ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Edward WILCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń
Przemysłu Hutniczego i Ceramicznego
Politechniki Śląskiej

ZAGADNIENIE ISTNIENIA ROZWIĄZANIA PROBLEMU BRZEGOWEGO ANALIZY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W PRZESTRZENI POWIETRZNEJ I OBJĘTOŚCI METALU

Streszczenie. Artykuł wiąże się z tematyką prac [4], [5]. W dalszym ciągu przeprowadza się dyskusję poprawności problemu brzegowego postawionego w pracy [4]. Zaistniała konieczność dokładnego sprecyzowania wszystkich nieregularności wzorów całkowych przedstawionych w pracy [4]. Uzyskany układ równań całkowych jest punktem wyjścia w zagadnieniu istnienia rozwiązania problemu brzegowego.

1. Równania potencjału wektorowego w przestrzeni

Potencjał wektorowy A obliczamy w przestrzeni [4] (rys. 1). Przypuszczamy, że uzyskane wzory całkowe [4] (17) (28) potencjału A pozwolą na rozwiązanie sformułowanego w pracy [4] problemu brzegowego. Ze wzorami tymi związane są powierzchniowe pola gęstości warstwy pojedynczej i podwójnej prądów M i N [4] (18), (19):

$$M = A \times n, \tag{1}$$

$$N = (\nabla \times A) \times n. \tag{2}$$

Ich interpretację fizyczną oraz związek z rzeczywistymi gęstościami prądów powierzchniowych opisano w pracy [5], punkt 3. Z warunku symetrii osiowo-obrotowej potencjału wektorowego A ([4], punkt 3), wynikają warunki symetrii dla pól gęstości M (1) i N (2), ([5], punkt 2).

W pracy [5] zdefiniowano również powierzchniowe pola gęstości warstwy podwójnej prądów $L_{\perp}$ i $L_{\parallel}$ ([5] (29), (30)):

$$L_{\perp} = |A|\, n\,, \tag{3}$$

$$L_{\parallel} = -A. \tag{4}$$

Wielkości (3), (4) związane są z gęstością prądu M (1), [5]. Zakładamy, że pola (3), (4) klasy C_0 należą do klasy funkcji stałych przy zmianie współrzędnej φ (pole $L_{\parallel}$ ma kierunek współrzędnej φ a $L_{\perp}$ kierunek pola wektorów normalnych do S). Przepiszemy wzory całkowe [4] (17), (28), wykorzystując zależność [5] (26) oraz zdefiniowane wielkości (2), (3), (4):

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\perp}(Y)\,\frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jrk}}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\parallel}(Y)\,\frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S N_m(Y)\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y), \tag{5}$$

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\perp}(Y)\,\frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) + \frac{1}{4\pi}\iint_S N_p(Y)\,\frac{dS(Y)}{r(X,Y)} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\parallel}(Y)\,\frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) + \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S_c} I(Y_c)\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y_c)} dS(Y_c). \tag{6}$$

Pole gęstości warstwy pojedynczej prądu N_m we wzorze (5) jest wartością graniczną rotacji potencjału (2) w punkcie $Y \in S$, przy zbliżaniu się punktu obliczeń Y do S z wnętrza obszaru metalu, natomiast N_p we wzorze (6) wartością graniczną przy zbliżaniu się punktu Y do S z przestrzeni powietrznej. Wzór (5) podaje rozkład potencjału wewnątrz metalu a (6) w przestrzeni powietrznej.

2. Regularność wzorów całkowych (5), (6) w przestrzeni

Funkcja [5] (28) jest tzw. rozwiązaniem podstawowym równania skalarnego Laplace'a [5] (27) rozwiązaniem podstawowym równania jednorodnego Helmholza. Dla punktów $X \neq Y$ rozwiązania podstawowe [5] (27), (28) są funkcjami analitycznymi. Zakładamy, że gęstości $L_{\perp}$, $L_{\parallel}$, N_m, N_p są klasy C_0. Tak więc funkcje podcałkowe we wzorach (5) i (6) są również funkcjami analitycznymi względem punktu $X \neq Y \in S$. Na podstawie powyższego oraz twierdzeń odnośnie klasy ciągłości potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej ([1] s. 212, 214) twierdzimy, że funkcje (5), (6) są klasy C_{∞} w zbiorze $R^3 - S + S_c$. Jeżeli chodzi o kwestię regularności rozwiązań (5), (6), przy zbliżaniu się punktu obliczeń X do powierzchni S, istnieją twierdzenia dotyczące zastosowań teorii potencjału przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych eliptycznych drugiego stopnia [3]. Całki we wzorach (5), (6) o gęstościach $1/4\pi N_m$, $1/4\pi N_p$, $1/4\pi\mu_o I$ mają charakter tzw. potencjału warstwy pojedynczej. Posiadają następujące własności [3], s. 319, 462:

- poza punktami powierzchni S potencjał warstwy pojedynczej spełnia w przestrzeni odpowiednie równanie jednorodne [4] (14) lub (20) (funkcja klasy C_∞),
- potencjał jest określony w punktach powierzchni S jako całka niewłaściwa bezwzględnie zbieżna i jest funkcją ciągłą w całej przestrzeni.

Całki we wzorach (5), (6) o gęstościach $1/4\pi L_{\parallel}$ mają charakter potencjałów warstwy podwójnej W(X) o następujących własnościach ([3], s. 316,461):

- poza punktami powierzchni S potencjał W(X) spełnia w przestrzeni odpowiednie równanie jednorodne [4] (14) lub (20) (funkcja klasy C_∞),
- całka jest zbieżna w punktach brzegu, jeżeli powierzchnia S jest klasy C_2,
- funkcja W(X) ma skok w punktach powierzchni S i zachodzą związki:

$$\left.\begin{aligned} W_w(X_o) &= W(X_o) + 2\pi\frac{L_{\parallel}(X_o)}{4\pi} \\ W_z(X_o) &= W(X_o) - 2\pi\frac{L_{\parallel}(X_o)}{4\pi} \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

gdzie:

$\frac{L_{\parallel}(X_o)}{4\pi}$ - gęstość warstwy podwójnej,

$W_w(X_o)$ - wartość graniczna potencjału przy dążeniu punktu X do X_o z wnętrza obszaru,

$W_z(X_o)$ - jak wyżej tylko z zewnątrz,

$$W(X_o) = \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\parallel}(Y)\,\frac{\partial v(X,Y)}{\partial n}\,dS(Y), \tag{8}$$

v(X,Y) - funkcje [5] (27) lub (28),

n - pole wektorów jednostkowych, normalnych, skierowanych do wnętrza obszaru,

S - brzeg obszaru ograniczonego, spełniającego dla pewnej naturalnej liczby k warunek (W_k) [1], s. 212,

$W_w, W_z, W, L_{\parallel}$ - funkcje wektorowe o współrzędnych skalarnych.

Pozostał problem regularności potencjałów z gęstością $L_{\perp}$ we wzorach (5), (6). Jak wspomniano powyżej są to funkcje ciągłe w przestrzeni poza brzegiem S obszaru. Należy określić potencjał (5), (6) od gęstości $L_{\perp}$ w punktach $X \in S$. Wektor $L_{\perp}$ określony na powierzchni S w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, posiada najogólniej trzy skalarne składowe. Potencjał $V(X)$ od jednej takiej składowej, np. λ, w przypadku wzoru (6) przyjmie postać (dla $X \neq Y$)

$$V(X) = \iint_S \lambda(Y) \frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{9}$$

Potencjał wektorowy od gęstości $L_{\perp}$ we wzorze (6) jest więc wektorem o współrzędnych typu (9), określonych względem trzech osi przyjętego układu współrzędnych. Nieregularności potencjału (9) od gęstości λ dotyczą w takim samym stopniu potencjału od gęstości $L_{\perp}$. Oprzemy się tutaj na wynikach pracy [2] odnośnie potencjału

$$U(X) = \iint_S \lambda(Y)\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{10}$$

Określając w pobliżu powierzchni S pole (10) oraz jego pochodne przestrzenne, zakładano, że S składa się ze skończonej ilości płatów analitycznych oraz $\lambda(Y)$ również jest funkcją analityczną [2]. Przy tych założeniach Prof. E. Martensen [2] udowodnił istnienie na S lokalnych współrzędnych (φ,σ), nazwanych w pracy [2] M-współrzędnymi. Postaramy się zdefiniować te współrzędne w dostatecznie małym otoczeniu punktu P_0, leżącego wewnątrz płata S. Jeżeli z punktu P_0 zatoczymy sferę S_σ o promieniu σ dostatecznie małym, to wspólna część $S \cap S_\sigma$ utworzy dla $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$ jednoparametrową rodzinę krzywych zamkniętych. Przyjmujemy na płaszczyźnie stycznej π_0 do S w P_0 pewien ustalony kierunek oraz wektor jednostkowy $\bar{e}$, tworzący z tym kierunkiem kąt φ. Wektor $\bar{e}$ wyznacza ortogonalną trajektorię rodziny krzywych $S \cap S_\sigma$. M-współrzędne (φ,σ) opisują jednoznacznie każdy punkt $P \in S$ otoczenia punktu P_0 dla $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$.

Tak jak w pracy [2] musimy założyć, że gęstość λ we wzorze (9) jest funkcją analityczną, a powierzchnia S metalu - powierzchnią analityczną. W punkcie $P_0 \in S$ (w granicach sfery S_σ) wprowadzamy M-współrzędne (φ,σ). Sfera S_σ wycina wokół punktu P_0 płatek S^σ powierzchni S. Uwzględniając powyższe można udowodnić, że:

- potencjał (9) od gęstości λ jest funkcją ciągłą dla $X \neq Y \in S$,
- przy zdążaniu punktu X do $P_0 \in S$ po prostej nachylonej pod pewnym kątem do wektora $n(P_0)$ normalnego do S, potencjał (9) w P_0 jest również funkcją ciągłą, niezależnie od kąta nachylenia tej prostej,
- wartość potencjału (9) w P_0 jest określona w sensie wartości głównej Cauchy'ego (pierwsza część wzoru (11) dla $\sigma \to 0$, $S^\sigma \to 0$).

Potencjał (9) dla punktu $P_0 \in S$ liczymy oddzielnie dla powierzchni $S-S^\sigma$ i S^σ. Otrzymujemy

$$V(P_o) = \iint_{S-S^{G}} \lambda(Y) \frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(P_o,Y)} dS(Y) -$$

$$-\pi t \cdot (\lambda g^{si}\Gamma^{j}_{ij}\,\bar{r}_{|s} + \nabla\lambda)G + O(G^2) \qquad (11)$$

Dla promienia $G \to 0$ płatek S^G oraz druga część wzoru (11) dążą do zera. Wielkości $g^{si}, \Gamma^{j}_{ij}, \bar{r}_{|s}$ oznaczają odpowiednio tensor odwrotny podstawowego tensora płata S, symbol Christoffela oraz pochodną cząstkową wektora wodzącego powierzchni S względem współrzędnych parametrycznych płata S. Szczegółowy dowód powyższego twierdzenia zostanie przedstawiony w innej publikacji. Biorąc pod uwagę wynik (11) możemy stwierdzić, że potencjał wektorowy (5), (6) od gęstości wektorowej $L_{\perp}(Y)$, będącej superpozycję skalarnych gęstości typu $\lambda(Y)$, należy uznać ciągłym dla punktów $X \in S$

3. Sprawdzenie rozwiązań potencjału wektorowego (5), (5) pod kątem spełniania postulatów problemu brzegowego

Obecnie wykażemy, że rozwiązania (5), (6) spełniają założone w problemie brzegowym ([4] punkt 3) warunki brzegowe ([4] (25), (26)) na powierzchni S_c cewki. Wektor jednostkowy n, normalny do S_c, we wzorach [4](25) (26) posiada zwrot w kierunku do powierzchni cewki (w wielkościach oznaczonych znaczkiem ' jak i ''). Jak wynika z rozważań punktu 2, potencjały (5), (6) są funkcjami ciągłymi w całej przestrzeni, z wyjątkiem punktów powierzchni S metalu, a więc spełniają w punktach $P_o \in S_c$ warunek [4] (25). Nieciągłość pola indukcji elektromagnetycznej określona warunkiem [4] (26) ma związek z potencjałem A we wzorze (6)

$$A_c(X) = \frac{\mu_o}{4\pi}\iint_{S_c} I(Y)\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \qquad (12)$$

Pozostałe całki wzoru (6) należą do klasy C_∞ dla $X \in S_c$ - punkt 2. Jak wynika z uwag w pracy [5], punkt 2, przy obliczaniu pochodnej z potencjału (12) możemy przenieść różniczkowanie pod znak całki (dla $X \neq Y \in S_c$). Obliczamy wyrażenie $(\nabla_X \times A_c) \times n(P_o)$ potencjału (12), korzystając ze wzorów [5] (15), (25):

$$\nabla_X \times A_c(X) = \frac{\mu_o}{4\pi}\iint_{S_c}\left[\nabla_X\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}\right] \times I(Y)\, dS(Y);$$

$$(\nabla_X \times A_c(X)) \times n(P_o) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{S_c} \left[\nabla_X\left(\frac{1}{r}\right) \times I(Y) \right] \times n(P_o)\, dS(Y) =$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi} \iint_{S_c} I(Y) \frac{\partial}{\partial n(P_o)} \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) = \frac{\partial A_c(X)}{\partial n(P_o)}. \qquad (13)$$

Pochodną (13) obliczamy w punkcie X nie leżącym na S_c, w dostatecznie małym otoczeniu punktu $P_o \in S_c$, w którym określono stałe pole wektorów normalnych, jednostkowych $n(P_o)$. Własności pochodnej w kierunku normalnym do S_c (13) potencjału (12), określa twierdzenie podane w pracy [1] s. 220. Dotyczy ono potencjału warstwy pojedynczej V(X)

$$V(X) = \iint_{S_c} \mu(Y)\, E(X-Y)\, dS_c(Y) =$$

$$= \iint_{S_c} \left[-\mu_o I(Y) \right] \left[-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \right] dS_c(Y) = A_c(X) \qquad (12a)$$

z gęstością powierzchniową $\mu = -\mu_o\, I(Y)$, która w naszym przypadku jest funkcją wektorową. Jeszcze raz podkreślamy, że pole $n(P_o)$ we wzorze (13) definiujemy identycznie, jak w warunkach [4] (25), (26), tj. po obu stronach cewki wektor $n(P_o)$ zwrócony jest w kierunku powierzchni S_c (inaczej niż w twierdzeniu podanym w pracy [1], s. 220, gdzie wektor n(y) ma taki sam zwrot po obu stronach powierzchni). Zależność [4] (26) przyjmie postać (uwzględniając wzór (13) oraz twierdzenie [1], s. 220)

$$\left(\frac{\partial A_c}{\partial n(P)}\right)' + \left(\frac{\partial A_c}{\partial n(P)}\right)'' = \left(\frac{\partial V}{\partial n^{(w)}}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial n^{(z)}}\right) = -\mu = \mu_o I(Y) \qquad (14)$$

Przewidywane rozwiązania (5), (6) potencjału wektorowego w przestrzeni spełniają założone w problemie brzegowym ([4] punkt 3) warunki [4] (25), (26) na powierzchni cewki.

4. Układ równań całkowych na powierzchni rozdziału środowisk metalu i powietrza

W celu uzyskania pełnego rozwiązania problemu przedstawionego w pracy [4] punkt 3, należy znaleźć sposób obliczenia gęstości (1), (2) we wzorach [4] (17), (28). Logiczne wydaje się zapisanie równań (5), (6) dla punktów $X \in S$, wykorzystując rozważania punktu 2, traktujące o nieciągłościach całek (5), (6) na S. Uzyskujemy w ten sposób układ dwu równań całkowych o dwu niewiadomych funkcjach A i $(\nabla \times A) \times n$, określonych na powierzchni S metalu. Potencjał wektorowy A jest funkcją ciągłą w całej przestrzeni łącznie z powierzchnią cewki (brak rzeczywistych gęstości warstwy podwójnej prądu $L_{||}$ [5] (32)). Z kolei we wzorach (5), (6) całki z gęstością $L_{||}$ (4) mają nieciągłość postaci (7) przy zbliżaniu się punktu X do powierzchni S z wnętrza danego obszaru. Potencjał wektorowy (5), (6) zapisany dla punktów $P \in S$, będzie różnił się w porównaniu ze wzorami (5), (6) jedynie wartością $1/2\ L_{||}(Y)$, dodaną po prawej stronie równań ze znakiem minus (7). Wykorzystując wzory (2), (3), (4), (5), (6), (7) otrzymujemy

$$A(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_S |A(Y)|\, n_{(Y)} \frac{\partial}{\partial\tau_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_S A(Y) \frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_S \Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)m} \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y), \tag{15}$$

$$A(P) = \frac{1}{2\pi}\iint_S |A(Y)|\, n_{(Y)} \frac{\partial}{\partial\tau_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_S |A(Y)| \frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) + \frac{\mu_0}{2\pi}\iint_{S_c} I(Y_c)\left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y_c)} dS(Y_c) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint_S \Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)p} \left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y), \tag{16}$$

gdzie punkt $P \in S$.

Pole wektorów n we wzorze (15) skierowane jest na zewnątrz obszaru metalu, a we wzorze (16) ma zwrot przeciwny. Ze względu na różne wartości przenikalności magnetycznej metalu μ_m i powietrza μ_0 uzyskujemy dla każdego punktu $P \in S$ dodatkowe równanie

$$\frac{1}{\mu_0}\Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)p} - \frac{1}{\mu_m}\Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)m} = 0. \tag{17}$$

Obecnie zagadnienie istnienia rozwiązania problemu brzegowego przedstawionego w pracy [4], punkt 3, zostało sprowadzone do rozwiązania układu równań (15), (16), (17). Zagadnienie to będzie rozpatrywane w kolejnej publikacji.

[1] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych.PWN Warszawa 1972.

[2] Metody geometryczne w fizyce i technice. Praca zbiorowa. WNT, Warszawa 1967.

[3] TICHONOW A.N., SAMARSKI A.A.: Równania fizyki matematycznej. PWN,Warszawa 1963.

[4] WILCZYŃSKI E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu." ZN Pol. Śl., Elektryka z. 75, (w druku).

[5] E. WILCZYŃSKI: Potencjał wektorowy na granicy środowisk powietrza i przewodnika metalowego, dyskusja poprawności postawionego problemu brzegowego. ZN Pol. Sl. Elektryka z. 75, (w druku).

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent

Doc. dr hab. Marek Brodzki

ВОПРОС РЕАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВОЗДУШНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОБЛАСТИ МЕТАЛЛА

Р е з ю м е

Статья связана с тематикой работ [4], [5]. Продолжается дискуссия относительно правильности краевой задачи, поставленной в работе [4]. Возникла необходимость точного определения всех нерегулярностей интегральных формул, представленных в работе [4]. Полученная система интегральных уравнений является исходной точкой в вопросе реальности решения краевой задачи.

THE PROBLEM OF SOLVING THE BOUNDARY ANALYSIS OF THE ELECTRO-MAGNETIC FIELD IN THE ATMOSPHERE AND METAL VOLUME

S u m m a r y

The paper is linked with the subject of papers [4], [5]. Discussion is centered on the correctness of the boundary problem in reference [4]. A necessity of making all the irregularities of integral formulas in the reference [4] more pricise came about. The system obtained for integral equations is the starting point in the question of the existance of possibility to solve the boundary problem.