ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Edward WILCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń
Przemysłu Hutniczego i Ceramicznego
Politechniki Śląskiej

POTENCJAŁ WEKTOROWY NA GRANICY ŚRODOWISK POWIETRZA I PRZEWODNIKA METALOWEGO; DYSKUSJA POPRAWNOŚCI POSTAWIONEGO PROBLEMU BRZEGOWEGO

Streszczenie. Artykuł jest kontynuacją zagadnienia podjętego w pracy [5]. Przeprowadzono dowód jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sformułowanego w pracy [5]. Artykuł podaje również interpretację fizyczną pewnego rodzaju gęstości prądów, jakie mogą płynąć na brzegu obszaru.

1. Jednoznaczność rozwiązania potencjału wektorowego w przestrzeni

Problem brzegowy został postawiony w pracy [5] (punkt 3). Sprowadza się on do obliczenia pola potencjału wektorowego w przestrzeni ([5] rys. 1), w układzie cewka - bryła metalu zasilanym prądem o częstotliwości do kilkudziesięciu tys. Hz. Rozpatrujemy stan ustalony sinusoidalnie zmienny. Potencjał wektorowy jest więc wektorową funkcją punktu w przestrzeni trójwymiarowej (zespoloną amplitudę).

Należy udowodnić jednoznaczność rozwiązania problemu brzegowego. Załóżmy, że wbrew naszym przypuszczeniom, istnieją dwa różne rozwiązania potencjału wektorowego A_1 i A_2 w całej przestrzeni ([5] rys. 1). Obie funkcje A_1 i A_2 spełniają identyczne postulaty sformułowanego problemu. Ich różnica

$$A_o = A_1 - A_2$$

spełnia w obszarze zajmowanym przez metal równania [5] (11), (14) i w obszarze odpowiadającym przestrzeni powietrznej (11), (20). Jeżeli udowodnimy, że funkcja A_o znika tożsamościowo w całej przestrzeni, to dowód jednoznaczności będzie zakończony. Wykorzystamy wektorowy niesymetryczny wzór Greena dla potencjału wektorowego A i sprzężonej wartości A^*, w przypadku obszaru V_m metalu i V_p powietrza (uwzględniając odpowiednio wzory [5] (14), (20) oraz znikanie całki po sferze K dla $R \to \infty$, ([5] rys. 2)). W przypadku powierzchni cewki zastosujemy powierzchnię K_c (identycznie, jak przy wyprowadzaniu wzoru [5] (27)). Całka powierzchniowa po K_c sprowadzi się do dwukrotnego całkowania po obu stronach powierzchni cewki S_c. Otrzymujemy dla obszaru V_m zajmowanego przez metal

$$\iiint\limits_{V_m} \left(|\nabla \times A|^2 - k^2|A|^2\right)dV = \iint\limits_{S} \left(A^* \times (\nabla \times A)_m\right) \cdot n_m dS \tag{1}$$

oraz obszaru V_p opisującego przestrzeń powietrzną

$$\iiint\limits_{V_p} |\nabla \times A|^2 \, dV = \iint\limits_{S} \left(A^* \times (\nabla \times A)_p\right) \cdot n_p dS +$$

$$+ \iint\limits_{S_c} \left[\left(A^* \times (\nabla \times A)'\right) \cdot n' + \left(A^* \times (\nabla \times A)''\right) \cdot n''\right] dS_c. \tag{2}$$

W związku z nieciągłością wektora rotacji potencjału na S i S_c, odpowiednie granice jednostronne wartości w obszarach V_m i V_p oznaczono indeksem "m" i "p", a po obu stronach cewki $'$ i $''$ (identycznie, jak w pracy [5] (25), (26)).
Prawe strony równań (1), (2) przekształcamy wg wzoru

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A). \tag{3}$$

Dodatkowo, w przypadku całki powierzchniowej, we wzorze (1) wykorzystujemy zależność [5] (33)

$$\iint\limits_{S} \left(A^* \times (\nabla \times A)_m\right) \cdot n_m dS = \iint\limits_{S} A^* \cdot \left((\nabla \times A)_m \times n_m\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{S} A^* \cdot \left(-\frac{\mu_m}{\mu_o} (\nabla \times A)_p \times n_p\right) dS = -\frac{\mu_m}{\mu_o} \iint\limits_{S} \left(A^* \times (\nabla \times A)_p\right) \cdot n_p dS.$$

Uwzględniając powyższe możemy do równania (2), zamiast całki powierzchniowej po S, wprowadzić całkę objętościową z równania (1). Dodatkowo wykorzystujemy w przypadku całki po S_c wzory (3) i [5] (26). Otrzymujemy

$$\iiint\limits_{V_p} |\nabla \times A|^2 \, dV - \iint\limits_{S_c} A^* \cdot \mu_o I dS = -\frac{\mu_o}{\mu_m} \iiint\limits_{V_m} \left(|\nabla \times A|^2 - k^2|A|^2\right) dV. \tag{4}$$

Gdyby rozwiązanie potencjału było wewnątrz obszarów V_m i V_p niejednoznaczne, to różnice dwu rozwiązań A_o też spełniałaby równość (4), z uwzględnieniem, że w całce po lewej stronie we wzorze (4) należałoby przyjąć $I = 0$ (funkcja A_o spełnia równość [5] (26) a równocześnie $I = 0$).

Ze wzoru (4) wynika również, że funkcja A_0 spełnia:

- w obszarze V_m równanie

$$A_0 = 0 \tag{5}$$

a więc i

$$\nabla \times A_0 = 0, \tag{6}$$

- w obszarze V_p

$$\nabla \times A_0 = 0. \tag{7}$$

W przeciwnym wypadku nie zachodziłaby równość części rzeczywistej i urojonej obu stron zależności (4). Powyższe oznacza, że wektor A_0 można w obszarze V_p przedstawić jako

$$A_0 = -\nabla\varphi_0. \tag{8}$$

Ze wzorów (5), [5] (22), (34) wynikają dla $\nabla\varphi$ następujące wartości graniczne:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{(dla punktów powierzchni S)} \tag{9}$$

oraz w nieskończoności

$$\nabla\varphi_0 \in O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \to \infty \ . \tag{10}$$

Jak wynika ze wzorów (8) i [5] (11) funkcja φ_0 jest harmoniczna. Z powyższego oraz z warunków (9) i (10) wynika dla zewnętrznego problemu Neumanna zerowanie się funkcji φ_0, a więc i A_0 (8), [1] s. 52. Uwzględniając (8), (9), (10) oraz (5) możemy stwierdzić, że jeżli rozwiązanie przedstawionego w pracy [5] problemu brzegowego istnieje, to jest jednoznaczne.

2. Sprawdzenie rozwiązań potencjału wektorowego [5] pod kątem spełniania postulatów problemu brzegowego [5]

Obecnie będziemy się starali wykazać, że uzyskane w pracy [5]wzory całkowe (17), (28) spełniają w przestrzeni żądane równania różniczkowe [5] (11), (14), (20). Pola gęstości M i N [5], (18), (19) (klasy C_0) są styczne do powierzchni S metalu (iloczyny wektorowe, w których jednym z czynników jest wektor n). Wartość modułu pól wektorowych M i N należy do klasy funkcji stałych przy zmianie współrzędnej φ (pole N ma kierunek współrzędnej φ a M prostopadły do φ).

Z twierdzeń podanych w pracach [3] s. 212, 214, [4] s. 319, 462 wynika, że przy obliczaniu pochodnych potencjałów [5] (17), (28) dla $X \neq Y$ można przenieść różniczkowanie pod znak całki. Przykładowo, uwzględniając zależność

$$\nabla_Y\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} = -\nabla_X\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}$$

potencjał od gęstości M [5] (18) w całce [5] (28) jest sumą wektorową pochodnych potencjału warstwy pojedynczej, będącego funkcją klasy C_∞ dla $X \neq Y$ ([3] s. 214). Obliczamy dywergencję potencjału [5] (17) (uwzględniając wzory (13), (14), (15))

$$\nabla_X \cdot A = \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \cdot (M \times \nabla_Y v)dS + \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \cdot (Nv)dS = 0, \qquad (11)$$

gdzie:

a) $v_{(X,Y)} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)}$,

b) $\nabla_X \cdot (M \times \nabla_Y v) = M \cdot (\nabla_X \times (\nabla_X v)) - \nabla_X v \cdot (\nabla_X \times M) = 0 \qquad (11a)$

c) $\frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \cdot (Nv)dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_S N \cdot (\nabla_Y v)dS =$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_S |N|(\nabla_Y v) \cdot t\, dS = \frac{-1}{4\pi}\int_L (|N| \int_0^{2\pi} (\nabla_Y v) \cdot tRd\varphi)dl = 0 \qquad (11b)$$

d) $N = |N|t$, $t(Y)$ - wektor jednostkowy o kierunku współrzędnej φ, L - krzywa powstała z przecięcia się półpłaszczyzny $\varphi = 0$ z powierzchnią S.

Przy obliczaniu całki iterowanej względem współrzędnej φ w wyrażeniu 11b) funkcja $|N|$ jako stała (wg przyjętych założeń) może być wyprowadzona przed znak całki. Korzystamy następnie z własności całki krzywoliniowej

$$\oint_C \nabla v \cdot t dt = 0,$$

gdzie:

C - krzywa zamknięta,

t - wektor jednostkowy styczny do C.

Na podstawie powyższego stwierdzamy, że całka [5] (17) spełnia równanie [5] (11) w obszarze Vm opisującym bryłę metalu, a [5] (28) spełnia [5] (11) w obszarze Vp odpowiadającym przestrzeni powietrznej. Przy obliczaniu dywergencji potencjału [5] (28) mamy, w porównaniu z [5] (17), dodatkową całkę po powierzchni cewki o identycznych własnościach, jak wyrażenie (11b). W zależności (11), jak i dalej, rozszerzamy funkcje M i N do określonych jako stałe względem punktu X. Od rozszerzenia tego nie zależy określenie funkcji A wzorami [5] (17), (28).

Przystępujemy do sprawdzenia czy wzór [5] (17) spełnia równanie [5] (14). Obliczamy rotację z potencjału [5] (17)

$$\nabla_X \times A = \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \times (M \times \nabla_Y v)dS + \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \times (Nv)dS \tag{12}$$

gdzie punkt X należy do obszaru metalu (zbiór spójny i otwarty), a $Y \in S$ Korzystając ze wzorów:

$$\nabla \times (A \times B) = A\,\nabla . B - B\,\nabla . A + (B.\nabla)A - (A.\nabla)B, \tag{13}$$

$$\nabla (A.B) = (A.\nabla)B + (B.\nabla)A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A), \tag{14}$$

$$\nabla \times (\varphi A) = \nabla\varphi \times A + \varphi\nabla \times A, \tag{15}$$

otrzymujemy

$$\nabla_X \times (M \times \nabla_Y v) = k^2 Mv - \nabla_X (M.(\nabla_Y v)), \tag{16}$$

$$\nabla_X \times (Nv) = \nabla_X v \times N. \tag{17}$$

Ponieważ interesuje nas $\nabla \times \nabla \times A$ wyrażenia [5] (17), należy obliczyć rotację funkcji podcałkowych (16), (17). Zachodzi (uwzględniając wzory (13), (14), (15)):

$$\nabla_X \times (\nabla_X \times (M \times \nabla_Y v)) = k^2 \nabla_X v \times M = k^2 M \times \nabla_Y v, \tag{18}$$

$$\nabla_X \times (\nabla_X \times (Nv)) = k^2 Nv + \nabla_X (N.(\nabla_X v)). \tag{19}$$

Zależności (16), (19) uzyskano, wykorzystując tożsamość (13) (w przypadku wzoru (19) skorzystano pośrednio ze wzoru (17)). Drugie człony sum (16), (19) są wynikiem dodatkowego przekształcenia wg wzoru (14)

$$-(M.\nabla_X)\nabla_X v = - \nabla_X (M.\nabla_X v).$$

Przy obliczaniu wyrażenia $\nabla \times \nabla \times A$ z potencjału [5] (17) wykorzystujemy wzory (18), (19)

$$\nabla_X \times \nabla_X \times A = k^2\left(\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S M \times \nabla_Y v dS + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S N v dS\right) +$$

$$+ \nabla_X\left(\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S N \cdot (\nabla_X v) dS\right). \tag{20}$$

Uwzględniając wzory (11b) i [5] (17), równość (20) przyjmuje postać

$$\nabla_X \times \nabla_X \times A = k^2 A + \nabla_X\left[\nabla_X \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S N v dS\right)\right] = k^2 A. \tag{21}$$

Wzór (21) jest identyczny z [5] (14), co wskazuje, że funkcja [5] (17) spełnia go tożsamościowo.

W wyrażeniu [5] (28) w porównaniu z [5] (17) współczynnik k^2 równy jest zeru. Operacja ∇x ∇x A z potencjału [5] (28) (uwzględniając wzory (13), (14), (15)) przyjmuje następującą postać

$$\nabla_X \times \nabla_X \times A = \nabla_X\left[\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S N \cdot \nabla_X\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_c} \mu_0 I \cdot \nabla_X\left(\frac{1}{r_c}\right) dS_c\right] = 0.$$

Funkcja w nawiasie kwadratowym posiada identyczne własności jak (11b), a więc równa się zeru. Wyrażenie [5] (28) spełnia w przestrzeni powietrznej równanie różniczkowe [5] (20).

3. Interpretacja fizyczna pól gęstości prądów M i N

Poszczególne całki występujące w równaniach [5] (17), (28) mają ciekawą interpretację fizyczną. Rozważmy powierzchnię Σ z pętlami prądów z określoną na niej powierzchniową gęstością momentu magnetycznego M_s [2]. Potencjał wektorowy od takiej powierzchni wyraża się wzorem ([2] s. 222)

$$A(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} \nabla_X\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \times M_s \, dS(Y). \tag{22}$$

Porównując wyrażenia [5] (17), (28) z (22) dochodzimy do wniosku, że pole gęstości warstwy pętli prądu M [5] (18) jest pojęciem analogicznym, jeżeli chodzi o wywoływane skutki, z powierzchniową gęstością momentu magnetycznego M_s

$$M = \mu_0 M_s. \tag{23}$$

Różnica polega jedynie na tym, że wektor M jest styczny do powierzchni S a wektor M_s we wzorze (22) prostopadły do Σ. Zależność (23) tłumaczy przyjętą wcześniej nazwę wektora gęstości warstwy pętli prądu M [5] (18). Gęstość warstwy pojedynczej prądu [5] (19), określona na powierzchni S metalu, jest równa

$$N = \mu I, \tag{24}$$

gdzie: μ - przenikalność magnetyczna środowiska, I - gęstość powierzchniowa prądu.

Nazwę gęstości warstwy pojedynczej prądu N przyjęto specjalnie w odróżnieniu od gęstości warstwy podwójnej prądu L, którą zdefiniujemy obecnie. Przekształćmy w tym celu całki w wyrażeniach [5] (17), (28) związane z wektorem M, wykorzystując tożsamość wektorową

$$A \times (B \times C) = (A.C)B - (A.B)C. \tag{25}$$

Otrzymujemy

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S (A \times n)\times(\nabla_Y v)dS = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial v}{\partial t} L_{\perp}dS + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} L_{\parallel}dS \tag{26}$$

gdzie:

$$v = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} \quad \text{w przypadku wzoru [5] (17),} \tag{27}$$

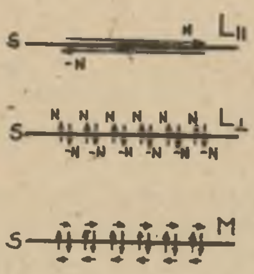
$$v = \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \quad \text{w przypadku wzoru [5] (28),} \tag{28}$$

$$L_{\perp} = |A|n, \tag{29}$$

$$L_{\parallel} = -A, \tag{30}$$

t - pole wektorów jednostkowych o kierunku potencjału A (w tym przypadku pole wersorów współrzędnej φ).

W prawej stronie wzoru (26) rozpoznajemy całki podobne do wyrażeń związanych z warstwą podwójną ładunku elektrycznego. W związku z powyższym funkcje wektorowe $L_{\perp}$ (29) i $L_{\parallel}$ (30), określone na S, otrzymują nazwę gęstości warstwy podwójnej prądu elektrycznego. Przypuszczamy, że całka (26) z funkcją $L_{\parallel}$ (30) przedstawia potencjał od warstwy podwójnej prądu, na której gęstości powierzchniowe prądów I (24) są wektorami równoległymi do powierzchni S - rys. 1, (stąd indeks "$\parallel$" we wzorze (30)). W związku z powyższym rozumowaniem, całka (26) z funkcją $L_{\perp}$ (29) przedstawia potencjał od szeregu warstw podwójnych prądu prostopadłych do powierzchni S, określonych na S - rys. 1 (stąd indeks "$\perp$" we wzorze (29)). Logicznym wnioskiem wynikającym ze wzoru (26) i rys. 1 jest fakt, że suma potencjałów warstwy prądów o gęstościach L_T (29) i $L_{||}$ (30) daje potencjał od gęstości warstwy pętli prądów M (23) (rys. 1).



Rys. 1

Aby powyższe nie było tylko przypuszczeniem, wyprowadzimy pewien związek łączący gęstość warstwy podwójnej prądu $L_{||}$ z rzeczywistymi gęstościami warstwy pojedynczej prądu N (24). Załóżmy, że mamy dwa elementarne, identyczne płaty powierzchni $dS_1(Y_1)$ i $dS_2(Y_2)$, równoległe i odległe od siebie o Δn. Odległość Δn oraz wymiary liniowe płata dS są dużo mniejsze od minimalnych promieni krzywizny powierzchni S_1 i S_2 w punktach obliczeń Y_1 i Y_2 (powierzchnie S_1 i S_2 są klasy C_2). W punkcie Y_1 na S_1 określam wektor gęstości warstwy pojedynczej prądu N (24), naprzeciwko zaś w Y_2 na S_2 gęstość z przeciwnym znakiem, tj. -N. Potencjał liczony w dość dużej odległości w porównaniu z Δn, oddzielnie od płatów dS_1 i dS_2, w przestrzeni powietrznej wynosi:

$$dA(X) = \frac{1}{4\pi} N \frac{dS_1(Y_1)}{r_1(X,Y_1)} - \frac{1}{4\pi} N \frac{dS_2(Y_2)}{r_2(X,Y_2)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} N(\Delta n) \frac{\Delta n}{\Delta n} \left(\frac{1}{r_1(X,Y_1)} - \frac{1}{r_2(X,Y_2)}\right) dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} N(\Delta n) \Delta n \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y), \tag{31}$$

gdzie:

n - wektor jednostkowy prostopadły do S_1, S_2 skierowany od dS_2 do dS_1,

$r(X,Y_1)$ - odległość punktów X i Y_1,

Y - punkt leżący na odcinku $Y_1 - Y_2$.

Zastosowano tutaj twierdzenie o wartości średniej pochodnej $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ w punkcie Y odcinka $Y_1 - Y_2$. Wyrażenie (31) jest analogiczne z drugą całką prawej strony równości (26), przy czym zakładamy istnienie następującej granicy

$$L_{||} = \lim_{\Delta n \to 0} N(\Delta n) \Delta n. \tag{32}$$

(gęstość warstwy pojedynczej prądu $N(\Delta n)$ jest funkcją odległości Δn).

Tak więc gęstość warstwy podwójnej prądu $L_{||}$ ma związek z dwiema warstwami rzeczywistych gęstości powierzchniowych prądu I (24) równoodległych od S, o przeciwnych kierunkach prądu - rys. 1.

LITERATURA

[1] BOCHENEK K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN Warszawa - Wrocław 1961.

[2] LITWIN R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT Warszawa 1973.

[3] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych.PWN Warszawa 1972.

[4] TICHONOW A.N., SAMARSKI A.A.: Równania fizyki matematycznej. PWN Warszawa 1963.

[5] WILCZYŃSKI E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Nauk. Polit. Śl. Elektryka z. 75, 1981.

Recenzent:
Doc. dr hab. Marek Brodzki

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ НА ГРАНИЦЕ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ И МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА, ДИСКУССИЯ О ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТАВЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕММЫ

Р е з ю м е

Статья является продолжением исследования проблемы, предпринятого в работе [5]. Произведено доказательство однозначности решения сформулированной в работе [5] краевой задачи. Статья содержит тоже физическую интерпретацию некоторого рода плотности токов, которые могут протекать на краю области.

THE ATMOSPHERE AND THE COND
CORRECTNESS OF THE ACCEPTED

THE VECTOR POTENTIAL ON THE BOUNDARY OF THE TWO MEDIA THE ATMOSPHERE AND THE CONDUCTOR; DISCUSSION OVER THE CORRECTNESS OF THE ACCEPTED BOUNDARY PROBLEM

S u m m a r y

The paper is a follow-up problem taken up in the reference [5]. It has been proved that there is an explicit solution of the boundary problem formulated in the reference [5]. The paper also present the physical interpretation of a certain type of current density which can flow on the boundary of the area.