ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Zygmunt PIATEK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

STRATY MOCY JOULE'A W PRZEWODZIE WALCOWYM POCHODZĄCE OD PRĄDÓW WIROWYCH INDUKOWANYCH PRZEZ PRĄD PŁYNĄCY W PRZEWODZIE RÓWNOLEGŁYM

Streszczenie. Wychodząc z określonej wielkości wektora gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym oraz z prawa Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej, określa się wartość strat cieplnych w rozpatrywanym przewodzie.

W rozwiązaniu podano wzór na wartość strat mocy Joul'a w przewodzie walcowym, z uwzględnieniem wymiarów poprzecznych oraz odległości jego osi od przewodu równoległego. Odnosząc wartość tych strat do pewnej stałej bazy wprowadzono pojęcie współczynnika zbliżenia i podano jego podstawowe zależności.

1. Wstęp

Rozpatrywany układ, przedstawiony na rys. 1, składa się z dwóch nieskończenie długich, walcowych przewodów (faza A i faza B). Przez przewód fazy B płynie w kierunku osi z walcowego układu współrzędnych prąd sinusoidalny $i_B(t)$. Zakłada się przy tym, że walcowy przewód fazy B jest przewodem linearnym. Przemienne pole magnetyczne tego prądu indukuje w przewodzie fazy A prąd wirowy o gęstości J^I_{AB}, określony [5] wzorem

$$J^I_{AB} = 1_z J^I_{ABz} = 1_z \frac{I_B\sqrt{-j}\,m}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{J_n(\sqrt{-j}\,mr)}{J_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)} \cos n\Theta =$$

$$= 1_z \frac{|I_B|\,m}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B\right]\right\} \cos n\Theta, \qquad (1)$$

gdzie:

n - liczba naturalna,

$I_B = |I_B| \exp(j\alpha_B)$ - zespolona wartość skuteczna prądu $i_B(t)$,

$\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr) = M_n(mR)\exp\left[j\beta_n(mr)\right]$ - funkcja Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n,

$\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mR) = M_{n-1}(mR)\exp\left[j\beta_{n-1}(mR)\right]$ - funkcja Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n-1,

R - promień przewodu walcowego,

d - odległość osi rozpatrywanego przewodu walcowego fazy A od osi przewodu linearnego fazy B,

Θ, r - współrzędne walcowego układu współrzędnych,

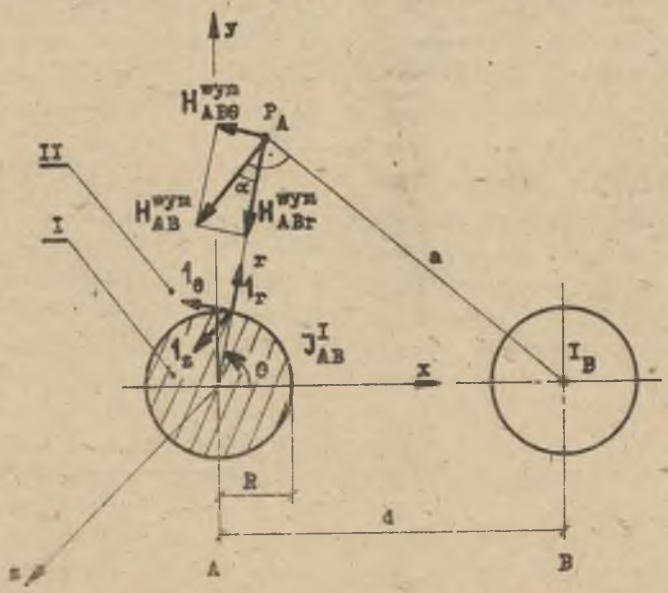
$m = \sqrt{\omega \mu^I \gamma}$,

$\omega = 2\pi f$ - pulsacja prądu $i_B(t)$,

μ^I - przenikalność magnetyczna bezwzględna rozpatrywanego przewodu,

γ - konduktywność przewodu.

Prąd indukowany w przewodzie fazy A, określony wzorem (1), spowoduje w przewodzie wydzielanie się ciepła. Określenie wartości tych strat cieplnych jest celem niniejszej pracy.



Rys. 1. Walcowy przewód fazy A w polu magnetycznym prądu fazy B

2. Moc Joule'a w przewodzie walcowym pochodząca od prądu indukowanego przez pole magnetyczne prądu płynącego w przewodzie równoległym

Moc strat cieplnych w objętości V przewodu określa się z prawa Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej

$$P = \frac{1}{\gamma} \int_V \left| J^I_{ABz} \right|^2 dV. \tag{2}$$

Po przedstawieniu wzoru (2) we współrzędnych walcowych [1], otrzymuje się relację

$$P = \frac{1}{\gamma} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R \left| J^I_{ABz} \right|^2 r dl dr d\Theta, \tag{3}$$

gdzie l - długość rozpatrywanego przewodu.

W celu uniezależnienia strat mocy od długości przewodu walcowego wprowadza się pojęcie strat określonych na jednostkę długości wg wzoru

$$P_l = \frac{P}{l} = \frac{1}{\gamma} \int_S \left| J^I_{ABz} \right|^2 dS = \frac{1}{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left| J^I_{ABz} \right|^2 r dr d\Theta. \tag{4}$$

Kwadrat modułu gęstości prądu określa się przez przemnożenie wartości skutecznej zespolonej gęstości prądu przez wartość zespoloną do niej sprzężoną

$$\left| J^I_{ABz} \right|^2 = J^I_{ABz} J^{I*}_{ABz} = \left[\frac{|I_B| m}{\pi R} \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B\right] \right\} \cos n\Theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \cdot$$

$$\cdot \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \exp\left\{ -j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B\right] \right\} \cos n\Theta. \tag{5}$$

Iloczyn (5) dwóch szeregów zbieżnych jest [1] szeregiem, którego wyrazy są iloczynami $A_l A^*_k$, gdzie l oraz k są niezależnymi ciągami liczb naturalnych. Iloczyny te (wyrazy szeregu) można przedstawić w postaci składników zależnych od zmiennej r oraz od zmiennej Θ

$$A_l A^*_k = a_l(r) a^*_k(r) \cos l\Theta \cos k\Theta. \tag{6}$$

Wykonując na wzorze (6) całkowanie, po zmiennej Θ od o do 2π, wyrazu po wyrazie tak utworzonego szeregu otrzymuje się zerową wartość tej całki dla $l \neq k$, gdyż [1]

$$\int_0^{2\pi} \cos l\Theta \cos k\Theta d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{dla } l \neq k \\ \pi & \text{dla } l = k = n, \end{cases} \tag{7}$$

zaś dla $l = k$ z całkowania wyrażenia (6) otrzymuje się

$$a_n(r)a_n^*(r)\pi = |a_n(r)|^2\pi. \tag{8}$$

Wobec powyższego wzór (4) przyjmuje postać

$$P_{AB} = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{|I_B|m}{\pi R}\right]^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^{2n} \frac{1}{M_{n-1}^2(mR)} \int_0^R M_n^2(mr)rdr. \tag{9}$$

Kwadrat modułu funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n-tego można przedstawić [4] w postaci

$$M_n^2(mr) = \left[\mathrm{ber}_n(mr) + j\mathrm{bei}_n(mr)\right]\left[\mathrm{ber}_n(mr) - j\mathrm{bei}_n(mr)\right] =$$

$$= \mathcal{J}_n(j^{\frac{3}{2}} mr)\mathcal{J}_n(j^{-\frac{3}{2}} mr). \tag{10}$$

Kładąc następnie za

$$mr = z \tag{11}$$

całkę ze wzoru (9) przedstawia się w postaci

$$\int_0^R M_n^2(mr)rdr = \int_0^{mR} \frac{z}{m^2} \mathcal{J}_n(j^{\frac{3}{2}} z)\mathcal{J}_n(j^{-\frac{3}{2}} z)dz. \tag{12}$$

Wykorzystując [4] wzory:

$$\int_0^z \mathcal{J}_n(kz)\mathcal{J}_n(lz)zdz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left[l\mathcal{J}_n(kz)\mathcal{J}_n'(lz) - k\mathcal{J}_n(lz)\mathcal{J}_n'(kz)\right], \tag{13}$$

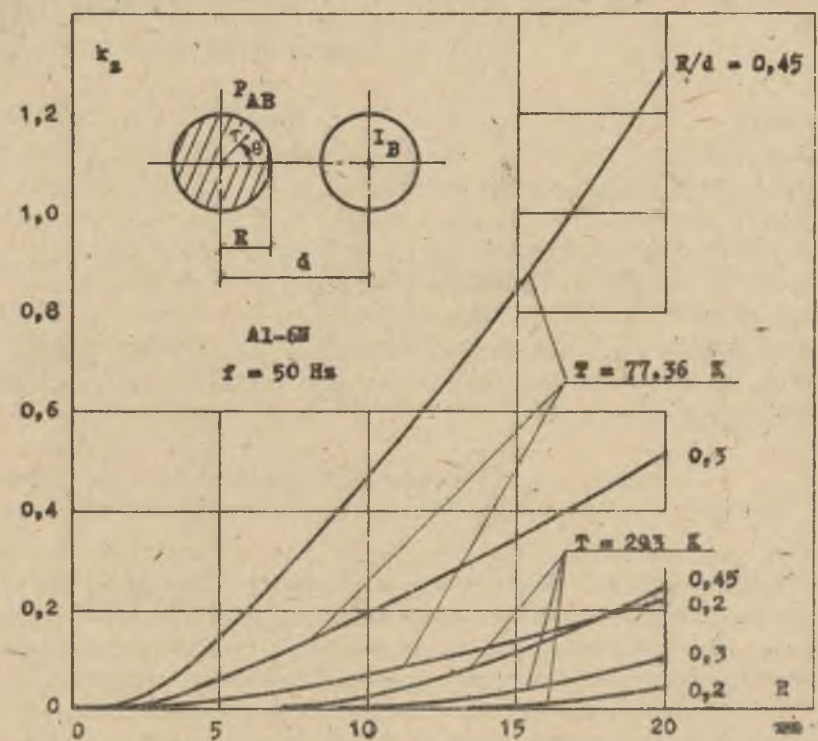
$$\mathcal{J}_n'(kz) = -\frac{n}{kz}\mathcal{J}_n(kz) + \mathcal{J}_{n-1}(kz) \tag{14}$$

wylicza się całkę (12)

$$\int_0^R M_n^2(mr)rdr = -\frac{R}{m} M_n(mR)M_{n-1}(mR)\cos\left[\beta_n(mR) - \beta_{n-1}(mR) + 135^0\right]. \tag{15}$$

Wstawiając wzór (15) do (9) otrzymuje się relację określającą straty mocy Joule'a w przewodzie walcowym (na jednostkę długości) wywołane prądem indukowanym w nim przez pole magnetyczne prądu płynącego w przewodzie równoległym

$$P_{AB} = -\frac{|I_B|^2 m}{\pi R \gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^{2n}\frac{M_n(mR)}{M_{n-1}(mR)}\cos\left[\beta_n(mR) - \beta_{n-1}(mR) + 135^0\right]. \tag{16}$$



Rys. 2. Zależność strat mocy Joule a, wywołanych prądem indukowanym w walcowym przewodzie aluminiowym przez pole magnetyczne prądu (o f = 50 Hz) płynącego w przewodzie równoległym, od promienia przekroju poprzecznego przewodu, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu

Na rys. 2. przedstawiono zależność strat cieplnych określonych wzorem (16) od promienia przekroju poprzecznego przewodów aluminiowych 6N w temperaturze pokojowej oraz w temperaturze ciekłego azotu. Straty te przedstawiono w jednostkach względnych w stosunku do bazy wyrażonej wzorem

$$P_o = \frac{|I_B|^2}{\pi R^2 \gamma}. \tag{17}$$

Wtedy zależność tę - nazywaną współczynnikiem zbliżenia - określa następujący wzór

$$k_z = \frac{P_{AB}}{P_o} = - mR \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^{2n} \frac{M_n(mR)}{M_{n-1}(mR)} \cos\left[\beta_n(mR) - \beta_{n-1}(mR) + 135^o\right] \tag{18}$$

Współczynnik ten zależny jest od: wartości stosunku $\frac{R}{d}$, promienia R przekroju poprzecznego przewodu, konduktywności γ oraz częstotliwości prądu $i_B(t)$.

3. Zakończenie

Dla $n = 1$ wzór (16) przyjmuje postać

$$P_{AB} = - \frac{|I_B|^2 \, mR}{\pi d^2 \gamma} \cdot \frac{M_1(mR)}{M_o(mR)} \cos\left[\beta_1(mR) - \beta_o(mR) + 135^o\right]. \tag{19}$$

Wzór (19) pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Kadena w pracy [2] dla przewodu prętowego umieszczonego w równomiernym polu magnetycznym określonym relacją

$$H_{AB}^{wym} = \frac{I_B}{2\pi d}. \tag{20}$$

Otrzymane rozwiązanie, w postaci wzoru (16), na wielkość mocy strat cieplnych w przewodzie walcowym wywołanych prądem indukowanym przez pole magnetyczna prądu płynącego w przewodzie równoległym jest zatem rozwiązaniem ogólnym, gdyż nie wymaga stosowania założenia upraszczającego dotyczącego zewnętrznego pola magnetycznego oddziaływającego na przewód.

Wzór (16) stanowić może podstawę w ocenie wpływu zjawiska zbliżania na wartość strat cieplnych w przewodach walcowych umieszczonych w polu magnetycznym prądów płynących w linearnych przewodach równoległych.

LITERATURA

[1] FICHTENHOLZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1972.

[2] KADEN G.: Elektromagnitnyje ekrany w wysokoczastotnoj tiechnikie i miechanikie elektroswjazi. Gosenergoizdat, Moskwa 1957.

[3] KUPALAN S.D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.

[4] Mc LACHLAN N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.

[5] PIĄTEK Z.: Straty mocy Joule a w trójfazowych, płaskich torach prądowych chłodzonych ciekłym azotem przy symetrii i asymetrii prądowej. Praca doktorska. Pol. Śl. 1980.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent
Doc. dr Aleksander Szendzielorz

ПОТЕРИ МОЩНОСТИ ДЖОУЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДЕ, ВЫЗВАННЫЕ ВИХРЕВЫМИ НАВЕДЕННЫМИ ТОКАМИ ЧЕРЕЗ ТОК, ПРОТЕКАЮЩИЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОВОДЕ

Р е з ю м е

Исходя из определенной величины вектора плотности наведенного тока в цилиндрическом проводе через синусоидальный ток, протекающий в параллельном проводе, а также закона Джоуля-Ленца в дифференциальном виде, определяется значение теплопотерь в рассматриваемом проводе. В решении представлена формула значения Джоулевых потерь в цилиндрическом проводе с учетом поперечных размеров провода, а также расстояния его оси от параллельного провода. Относя значение этих потерь к надежной постоянной базе, введено понятие коэффициента эффекта близости и даны его основные зависимости.

THE LOSSES OF JOULE S POWER IN A CYLINDER CONDUCTOR CAUSED BY EDDY CURRENTS INDUCED BY THE CURRENT OF THE PARALLEL CONDUCTOR

S u m m a r y

The value of heat loses in the conductor was determined on the basis of a given quantity of vector of density of the current induced by the sinusoidal current of the paralell conductor, in the cylinder conductor and on the basis of Joule-Lenz law, in the differential form.

The formula for computation of losses of Joule s power in the cylinder conductor was given. The transverse dimensions and the distances between the conductor axis and the axis of parallel conductor were taken into account. The notion of coefficient of nearness was introduced and its fundamental dependencies were given.