych wyższych rzędów, pozwalających uogólnić znane dotychczas metody analizy korelacyjnej.

1. Wstęp

Jedną z podstawowych funkcji charakteryzujących dynamiczne właściwości procesów stochastycznych jest funkcja autokorelacji, zdefiniowana jako

$$R(t_1, t_2) = E\left\{X(t_1)\, X(t_2)\right\} \tag{1}$$

gdzie:

$X(t_1)$, $X(t_2)$ - zmienne losowe X określone w chwilach t_1 i t_2,

E - operator wartości oczekiwanej.

W przypadku procesów stacjonarnych i ergodycznych funkcję autokorelacji można przedstawić jako

$$R(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt \tag{2}$$

gdzie: $x(t)$, $x(t+\tau)$ - wartości jednej realizacji procesu X.

Funkcja autokorelacji spełnia ważną rolę w analizie procesów przypadkowych. Wykorzystując jednak możliwości, jakie ona daje, należy zdawać sobie sprawę z pewnych ograniczeń w jej stosowaniu. Zdefiniowana poprzez równania (1) i (2) funkcja autokorelacji określa w pełni tylko procesy o rozkładzie normalnym. W przypadku procesów o innym rozkładzie funkcja autokorelacji daje zbyt mało informacji do pełnego określenia procesu.

2. Funkcje korelacyjne wyższych rzędów

Większe możliwości interpretacyjne i większy zasób informacji o procesie dają funkcje korelacyjne wyższych rzędów. Jeżeli funkcję autokorelacji (1) nazwiemy drugim momentem łącznym, to momentem łącznym rzędu n+1 będzie

$$R(t_0,t_1,\ldots,t_n) = E\left\{X(t_0)X(t_1)\ldots X(t_n)\right\}. \tag{3}$$

Dla procesów stacjonarnych (w ścisłym sensie) i ergodycznych

$$R(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau_1)\ldots x(t+\tau_n)dt, \tag{4}$$

Wyrażenia (3) i (4) określają funkcję autokorelacji n-tego rzędu (AKF n-tego rzędu). Wobec tego trzeci moment łączny nazywany jest funkcją autokorelacji 2 rzędu (AKF 2 rzędu), czwarty moment łączny to AKF 3 rzędu, itd. Analogicznie definiuje się funkcje korelacji wzajemnej wyższych rzędów.

Każda funkcja korelacyjna n-tego rzędu jest funkcją n zmiennych. Powoduje to duże trudności w przedstawianiu wyników pomiarów tych funkcji oraz w ich prawidłowej interpreracji. Z tych względów znane dotychczas prace ograniczały się do badań właściwości funkcji korelacyjnych rzędu, co najwyżej 2.

3. Podstawowe właściwości funkcji autokorelacji wyższych rzędów

3.1. Symetria

W celu zbadania własności symetrii AKF n-tego rzędu najwygodniej jest interpretować ją, jako uogólnioną gęstość masy w przestrzeni R^n. Tak rozumując można funkcję $R(\tau)$ przedstawić jako gęstość masy rozłożonej na prostej τ, funkcję $R(\tau_1, \tau_2)$ jako gęstość masy rozłożonej na płaszczyźnie τ_1, τ_2, itd.

Z definicji (3), (4) wynika bezpośrednio własności symetrii AKF n-tego rzędu względem zamiany zmiennych. Oznacza to, że dla każdej permutacji argumentów wartość funkcji jest jednakowa. Przykładowo dla AKF 3 rzędu:

$$\begin{aligned} R(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= R(\tau_1, \tau_3, \tau_2) = R(\tau_2, \tau_3, \tau_1) = \\ &= R(\tau_2, \tau_1, \tau_3) = R(\tau_3, \tau_2, \tau_1) = R(\tau_3, \tau_1, \tau_2). \end{aligned} \tag{5}$$

Oznacza to, że AKF 3 rzędu jest symetryczna względem trzech płaszczyzn $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_2 = \tau_3$, $\tau_1 = \tau_3$, a jednocześnie względem prostej przecięcia się tych płaszczyzn, danej równaniem $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$.
Dla określenia tej funkcji wystarczy zatem pomiar jej wartości w obszarze ograniczonym nierównością

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_3, \tag{6}$$

który stanowi 1/6 całego obszaru określoności tej funkcji. Pozostałe wartości funkcji są takie same dla wszystkich permutacji argumentów (5).

Analogicznie postępuje się w przypadku AKF n-tego rzędu. Wystarczy wtedy wyznaczyć wartości funkcji w obszarze ograniczonym nierównością

$$\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \dots \geqslant \tau_n \tag{7}$$

Stanowi to 1/ n! całego obszaru określoności funkcji.
Wartość n! jest to liczba permutacji n zmiennych (argumentów AKF n-tego rzędu).

Należy podkreślić, że AKF n-tego rzędu nie jest symetryczna względem żadnej z osi $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, [3] z wyjątkiem przypadku

$$R(\tau_1, \dots, \tau_n) = \text{const.} \tag{8}$$

3.2. Ograniczoność

Wykazuje się [1], że jeśli proces X spełnia warunek

$$E\left\{|X|^p\right\} < \infty \tag{9}$$

to momenty rzędu n tego procesu są skończone dla wszystkich $n \leqslant p$. Twierdzenie to stosuje się także do AKF n-tego rzędu, która w punkcie $\tau_1 = 0, \dots, \tau_n = 0$ stanowi moment zwykły rzędu n+1 procesu X:

$$R(0,0,\dots,0) = E\left\{X^{n+1}\right\}. \tag{10}$$

Innymi słowy, jeżeli dla każdej realizacji proces X posiada skończony moment absolutny rzędu p, to wartości AKF rzędów $n \leqslant p-1$ w początku układu współrzędnych są skończone.

Można także pokazać, że AKF n-tego rzędu procesu nieujemnego ma swoją największą wartość w początku układu współrzędnych:

$$R(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \leqslant R(0,0,\dots,0). \tag{11}$$

Własność tę można zapisać inaczej:

$$\overline{x(t)x(t+\tau_1)\ldots x(t+\tau_n)} \leqslant \overline{x^{n+1}(t)}, \tag{12}$$

gdzie pozioma kreska oznacza operację uśredniania po czasie.

Aby udowodnić własności (11), (12) należy zastosować nierówność Höldera do funkcji

$$x^{n+1}(t),\ x^{n+1}(t+\tau_1),\ldots,x^{n+1}(t+\tau_n)$$

na odcinku $-T \leqslant t \leqslant T$.

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau_1)\ldots x(t+\tau_n)dt$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{n+1}(t)dt\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{n+1}(t+\tau_1)dt\ldots \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{n+1}(t+\tau_n)dt\right]^{1/n+1} =$$

$$= \left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{n+1}(t)dt\ \frac{1}{2T}\int_{-T+\tau_1}^{T+\tau_1} x^{n+1}(t)dt\ldots \frac{1}{2T}\int_{-T+\tau_n}^{T+\tau_n} x^{n+1}(t)dt\right]^{1/n+1} \tag{13}$$

Dla T dążącego do nieskończoności

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau_1)\ldots x(t+\tau_n)dt$$

$$\leqslant \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{n+1}(t)dt\ \frac{1}{2T}\int_{-T+\tau_1}^{T+\tau_1} x^{n+1}(t)dt\ldots\frac{1}{2T}\int_{-T+\tau_n}^{T+\tau_n} x^{n+1}(t)dt\right]^{1/n+1} \tag{14}$$

Ponieważ

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{n+1}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+\tau_1}^{T+\tau_1} x^{n+1}(t)dt = \ldots =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+\tau_n}^{T+\tau_n} x^{n+1}(t)dt = \overline{x^{n+1}(t)} = R(0,0,\ldots,0) \tag{15}$$

w wyniku otrzymuje się nierówność (11) i (12).

3.3. Ciągłość

Niech proces X spełnia następujące warunki:

1° $E\left\{|X|^p\right\} < \infty$

2° AKF 1 rzędu procesu X istnieje i jest wszędzie ciągła.

Wykażemy, że AKF n-tego rzędu procesu X jest wszędzie ciągła, gdy $n \leq p/2$. W tym celu rozpatrzyć należy różnicę

$$A = \left|R(\tau_1,\ldots,\tau_n) - R(\tau_1 + k_1,\ldots,\tau_n + k_n)\right| =$$

$$= \left|\overline{x(t)x(t+\tau_1)\ldots x(t+\tau_n)} - \overline{x(t)x(t+\tau_1 + k_1)\ldots x(t+\tau_n + k_n)}\right| \tag{16}$$

W celu uproszczenia obliczeń wprowadza się następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
&x(t) = a_0 = b_0, \\
&x(t + \tau_1) = a_1, && x(t + \tau_1 + k_1) = b_1, \\
&x(t + \tau_2) = a_2, && x(t + \tau_2 + k_2) = b_2, \\
&\vdots && \vdots \\
&x(t + \tau_n) = a_n, && x(t + \tau_n + k_n) = b_n.
\end{aligned} \tag{17}$$

Różnicę (16) można zapisać teraz jako

$$A = \left|\overline{a_0 a_1 \ldots a_n} - \overline{b_0 b_1 \ldots b_n}\right| \tag{18}$$

Dodanie i odjęcie składnika $a_0 \ldots a_{n-1} b_n$ nie zmienia wartości A:

$$A = \left|\overline{a_0 \ldots a_n} - \overline{a_0 \ldots a_{n-1} b_n} + \overline{a_0 \ldots a_{n-1} b_n} - \overline{a_0 b_1 \ldots b_n}\right| =$$

$$= \left|\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - b_n)} + \overline{a_0 b_n (a_1 \ldots a_{n-1} - b_1 \ldots b_{n-1})}\right| . \tag{19}$$

Rozwijając w ten sposób dalej prawą stronę równania (19) dochodzi się do wyrażenia

$$A = \left|\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - b_n)} + \overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-2}(a_{n-1} - b_{n-1}) b_n} + \ldots\right.$$

$$\left. + \ldots + \overline{a_0 b_n b_{n-1} \ldots b_3 (a_2 - b_2) a_1} + \overline{a_0 b_n b_{n-1} \ldots b_2 (a_1 - b_1)}\right| \tag{20}$$

Ponieważ

$$|V_1 + V_2 + \ldots + V_n| \leq |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_n| \tag{21}$$

oraz

$$|\overline{V}_1| + |\overline{V}_2| + \ldots + |\overline{V}_n| \leq |\overline{V}_1| + |\overline{V}_2| + \ldots + |\overline{V}_n| \tag{22}$$

można napisać

$$A \leq |\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - b_n)}| + |\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-2}(a_{n-1} - b_{n-1})b_n}| + \ldots$$

$$\ldots + |\overline{a_0(a_1 - b_1)b_2 \ldots b_n}| \tag{23}$$

Do każdego składnika powyższej sumy stosuje się kolejno nierówność Schwartza

$$|\overline{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}(a_n - b_n)}| \leq \left[\overline{|a_0 a_1 \ldots a_{n-1}|^2 \; |a_n - b_n|^2}\right]^{1/2} \tag{24}$$

Wyrażenie $\overline{|a_0 a_1 \ldots a_{n-1}|^2}$ określa AKF rzędu 2n-1 i jego wartość jest ograniczona pod warunkiem, że $2n \leq p$ (zał. 1°). Drugi czynnik prawej strony nierówności (24) można zapisać w formie

$$\overline{|a_n - b_n|^2} = \overline{a_n^2} + \overline{b_n^2} - \overline{2a_n b_n}, \tag{25}$$

gdzie:

$$\overline{a_n b_n} = \overline{x(t+\tau_n)x(t+\tau_n+k_n)} = R(k_n), \tag{26}$$

czyli

$$\overline{|a_n - b_n|^2} = 2\left[R(0) - R(k_n)\right] \tag{27}$$

Funkcja $R(k_n)$ jest ciągła (warunek 2°), zatem każdy ze składników sumy po prawej stronie nierówności (23) można uczynić dowolnie małym przez odpowiedni dobór wartości k_i $(i=1,\ldots,n)$. Tak więc AKF n-tego rzędu procesu spełniającego warunki 1° i 2° jest ciągła w sensie definicji Cauchy'ego, gdy $2n \leq p$.

3.4. Związki AKF wyższych rzędów z innymi charakterystykami procesu

Poprzez odpowiedni dobór wartości poszczególnych argumentów AKF n-tego rzędu można uzyskać wiele informacji o innych parametrach procesu przypadkowego. Np. podstawiając za wszystkie argumenty zero otrzymuje się

$$R\ 0,0,\ldots,0 = E\left\{X^{n+1}\right\} = m_{n+1}, \tag{28}$$

czyli wartość AKF n-tego rzędu w początku układu współrzędnych równa jest momentowi zwykłemu rzędu m+1, oznaczonemu jako m_{n+1}.

Zakładamy, że wartości realizacji procesu X po upływie dostatecznie długiego czasu τ ($\tau \to \infty$) są niezależne. Wartość oczekiwana iloczynu dwóch niezależnych zmiennych losowych jest równa iloczynowi wartości oczekiwanych tych zmiennych. Na tej podstawie można napisać:

$$R(0,0,\ldots,\infty) = R(\infty,\infty,\ldots,\infty) = E\left\{X^n(t)\right\} E\left\{X(\infty)\right\} =$$

$$= E\left\{X(t)\right\} E\left\{X^n(\infty)\right\} = m_n\, m_1. \tag{29}$$

Podstawiając za 2 lub n-1 argumentów $\tau = \infty$, przyrównując jednocześnie resztę argumentów do zera otrzymuje się:

$$R(0,0,\ldots,\infty,\infty) = R(0,\infty,\ldots,\infty) = E\left\{X^{n-1}(t)\right\} E\left\{X^2(\infty)\right\} =$$

$$= E\left\{X^2(t)\right\} E\left\{X^{n-1}(\infty)\right\} = m_{n-1}\, m_2. \tag{30}$$

Podstawiając dalej w miejsce poszczególnych argumentów zera i nieskończoności otrzymać można wartości AKF n-tego rzędu równe $m_{n-2}\, m_3$, $m_{n-3}\, m_4$, aż do $m_{n/2}\, m_{(n/2)+1}$ dla n parzystego i $m_{(n+1)/2}\, m_{(n+1)/2} = m^2_{(n+1)/2}$ w przypadku, gdy n jest nieparzyste. Przykładowo dla AKF 4 rzędu:

$$R(0,0,0,0) = E\left\{X^5(t)\right\} = m_5$$

$$R(\infty,0,0,0) = R(\infty,\infty,\infty,\infty) = E\left\{X^4(t)\right\} E\left\{X(\infty)\right\} =$$

$$= E\left\{X^4(\infty)\right\} E\left\{X(t)\right\} = m_4\, m_1$$

$$R(\infty,\infty,0,0) = R(\infty,\infty,\infty,0) = E\left\{X^3(t)\right\} E\left\{X^2(\infty)\right\} =$$

$$= E\left\{X^3(\infty)\right\} E\left\{X^2(t)\right\} = m_3\, m_2.$$

Natomiast dla AKF 5 rzędu:

$$R(0,0,0,0,0) = E\left\{X^6(t)\right\} = m_6$$

$$R(\infty,0,0,0,0) = R(\infty,\infty,\infty,\infty,\infty) = E\left\{X^5(t)\right\} E\left\{X(\infty)\right\} =$$

$$= E\left\{X(t)\right\} E\left\{X^5(\infty)\right\} = m_5\, m_1$$

$$R(\infty,\infty,0,0,0) = R(\infty,\infty,\infty,\infty,0) = E\left\{X^4(t)\right\} E\left\{X^2(\infty)\right\} =$$

$$= E\left\{X^2(t)\right\} E\left\{X^4(\infty)\right\} = m_4\, m_2$$

$$R(\infty,\infty,\infty,0,0) = E\left\{X^3(t)\right\} E\left\{X^3(\infty)\right\} = m_3^2.$$

Zależności te są ważne także dla wszystkich permutacji argumentów.

Zakładając teraz, że AKF n-tego rzędu ma postać:

$$R(\tau_1 + k_1,\ \tau_2 + k_1 + k_2,\ldots,\tau_n + k_1+\ldots+k_n), \tag{31}$$

gdzie $k_1,\ldots,k_n$ - stałe, można uzyskać następujące związki:

dla $k_1 = \infty$, $\tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_n = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$:

$$R(\tau_1 + k_1,\ \tau_2 + k_1 + k_2,\ldots,\tau_n + k_1 + k_2 +\ldots+ k_n) = m_n\, m_1,$$

dla $k_1 = k_2 = \infty$, $\tau_3 = \ldots = \tau_n = k_3 = \ldots = k_n = 0$:

$$R(\tau_1 + k_1,\ \tau_2 + k_1 + k_2,\ldots,\ \tau_n + k_1 + k_2 +\ldots+ k_n) = m_{n-1}\, m_1^2,$$

$$\vdots$$

dla $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = \infty$:

$$R(\tau_1 + k_1,\ \tau_2 + k_1 + k_2,\ldots,\tau_n + k_1 + k_2 +\ldots+ k_n) = m_1^{n+1}. \tag{32}$$

Znając zatem wartości AKF n-tego rzędu w powyższych punktach można obliczyć wszystkie momenty zwykłe badanego procesu, aż do rzędu n.

Inną ciekawą własnością AKF n-tego rzędu jest fakt, że zawiera ona w sobie informację o wszystkich AKF rzędów mniejszych, niż n. Jeżeli w wyrażeniu na AKF n-tego rzędu wartość jednego z argumentów będzie dążyła do nieskończoności, to na podstawie założenia o niezależności procesu przy przesunięciu o dostatecznie długi czas można napisać:

$$R(\tau_1,\ \tau_2,\ldots,\infty) = R(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})\, m_1. \tag{33}$$

Gdy wartości dwóch argumentów będą dążyły do nieskończoności, to:

$$R(\tau_1,\tau_2,\ldots,\infty,\infty) = R(\tau_1,\ldots,\tau_{n-2})\, m_2. \tag{34}$$

Postępując dalej w ten sposób otrzymuje się:

$$R(\tau_1,\infty,\ldots,\infty) = R(\tau)\, m_{n-1}. \tag{35}$$

Znając z poprzednich wywodów wszystkie momenty zwykłe procesu, można wyznaczyć wszystkie AKF rzędów mniejszych, niż n. Podobnie, jak w poprzednim przypadku, zależności powyższe ważne są także dla wszystkich permutacji argumentów

4. Wnioski

W artykule przedstawiono niektóre właściwości funkcji autokorelacyjnych wyższych rzędów. Niektóre z nich są analogiczne do właściwości AKF 1 rzędu, a niektóre wykazują, że AKF wyższych rzędów zawierają więcej informacji o procesie przypadkowym.

Pomiar AKF wyższych rzędów w całym zakresie zmienności argumentów jest trudny technicznie i kłopotliwy, szczególnie ze względu na długi czas pomiaru. Wykorzystując właściwości symetrii można ten czas wydatnie ograniczyć. Jeżeli czas pomiaru AKF 1 rzędu procesu przypadkowego wynosi T, to czas pomiaru AKF n-tego rzędu wynosi T^n. Stosując jednak wyniki rozważań zawartych w p. 3.1 można ten czas zredukować do wartości $T^n/n!$.

AKF wyższych rzędów są funkcjami ujmującymi syntetycznie wiele parametrów procesu przypadkowego. Między innymi analizując wartości AKF n-tego rzędu można obliczyć wszystkie momenty zwykłe procesu, aż do momentu rzędu n+1 włącznie. Znając momenty zwykłe, można na podstawie znanej zależności [8] obliczyć wszystkie momenty centralne, aż do rzędu n+1 włącznie:

$$\mu_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} m_k m_1^{n-k} + (-1)^{n-1}(n-1)\, m_1^n \qquad (36)$$

gdzie:

μ_n - moment centralny rzędu n

m_n - moment zwykły rzędu n.

Możliwe jest także obliczenie z AKF n-tego rzędu wartości wszystkich AKF rzędów mniejszych od n. Wystarcza wtedy ustalenie dostatecznie dużej wartości odpowiednich argumentów.

Przytoczone powyżej niektóre właściwości AKF wyższych rzędów świadczą o dużej roli, jaką mogą one spełniać w kompleksowej analizie sygnałów. Świadczą o tym także niektóre ich zastosowania omówione w pracy [9].

LITERATURA

[1] Gichman I.I., Skorochod A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1968.

[2] Hayase J.Y.: Second-order correlation. Quarterly Progress Report, April 15, Res.Lab. of Electronics, M.I.T., 1954.

[3] Lee Y.W., Bose A.G., Hayase J.Y.: Properties of second-order autocorrelation functions. Quarterly Progress Report, October 15, Res. Lab. of Electronics, M.I.T., 1954.

[4] Hayase J.Y.: Calculation of second-order correlation functions. Quarterly Progress Report, January 15, Res. Lab. of Electronics, M.I.T., 1955.

[5] Hayase J.Y.: Second-order correlation functions. Properties. Calculations. Quarterly Progress Report, April 15, Res. Lab. of Electronics, M.I.T., 1955.

[6] Hayase J.Y.: Properties of second-order correlation functions. Quarterly Progress Report, October 15, Res. Lab. of Electronics, M.I.T., 1955.

[7] Hayase J.Y.: Properties of second-order correlation functions. Quarterly Progress Report, January 15, Res. Lab. of Electronics, M.I.T., 1956.

[8] Lexikon der Mathematik. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1977.

[9] Warmuzek A.: Pomiary i zastosowania funkcji korelacyjnych wyższych rzędów. Zeszyty Naukowe Pol.Sl., Elektryka nr 71, 1980.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА И ИХ СВОЙСТВА

Р е з ю м е

В статье приводятся определение и основные свойства корреляционных функции высшего порядка, которые могут обобщить известные методы корреляционного анализа.

HIGHER ORDER CORRELATION FUNCTIONS AND THEIR FEATURES

S u m m a r y

The paper presents a definition and main features of higher order correlation functions, which allow to generalize the known methods of correlation analysis