ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

ANALIZA OBWODÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH Z SYMETRYCZNIE POŁOŻONYMI UZWOJENIAMI

Streszczenie. Wykazano, że każdej parze symetrycznie położonych uzwojeń obwodu elektromagnetycznego o nienasyconym rdzeniu magnetycznym odpowiada wektor własny macierzy indukcyjności głównych, niezależny od wartości jej elementów.

Wprowadzono układ współrzędnych o osiach zgodnych z tak wyznaczonymi wektorami własnymi, w którym część równań różniczkowych stanu nieustalonego obwodu, równa liczbie par uzwojeń symetrycznych, staje się autonomiczna.

1. Symetryczna para uzwojeń obwodu elektromagnetycznego

Rozważmy liniowy obwód elektromagnetyczny o n uzwojeniach, którego stan magnetyczny, związany ze strumieniem głównym, można analizować w oparciu o I i II prawo Kirchoffa dla obwodów magnetycznych. Uzwojenia obwodu elektromagnetycznego: k-te i l-te nazywać będziemy uzwojeniami położonymi symetrycznie lub - krótko-symetryczną parą uzwojeń, jeżeli ich współczynniki indukcyjności głównych spełniają następujące równości:

$$M_{kk} = M_{ll} \tag{1}$$

oraz

$$M_{ik} = M_{il} \tag{2}$$

dla i = 1,2,...k-1,k+1,...l-1,l+1,...n.

Zgodnie z zasadą wzajemności zachodzi

$$M_{ki} = M_{li} \tag{3}$$

dla i = 1,2,...k-1,k+1,...l-1,l+1,...n.

W interpretacji fizykalnej równości (2) oznaczają, że prąd i(t) płynący w k-tym uzwojeniu wywołuje takie same strumienie skojarzone z wszystkimi uzwojeniami, nie należącymi do symetrycznej pary uzwojeń, jak prąd i(t), płynący w uzwojeniu l-tym. Z równości (3) wynika zaś, że strumienie skojarzone z uzwojeniami: k-tym i l-tym, a wywołane prądami, płynącymi w uzwojeniach: 1,2,...,k-1,k+1,...l-1,l+1,... n-tym - są sobie równe. Reasumując, symetryczną parę uzwojeń tworzą każde dwa uzwojenia, znajdujące się w identycznej sytuacji elektromagnetycznej względem wszystkich pozostałych uzwojeń obwodu elektromagnetycznego.

2. Analiza obwodu elektromagnetycznego z jedną symetryczną parą uzwojeń

Macierz indukcyjności głównych obwodu elektromagnetycznego, którego k-te i l-te uzwojenie stanowi symetryczną parę uzwojeń, ma postać:

$$[M] = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1k} & \dots & M_{1k} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2k} & \dots & M_{2k} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{k1} & M_{k2} & \dots & M_{kk} & \dots & M_{kl} & \dots & M_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{k1} & M_{k2} & \dots & M_{kl} & \dots & M_{kk} & \dots & M_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nk} & \dots & M_{nk} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ -\ \text{k-ty wiersz} \\ \\ \\ -\ \text{l-ty wiersz} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{k-ta} & \text{l-ta} \\ \text{kolumna} & \text{kolumna} \end{array} & \end{array} \tag{4}$$

Pomiędzy elementami k-tego i l-tego wiersza oraz k-tej i l-tej kolumny macierzy zachodzą równości (1) (2) (3). Łatwo wykazać, że każdej symetrycznej parze uzwojeń odpowiada wektor własny macierzy indukcyjności głównych $[M]$, niezależny od wartości jej elementów. Jeżeli symetryczną parę tworzą uzwojenia: k-te i l-te, wówczas unormowany wektor własny $[P_{kl}]$ ma postać:

$$\Big[0 \; \dots \; 0 \; \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\substack{\text{k-ty} \\ \text{element}}} \; 0 \; \dots \; 0 \; \underbrace{-\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\substack{\text{l-ty} \\ \text{element}}} \; 0 \; \dots \; 0\Big]^T,$$

zaś jego wartość własna równa się $(M_{kk} - M_{kl})$

$$[M][P_{kl}] = (M_{kk} - M_{kl})\,[P_{kl}]. \tag{5}$$

Wektor własny $[P_{kl}]$ jest obrócony o kąt $\frac{\pi}{4}$ w lewo w stosunku do osi k w płaszczyźnie, wyznaczonej przez osie: k i l naturalnego układu współrzędnych. Wektorem ortogonalnym do niego i leżącym w tej samej płaszczyźnie jest wektor

$$\Big[0 \;\dots\; 0 \;\underset{\substack{\text{k-ty}\\ \text{element}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\; 0 \;\dots\; 0 \;\underset{\substack{\text{l-ty}\\ \text{element}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\; 0 \;\dots\; 0\Big]^T$$

Wprowadzając układ współrzędnych o osiach k-tej i l-tej, wyznaczonych przez wersory: $\left[0 \dots 0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \dots 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \dots 0\right]^T$ i $\left[0 \dots 0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \dots \dots 0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \dots 0\right]^T$ oraz - pozostałych, pokrywających się z osiami naturalnego układu współrzędnych, otrzymujemy nowy ortogonalny układ współrzędnych, którego oś k ma kierunek zgodny z kierunkiem własnym przekształcenia, opisanego macierzą [M]. Macierz transformacji, prowadzącej z naturalnego - do nowego układu współrzędnych oznaczać będziemy przez $\left[N_l\right]$ przy czym indeks dolny wskazuje na oś, której wersor jest wektorem własnym macierzy [M]. Ortogonalne macierze transformacji $\left[N_k\right]$ i transformacji odwrotnej $\left[N_k\right]^{-1}$ mają postać:

$$\left[N_k\right] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \text{k-ta kolumna} \quad \text{l-ta kolumna} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{- k-ty wiersz} \\ \\ \\ \\ \text{- l-ty wiersz} \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{6}$$

$$\left[N_k\right]^{-1} = \left[N_k\right]^T \tag{7}$$

Macierz indukcyjności głównych, określona w nowym układzie współrzędnych iloczynem $\left[N_k\right]\left[M\right]\left[N_k\right]^{-1}$ upraszcza się, a mianowicie elementy k-tego wiersza i k-tej kolumny zerują się z wyjątkiem elementu, leżącego na przekątnej głównej macierzy, który przyjmuje wartość własną $(M_{kk} - M_{kl})$. Taka postać macierzy indukcyjności głównych jest rezultatem diagonalizującego działania wektora własnego, wyznaczającego oś k nowego układu współrzędnych.

Stosowanie przedstawionej transformacji przy analizie obwodów elektromagnetycznych o symetrycznie położonych uzwojeniach jest szczególnie korzystne wówczas, gdy prócz warunków (1) (2) (3) spełnione są dodatkowo równości:

$$
\begin{aligned}
R_k &= R_l,\\
L_{sk} &= L_{sl},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

gdzie:

R_k, R_l – rezystancja k-tego i l-tego uzwojenia,

L_{sk}, L_{sl} – indukcyjności rozproszenia k-tego i l-tego uzwojenia.

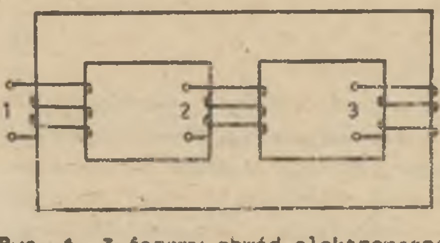
W takim przypadku układ równań różniczkowych stanu nieustalonego obwodu elektromagnetycznego ulega częściowemu rozsprzężeniu, a mianowicie równanie k-te staje się autonomiczne. Formalne wprowadzenie nowego układu współrzędnych za pomocą macierzy transformacji $[N_k]$ sprowadza się w rzeczywistości do prostych działań algebraicznych: zsumowania i odjęcia stronami równań różniczkowych k-tego i l-tego, a następnie – podzielenia ich przez $\sqrt{2}$. Innymi słowy – wynikiem transformacji jest wprowadzenie w miejsce naturalnych współrzędnych: $w_1, w_2 \ldots w_n$ (gdzie $w_i = u_i, i_i, \Psi_i$) nowych współrzędnych:

$$
w_1, w_2 \ldots w_{k-1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k - w_l),\ w_{k+1}, \ldots w_{l-1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + w_l),\ w_{l+1}, \ldots w_n.
$$

W dalszym ciągu będziemy oznaczać nową k-tą współrzędną: $\frac{1}{\sqrt{2}}(w_k - w_l)$ przez $\bar{w}_k$, zaś nową l-tą współrzędną: $\frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + w_l)$ – przez $\bar{w}_l$.

Istotne znaczenie fizykalne ma fakt, że nowy układ współrzędnych – podobnie jak naturalny – jest ortonormalny. Na skutek tego, moc chwilowa obwodu elektromagnetycznego, wyrażająca się iloczynem skalarnym wektorów prądu i napięcia, jest niezmiennikiem transformacji

$$
\begin{aligned}
p(t) &= u_1 i_1 + \ldots + u_k i_k + \ldots + u_l i_l + \ldots + u_n i_n =\\
&= u_1 i_1 + \ldots + \bar{u}_k \bar{i}_k + \ldots + \bar{u}_l \bar{i}_l + \ldots + u_n i_n.
\end{aligned}
\tag{9}
$$



Rys. 1. 3-fazowy obwód elektromagnetyczny z jedną symetryczną parą uzwojeń

Zastosowanie omówionej transformacji do analizy obwodów prześledźmy na przykładzie 3-fazowego obwodu elektromagnetycznego o niesymetrycznym rdzeniu, przedstawionym na rys. 1. Uzwojenia 1 i 3 stanowią parę symetryczną i spełniają warunki (8). Stan nieustalony obwodu elektromagnetycznego opisany jest układem równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & & \\ & R & \\ & & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & & \\ & L_s & \\ & & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{12} \\ M_{13} & M_{12} & M_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Wektor własny macierzy indukcyjności głównych $[M]$ ma postać:

$$[P_{13}] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T.$$

Transformując układ równań (10) za pomocą macierzy:

$$[N_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$\bar{u}_1 = R\bar{I}_1 + \frac{d}{dt} L_s \bar{I}_1 + \frac{d}{dt} (M_{11} - M_{13}) \bar{I}_1, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_{22} & M_{12} \\ 2M_{12} & M_{11}+M_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie równań różniczkowych (12), stransformowanych wg Laplace'a przy założeniu zerowych warunków początkowych, ma postać:

$$\bar{I}_1(p) = \frac{\bar{U}_1(p)}{R + p(L_s + M_{11} - M_{13})},$$

$$I_2(p) = \frac{\bar{U}_3(p)\, z_{23}(p) - \bar{U}_2(p)\, z_{33}(p)}{z_{23}(p) z_{32}(p) - z_{22}(p) z_{33}(p)},$$

$$\bar{I}_3(p) = \frac{U_2(p)\, z_{32}(p) - \bar{U}_3(p)\, z_{22}(p)}{z_{23}(p) z_{32}(p) - z_{22}(p) z_{33}(p)},$$

gdzie:

$z_{22}(p) = R + p(L_s + M_{22})$, $\quad z_{32}(p) = R + p(L_s + 2M_{12})$,

$z_{23}(p) = pM_{12}$, $\quad z_{33}(p) = p(M_{11} + M_{13})$.

Rzeczywiste wartości prądów $I_1(p)$ i $I_3(p)$ znajdujemy na drodze transformacji odwrotnej za pomocą macierzy $[N_1]^T$:

$$I_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{I}_1(p) + \bar{I}_3(p)\right],$$

$$I_3(p) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{I}_1(p) - \bar{I}_3(p)\right].$$

3. Analiza obwodu elektromagnetycznego o większej liczbie symetrycznych par uzwojeń

Jeżeli obwód magnetyczny zawiera więcej niż jedną parę uzwojeń położonych symetrycznie, to w analogiczny sposób można wyznaczyć wektory własne odpowiadające pozostałym parom. Niechaj przykładowo parę symetryczną - prócz uzwojeń k-tego i l-tego - tworzą uzwojenia i-te i j-te. Załóżmy, że $i < j < k < l$. Wprowadzając w miejsce naturalnych współrzędnych: $w_1 \ldots w_i \ldots w_j \ldots w_k \ldots w_l \ldots w_n$ nowe współrzędne: $w_1 \ldots \bar{w}_i \ldots \bar{w}_j \ldots \bar{w}_k \ldots \bar{w}_l \ldots w_n$, gdzie:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i - w_j),$$

$$\bar{w}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i + w_j),$$

$$\bar{w}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k - w_l),$$

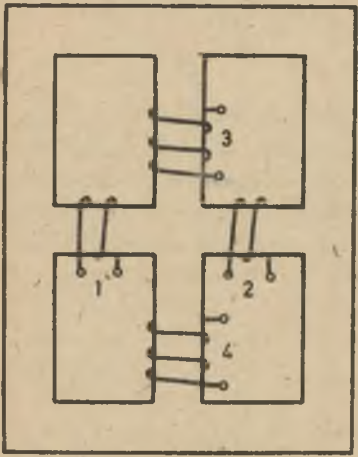
$$\bar{w}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + w_l),$$

czyli - w interpretacji geometrycznej - skręcając w odpowiednich płaszczyznach osie i,j,k,l naturalnego układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{4}$, a pozostałe - pozostawiając niezmienione, otrzymujemy ortogonalny układ współrzędnych, którego wersory osi "i" i "k" są równe wektorom własnym macierzy $[M]$. Elementy macierzy indukcyjności w nowym układzie współrzędnych $[N_{ik}][M][N_{ik}]^T$ (gdzie: $[N_{ik}]$ - macierz transformacji) w i-tym i k-tym wierszu oraz w i-tej i k-tej kolumnie przyjmują wartości równe zero z wyjątkiem tych, które leżą na przekątnej głównej. Ich wartości równe są wartościom własnym: $(M_{ii} - M_{ij})$ oraz $(M_{kk} - M_{kl})$.

Przykład obwodu elektromagnetycznego o dwóch symetrycznych parach uzwojeń: 1 i 2 oraz 3 i 4 przedstawia rys. 2. Transponowane wektory własne, niezależne od wartości elementów macierzy indukcyjności głównych

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{2}} \; 0 \; 0\right]^T \quad \text{oraz} \quad \left[0 \; 0 \; \frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

wyznaczają pierwszy i trzeci wiersz macierzy transformacji $[N_{13}]$:



Rys. 2. Obwód elektromagnetyczny z dwoma symetrycznymi parami uzwojeń

$$[N_{13}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Jeśli ponadto:

$$R_1 = R_2,$$
$$L_{s1} = L_{s2},$$
$$R_3 = R_4,$$
$$L_{s3} = L_{s4},$$

wówczas w wyniku transformacji układu równań stanu nieustalone[illegible]nania: pierwsze i trzecie stają się aut[illegible]iczne.

W identyczny sposób postępujemy, gdy obwód elektromagnetyczny zawiera więcej symetrycznych par uzwojeń, przy czym ze wzrostem ich liczby korzyści, wynikające z wprowadzenia nowego układu współrzędnych, są coraz wyraźniejsze. Szczególnym, granicznym przypadkiem jest obwód elektromagnetyczny, którego wszystkie uzwojenia można uporządkować w symetryczne pary. Parom tym odpowiada $\frac{n}{2}$ wektorów własnych, niezależnych od wartości elementów macierzy indukcyjności głównych. Wprowadzając nowy układ współrzędnych przy analizie takiego obwodu elektromagnetycznego powodujemy rozsprzężenie się połowy równań różniczkowych stanu nieustalonego.

LITERATURA

[1] JEFIMOW N.W., ROZENDORN E.R.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN, Warszawa 1974.

[2] KLUSZCZYŃSKI K.: Podstawy teoretyczne transformacji k-osiowej i jej zastosowanie w analizie stanów nieustalonych rozgałęzionych obwodów elektromagnetycznych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Elektryka z. 61, Gliwice 1978.

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1980

Recenzent
Prof. dr hab. Kazimierz Bieztyga

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ С СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ОБМОТКАМИ

Р е з ю м е

Доказано, что каждой паре симметрично расположенных обмоток электромагнитной цепи с ненасыщенным ферромагнитным сердечником сответствует собственный вектор матрицы главных индуктивности, независимый от значений ее элементов. Введена система координат с осями, соответствующими определенным таким образом собственным векторам, в которой часть дифференциальных уравнений переходного процесса цепи равна числу симметрических пар обмоток, становится автомной.

AN ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC CIRCUITS WITH SYMMETRICAL PAIRS OF WINDINGS

S u m m a r y

It was shown that for any pair of windings, placed symmetrically on the unsaturated ferrite core of an electromagnetic circuit can be defined an eigenvector of the inductance matrix, regardless of their elements.

If a new orthogonal coordinate system with eigenvectors defined in that way is used in the analysis of electromagnetic circuits, a part of differential equations of transient state, equal with the number of symmetrical pairs of windings, becomes autonomous.