ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Ewa SOWA

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ESTYMACJA MOCY W UKŁADACH O PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

Streszczenie. Przedstawiono strukturę algorytmu obliczeniowego opartego na metodzie szybkiej transformacji Fouriera (FFT) do estymacji mocy w układach o przebiegach odkształconych. Algorytm ten pozwala na określenie różnych mocy w węźle układu poprzez estymację funkcji korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu oraz gęstości widmowej wzajemnej tych przebiegów. Pokazano związki do określenia mocy odkształceń i powiązano je z estymowanymi funkcjami korelacji własnej i wzajemnej przebiegów.

1. Wprowadzenie

Rozważane są przebiegi napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$, występujące w węźle układu elektroenergetycznego, bądź też na zaciskach dowolnego dwójnika jako przebiegi o skończonej mocy. Przebiegi te obserwowane są w skończonym przedziale czasowym (tzn. przedział ten jest czasem obserwacji danego przebiegu), mogą również reprezentować stacjonarny, ergodyczny proces losowy. Odkształcenia przebiegów szacowane są w stosunku do sinusoidalnych przebiegów odniesienia. Niech przebiegi te zadane są w postaci skończonego ciągu wartości, tzn.

$$\{u_n\} \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\dots,N-1$$

oraz (1)

$$\{i_n\} \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\dots,N-1$$

gdzie N - liczba próbek w czasie obserwacji T w równych odstępach czasu Δt $(T = N\Delta t)$.
(Odległość próbek określa częstotliwość Nyquista).
Niech również: $N = 2^p$ oraz wartość średnia przebiegów $u(t)$ i $i(t)$ jest równa zeru (jeśli to nie zachodzi, to dla analizy można od przebiegów rzeczywistych odjąć wartości średnie). Tak przygotowane dane o węźle układu mogą posłużyć do estymacji różnego rodzaju mocy, poprzez określenie funkcji korelacyjnych przebiegów prądu i napięcia w węźle, funkcji widmowych gęstości mocy i pozwalają na wykorzystanie maszyny cyfrowej do ich obliczeń.

2. Szybkie przekształcenie Fouriera (FFT)

Przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego jest nazywane dyskretnym przekształceniem Fouriera. I tak, dla dowolnej częstotliwości f dyskretna jego postać dana jest zależnością:

$$X(f,T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f n \Delta t}, \tag{2}$$

gdzie:

x_n - wartości, jakie przybiera przebieg (napięcia lub prądu) w chwilach czasu $n\Delta t$,

$n = 0,1,2,\ldots,N-1$.

Zazwyczaj dla wyznaczenia transformaty $X(f,T)$ wybiera się dyskretne wartości częstotliwości f:

$$f_k = kf = \frac{k}{N\Delta t}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

Rzędne transformaty:

$$X_k = \frac{X(f_k,T)}{\Delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \tag{3}$$

$k = 0,1,\ldots,N-1$.

Należy zauważyć, że dla $k = 0,1,\ldots,\frac{1}{2}N-1$ pojawiają się wyniki jednoznaczne, gdyż już dla $k = \frac{1}{2}N$ występuje graniczna częstotliwość Nyquista $\left(f_g = \frac{1}{2\Delta t}\right)$.

Odwrotne przekształcenie dyskretne dane jest wzorem:

$$x_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(f_k,T)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \tag{4}$$

$n = 0,1,\ldots,N-1$.

Zależności (2) i (4) definiują parę transformat Fouriera dla funkcji dyskretnych w skończonym przedziale czasowym.

n,k - wskaźniki próbkowania odpowiednio w dziedzinie czasu i częstotliwości.

Realizację dyskretnego przekształcenia Fouriera na maszynie cyfrowej, algorytm jego obliczenia daje metoda FFT - szybkiej transformacji Fouriera. Metoda ta polega na tym, że wyjściowa funkcja dyskretna zostaje przekształcona na ciąg współczynników Fouriera w pewnej liczbie kroków, w każdym kroku oblicza się ciąg transformat pośrednich stanowiących dane do kroku następnego. Gdy $N = 2^p$ transformaty pośrednie są obliczone dla dwóch elementów. Różne wersje algorytmu FFR można znaleźć w pracach [1], [2]. Analizowaną zależnością jest:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk}, \tag{5}$$

$k = 0,1,\ldots, N-1, \quad W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}.$

Jedną z wersji jest tzw. algorytm Cooleya-Tukeya ([1], [2]), który może być podstawą do napisania programu.
Równanie (5) można zapisać

$$X(k_{p-1})k_{p-2},k_{p-3},\ldots,k_o) = \sum_{n_o=0}^{1}\sum_{n_1=0}^{1}\cdots$$

$$\cdots\left[\sum_{n_{p-1}=0}^{1} x(n_{p-1},\ldots,n_o)\, W^{k_o n_{p-1} 2^{p-1}}\right] W^{k(n_{p-2}2^{p-2}+\ldots+n_o)}, \tag{6}$$

k_m, n_m - przybierają wartości 0 lub 1 i są współczynnikami rozwinięcia wskaźników k i n w szeregi binarne (dokładne wyprowadzenie równania (6) - patrz wymienione poz. lit.). Zapisując wyrażenie w nawiasie kwadratowym jako

$$\sum_{n_{p-1}=0}^{1} x(n_{p-1},\ldots,n_o)\, W^{k_o n_{p-1} 2^{p-1}} = A_1(k_o,n_{p-2},\ldots,n_o), \tag{7}$$

w następnym etapie takiej procedury rekurencyjnej uzyskuje się:

$$A_2(k_o,k_1,n_{p-3},\ldots,n_o) = \sum_{n_{p-2}=0}^{1} A_1(k_o,n_{p-2},\ldots,n_o)\ . \tag{8}$$

$$\cdot\ W^{(k_1 2+k_o)n_{p-2}2^{p-2}}.$$

Ogólnie l-ty etap ma postać:

$$A_l(k_o,k_1,\ldots,k_{l-1},\ n_{p-l-1},\ldots,n_o) =$$

$$= \sum_{n_{p-l}=0}^{1} A_{l-1}(k_o,k_1,\dots,k_{l-2},n_{p-l},\dots,n_o) \cdot \tag{9}$$

$$\cdot W^{(k_{l-1}2^{l-1} + \dots + k_o)n_{p-l}2^{p-l}}$$

$l = 1,2,3,\dots,p.$
Ostatecznie otrzymamy

$$X_k = X(k_{p-1},k_{p-2},\dots,k_o) = A_p(k_o,\dots,k_{p-2},k_{p-1}). \tag{10}$$

Podstawowe algorytmy FFT są opracowane ogólnie dla danych będących ciągami liczb zespolonych.

3. Algorytm obliczeniowy do oszacowania mocy w węźle układu

Rozważmy interkorelację przebiegów napięcia i prądu danych postacią(1) i spełniających założenia podane we wprowadzeniu. Ze względu na związki funkcji interkorelacji $\vartheta(\tau)$ z mocami (poz. [4]) można estymować moce w węźle wyznaczając funkcję $\vartheta(\tau)$. Estymacja ta polega w pierwszym rzędzie na obliczeniu estymatorów gęstości widmowej wzajemnej, a następnie na obliczeniu transformaty Fouriera odwrotnej otrzymanych estymatorów.
Algorytm będzie zawierał następujące etapy:

1. Wyrazy ciągu $\{u'_n\}$ potraktujemy jako część rzeczywistą, a wyrazy ciągu $\{i'_n\}$ jako część urojoną przebiegu zespolonego danego ciągiem $\{z'_n\}$:

$$z'_n = u'_n + ji'_n \tag{11}$$

dla $n = 0,1,\dots,N-1$.

2. Zwiększenie części rzeczywistej i urojonej o N zer, tworząc ciąg $\{z_n\}$ składający się z 2N członów, tzn.

$$z_n = u_n + ji_n, \quad n = 0,1,\dots,2N-1. \tag{12}$$

Krok ten pozwala na rozsunięcie 2 części "cyklicznej" funkcji korelacji wzajemnej ϑ^c:

$$\vartheta^c(r\Delta t) = \frac{N-r}{N}\left[\vartheta(r\Delta t) + \vartheta^*((N-1-r)\Delta t)\right], \tag{13}$$

gdzie

$$\vartheta(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{n=1}^{N-r} u_n i_{n+r}$$

jest korleacją wzajemną przebiegów $u(t)$ i $i(t)$, $r = 0,1,\ldots,m$ (liczba opóźnień jednostkowych)

a

$$\vartheta^*(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{n=1}^{N-r} i_n u_{n+r}.$$

3. Wyznaczenie 2N-punktowej transformaty Fouriera dającej ciąg $\{Z_k\}$ dla $k = 0,1,\ldots,2N-1$, przy zastosowaniu procedury (9) dla równania:

$$Z_k = \sum_{n=0}^{2N-1}\left[u_n + ji_n\right]W^{kn}, \tag{14}$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{2N}}.$$

4. Obliczenie ciągów transformat napięcie $\{U_k\}$ i prądu $\{I_k\}$ dla $k=0,1,\ldots,2N-1$, przy zastosowaniu zależności ([3])

$$U_k = \frac{Z_k + Z^*_{2N-k}}{2}$$

$$I_k = \frac{Z_k - Z^*_{2N-k}}{2j} \tag{15}$$

$$k = 0,1,\ldots,2N-1$$

Z^*_k – oznacza funkcję zespoloną sprzężoną z funkcją Z_k (u_n, i_n są o wartościach rzeczywistych).

5. Przeprowadzenie wygładzenia ciągów $\{U_k\}$ oraz $\{I_k\}$. Krok ten związany jest z zagadnieniem tzw. przecieku widma, wynikającego ze skończonego czasu trwania obserwacji przebiegów $u(t)$ i $i(t)$. Zmniejszenia efektu przecieku można dokonać w dziedzinie czasu lub wykonując odpowiednie operacje w dziedzinie częstotliwości (operacja splatania). Jednym z okien wygładzających ciągi $\{U_k\}$ i $\{I_k\}$ jest tzw. okno GEO (Goodmana-Enochsona-Otmesa). Równanie opisujące operację wygładzania ma tu postać ([1]):

$$\tilde{U}_k = \tilde{U}_k + \sum_{l=1}^{3} a_l (U_{k-1} + U_{k+1}), \qquad (16)$$

$k = 0,1,\ldots,2N-1$,

a_l - współczynniki rzeczywiste (znane).

Analogicznie dla ciągu $\{I_k\}$.

6. Uzyskanie zgrubnych estymatorów wzajemnej gęstości widmowej $\tilde{\Theta}_k$ dla $k = 0,1,\ldots,2N-1$

$$\tilde{\Theta}_k = \frac{2\Delta t}{N} \left| \tilde{U}_k^{*} \tilde{I}_k \right| \qquad (17)$$

$\tilde{\Theta}_k$ - zgrubny estymator widmowej gęstości wzajemnej przebiegów $u(t)$ i $i(t)$,

$\{\tilde{U}_k\}$, $\{\tilde{I}_k\}$ - ciągi transformat wygładzonych,

U_k^{*} - wielkości sprzężone z $\tilde{U}_k$.

Z uwagi na zastosowanie okna GEO przeprowadza się skalowanie:

$$0.856\, \tilde{\Theta}_k \longrightarrow \tilde{\Theta}_k \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\ldots,2N-1.$$

7. Otrzymanie wygładzonych estymatorów wzajemnej gęstości widmowej przebiegów

$$\Theta_k = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \tilde{\Theta}(k+j), \qquad (18)$$

(poprzez uśrednianie l kolejnych estymatorów).

8. Obliczenie odwrotnej transformaty Fouriera metodą FFT

$$\vartheta_r = \frac{N}{N-r} F^{-1}[\Theta_k], \qquad (19)$$

dla $r=0,1,\ldots,2N-1$.

Uwzględniając wynik tylko dla $r = 0,1,\ldots,N-1$ uzyskamy korelację wzajemną przebiegów napięcia i prądu postaci:

$$\vartheta_r = \vartheta(r\Delta t) \quad r = 0,1,\ldots,N-1. \qquad (20)$$

Ponieważ zachodzi (4):

$$\vartheta(0) = S = P + jQ. \qquad (21)$$

na podstawie estymacji korelacji wzajemnej można określić moc symboliczną, czynną i bierną pobieraną przez obciążenie w węźle układu. Można również wykorzystać zależność

$$P + jQ = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \Theta(\omega)d\omega \tag{22}$$

([4]), gdyż w powyższej procedurze obliczony jest ciąg $\{\Theta_k\}$. Znalezienie ciągu $\{\vartheta_r\}$ ma istotne znaczenie, gdyż sprawność wykorzystania energii i moc nie jest zależna oddzielnie od napięcia u(t) i prądu i(t) lecz od korelacji napięciowo-prądowej przebiegów.

Stosując podobną procedurę obliczeń dla każdego z przebiegów z osobna, można oszacować wartości skuteczne napięcia $|U|$ i prądu $|I|$, wykorzystując zależności:

$$|U| = \sqrt{\varphi(0)} \quad \text{oraz} \quad |I| = \sqrt{\vartheta(0)}, \tag{23}$$

gdzie:

$\varphi(0)$, $\vartheta(0)$ - funkcje autokorelacji przebiegów napięcia i prądu dla przesunięcia r = 0 ([4]).

Wówczas moc modułowa:

$P_m = |U||I|$ i współczynnik

$$\cos\varphi = \frac{P}{|U||I|} = \frac{Re\{\vartheta(0)\}}{\sqrt{\varphi(0)\vartheta(0)}} \tag{24}$$

da się łatwo określić.

Potrafimy również wtedy oszacować moc dystorsji D, korzystając z relacji

$$(|U||I|)^2 = P^2 + D^2. \tag{25}$$

Zależności (24) i (25) wskazują, jak istotny wpływ na odkształcenie przebiegów napięcia i prądu od przebiegów sinusoidalnych ma wielkość mocy dystorsji D.

LITERATURA

[1] OTNES R.K., ENOCHSON L.: Analiza numeryczna szeregów czasowych. WNT, Warszawa 1978

[2] BEAUCHAMP K.G.: Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. WNT, Warszawa 1978.

[3] BENDAT J.S., PIERSOL A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.

[4] NOWOMIEJSKI Z., SOWA E.: Teoria mocy układów elektryczmych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka 49, 1977.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Prof. dr hab. Zygmunt Nowomiejski

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ
С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПРОБЕГАМИ

Р е з ю м е

Представлена структура расчетного алгоритма, основанного на методе быстрой трансформации Фурье (FFT) для оценки мощности в схемах с несинусоидальными пробегами. Этот алгоритм позволяет определить разные мощности на зажимах схемы путем оценки функции взаимной корреляции пробегов напряжения и тока, а также взаимной спектральной плотности этих пробегов. Показаны связи для определения мощности дисторсии и соединены они с оцениваемыми функциями собственной и взаимной корреляции пробегов.

THE POWER ESTIMATION IN ELECTRIC CIRCUITS CHARACTERISTIC
OF NON-SINUSOIDAL FUNCTION SOURSES

S u m m a r y

In the paper the structure of the algorithm for power estimation in electric circuits characteristics of non-simuseidal function courses is presented. The procedure is based on the fast Fourier transformation (FFT) and allows for defining different ranges of power on the terminals of the circuit. The power magnitude is calculated thanks to the estimation of the correlation functions and spectral concentration functions. The relations defining the power deformation were presented and they were attached to the estimated functions and to the inter-correlation of functions courses.