

Prof. dr inż. Stanisław FRYZE

TEORETYCZNE I FIZYKALNE PODSTAWY DEFINICYJ MOCY CZYNNEJ, BIERNEJ I POZORNEJ W NIESYMETRYCZNYCH UKŁADACH WIELOFAZOWYCH O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ I PRĄDÓW*

WPROWADZENIE

W teorii obwodów prądu zmiennego o okresowych, lecz niesinusoidalnych przebiegach napięcia i prądu (zwanymi dalej dla krótkości *przebiegami odkształconymi*) napięcie i prąd układu jednofazowego określają funkcje:

$$(1) \quad U(t) = \sqrt{2} \sum_1^m V_k \sin(\hbar\omega t + \alpha_k),$$

$$(2) \quad J(t) = \sqrt{2} \sum_1^m I_k \sin(\hbar\omega t + \beta_k).$$

Budeanu [1] wprowadził dla takiego układu pięć różnych mocy elektrycznych z następującymi nazwami i definicyjnymi wzorami:

1. *moc czynna* P_w (puissance active; u Budeanu P)

$$(3) \quad P_w = \sum_1^m V_k I_k \cos \varphi_k;$$

2. *moc reaktywna* P_r (puissance réactive)

$$(4) \quad P_r = \sum_1^m V_k I_k \sin \varphi_k;$$

* Praca niedokończona z powodu choroby i śmierci autora.

3. moc deformacji P_d (puissance déformante)

$$(5) \quad P_d^2 = \sum_{k=1}^n [V_k^2 I_k^2 + V_l^2 I_l^2 - 2V_k I_k V_l I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)]$$

$$(6) \quad \varphi_k = \alpha_k - \beta_k, \quad (7) \quad \varphi_l = \alpha_l - \beta_l;$$

4. moc pozorna P_o (puissance apparente; u Budeanu P_{Bd})

$$(8) \quad P_o = UJ,$$

gdzie U — wartość skuteczna funkcji (1), J — wartość skuteczna funkcji (2).

Powyższe cztery moce wiąże ze sobą kwadratowe równanie mocy Budeanu

$$P_o^2 = P_w^2 + P_r^2 + P_d^2.$$

W równaniu tym P_w jest mocą watową, a P_r i P_d mocami bezwatowymi; Budeanu wprowadził więc piątą moc $P_f^2 = P_r^2 + P_d^2$ z nazwą dla P_f — *puissance fictive* (moc fiktywna).

Antor w swej rozprawie [2] opublikowanej w 1931 roku, przydał tej piątej mocy nazwę

5. moc bierna P (puissance passive)

$$(9) \quad P_b^2 = P_r^2 + P_d^2.$$

Do powyższych pięciu mocy dołącza autor jeszcze szóstą, z nazwą

6. moc zespolona P_s (puissance réunie)

$$(10) \quad P_s^2 = P_w^2 + P_r^2.$$

Sześć powyższych mocy elektrycznych P_w , P_r , P_d , P_o , P_b , P_s wiąże ze sobą następujące trzy kwadratowe równania mocy:

$$(11) \quad P_o^2 = P_w^2 + P_r^2 + P_d^2,$$

$$(12) \quad P_b^2 = P_r^2 + P_d^2,$$

$$(13) \quad P_s^2 = P_w^2 + P_b^2.$$

Rosenzweig w swej rozprawie doktorskiej [5] okazał, że powyższe sześć mocy można odwzorować graficznie za pomocą 3-wymiarowego czwororościanu mocy (rys. 1). Czwororościan ten zawiera cztery trójkąty prostokątne, a mianowicie:

$$1) \ OAB, \text{ w którym } \overline{OA} = P_w, \quad \overline{AB} = P_r, \quad \text{a} \quad \overline{OB} = P_s;$$

$$2) \ OAC \text{ w którym } \overline{OA} = P_w, \quad \overline{AC} = P_b, \quad \text{a} \quad \overline{OC} = P_o;$$

$$3) \ OBC \text{ w którym } \overline{OB} = P_s, \quad \overline{BC} = P_d, \quad \text{a} \quad \overline{OC} = P_o;$$

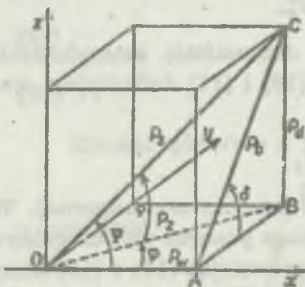
$$4) \ ABC \text{ w którym } \overline{AB} = P_r, \quad \overline{BC} = P_d, \quad \text{a} \quad \overline{AC} = P_b.$$

Powyższe cztery trójkąty prostokątne zawierają następujące główne kąty: φ — kąt fazowy, ψ — kąt rozchyłu, ϱ — kąt rozstawu, δ — kąt deformacji⁽¹⁾.

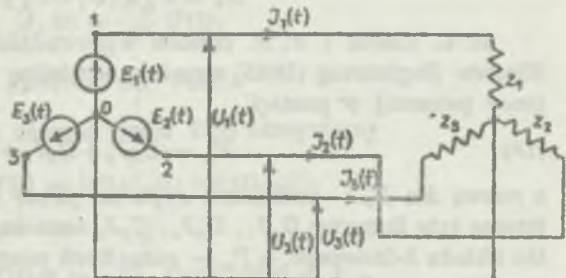
Dla kątów tych obowiązują następujące wzory:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{P_w}{P_s}, & \sin \varphi &= \frac{P_r}{P_s}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{P_r}{P_w}; \\ \cos \psi &= \frac{P_w}{P_s}, & \sin \psi &= \frac{P_b}{P_s}, & \operatorname{tg} \psi &= \frac{P_b}{P_w}; \\ \cos \varrho &= \frac{P_s}{P_s}, & \sin \varrho &= \frac{P_d}{P_s}, & \operatorname{tg} \varrho &= \frac{P_d}{P_s}; \\ \cos \delta &= \frac{P_r}{P_b}, & \sin \delta &= \frac{P_d}{P_b}, & \operatorname{tg} \delta &= \frac{P_d}{P_r}. \end{aligned}$$

Definicje mocy czynnej P_w , mocy bierniej P_b i mocy pozornej P_s w asymetrycznych układach wielofazowych o okresowych, lecz niesinusoidalnych przebiegach napięć i prądów, zwanych dalej dla krótkości przebiegami odkształ-



Rys. 1. Czworóścian mocy układu jednofazowego o odkształconych przebiegach napięcia i prądu



Rys. 2. Niesymetryczny układ 3-fazowy z przewodem zerowym

conymi, nie zostały dotychczas autorytatywnie ustalone ani przez Międzynarodowy Komitet Elektrotechniczny CEI (Comité Électrique International), ani też przez komitety krajowe.

Ten niekorzystny dla praktyki stan rzeczy istnieje dlatego, ponieważ dotychczas za punkt wyjścia przy określaniu definicji mocy P_w , P_b i P_s przyjmowano na ogół definicję mocy pozornej P_s , którą różni autorzy określili różnymi wzorami, co przy ogólnej definicji mocy czynnej według wzoru

$$(14) \quad P_w = \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt$$

⁽¹⁾ Rosenzweig oznaczył ψ przez ϱ , a ϱ przez ψ i nie wprowadził δ , które natomiast wprowadził autor, jako kąt deformacji.

doprowadziło do różnych wartości mocy biernej P_b . Ogólnie bowiem obowiązuje dla wszelkich układów n -fazowych równanie kwadratowe mocy

$$(15) \quad P_b^2 = P_w^2 + P_o^2.$$

Tak np. dla asymetrycznego układu 3-fazowego z przewodem zerowym (rys. 2) o skutecznych wartościach napięć fazowych U_1, U_2, U_3 i skutecznych wartościach prądów przewodowych J_1, J_2, J_3 , wprowadził F. Buchholz w czasopiśmie niemieckim *Elektro-Journal* (1924) dla mocy pozornej wzór:

$$(16) \quad N_a = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} \sqrt{J_0^2 + J_1^2 + J_2^2 + J_3^2},$$

w którym J_0 oznacza skuteczną wartość prądu w przewodzie zerowym, a Rosenzweig w swej pracy doktorskiej [5] wzór

$$(17) \quad P_a = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$$

(*Czasopismo Techniczne* 1939), przy czym $N_a > P_a$, jest bowiem

$$N_a^2 = P_a^2 + (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) J_0^2.$$

H. L. Curtis i F. B. Silsbec wprowadzili w czasopiśmie amerykańskim *Electric Engineering* (1935) zupełnie odmienny od (16) i (17) definicyjny wzór mocy pozornej w postaci

$$(18) \quad P_p = U_1 J_1 + U_2 J_2 + U_3 J_3$$

z nazwą dla P_p — *arithmetic apparent power* (moc pozorna arytmetyczna). We wzorze tym iloczyny $U_1 J_1, U_2 J_2, U_3 J_3$ oznaczają moce pozorne poszczególnych faz układu 3-fazowego, a P_p — sumę tych mocy. Porównując (17) z (18) otrzymamy

$$(19) \quad P_a^2 = P_p^2 + P_{os}^2,$$

przy czym

$$P_{os}^2 = (U_1 J_2 - U_2 J_1)^2 + (U_1 J_3 - U_3 J_1)^2 + (U_2 J_3 - U_3 J_2)^2.$$

Ponieważ dla tego samego układu 3-fazowego z przewodem zerowym (rys. 2) wypadają ze wzorów (16), (17), (18) trzy różne moce pozorne $N_a \neq P_a \neq P_p$, a z wzoru (14) jedna i ta sama moc czynna

$$P_w = U_1 J_1 \cos \varphi_1 + U_2 J_2 \cos \varphi_2 + U_3 J_3 \cos \varphi_3,$$

przeto jasne jest, że podstawowy wzór (15) prowadzi do trzech różnych mocy biernych $P_{b_1}, P_{b_2}, P_{b_3}$, przy czym jest

$$P_{b_1} = \sqrt{N_a^2 - P_w^2}, \quad P_{b_2} = \sqrt{P_a^2 - P_w^2}, \quad P_{b_3} = \sqrt{P_p^2 - P_w^2}.$$

Autor zrezygnował wobec tego z apriorycznie ustalonej definicji mocy biernej i w rozprawie niniejszej przedstawia nowe własne rozważania teoretyczne i fizyczne, które bez wprowadzania szeregów Fouriera umożliwiają wyprowadzenie definicji wszystkich trzech głównych mocy P_w , P_b i P_s w sposób bardzo prosty i przydatny do zastosowań praktycznych i pomiarów technicznych.

1. MOC CZYNNA, BIERNA I POZORNA UKŁADU JEDNOFAZOWEGO O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ I PRĄDÓW

1. *Metoda autora.* W rozprawach [2], [3], [4] okazałem, że moc czynną P_w , moc bierną P_b i moc pozorną P_s układu jednofazowego o okresowych, lecz niesinusoidalnych przebiegach napięcia $U(t)$ i prądu $J(t)$, zwanych dalej dla krótkości przebiegami odkształconymi, można określić bez rozkładu tych przebiegów na szeregi Fouriera, a natomiast przy zastosowaniu metody, polegającej na rozkładzie jednego z tych przebiegów, najdogodniej $J(t)$, na dwie składowe:

$$(20) \quad J(t) = J_w(t) + J_b(t),$$

$$(21) \quad J_w(t) = \frac{P_w}{U^2} U(t),$$

$$(22) \quad J_b(t) = J(t) - J_w(t).$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez $U(t)$ otrzymamy

$$U(t)J(t) = U(t)J_w(t) + U(t)J_b(t),$$

a ponieważ

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t)J(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)J_w(t) dt = P_w,$$

przeto

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t)J_b(t) dt = 0.$$

Podnosząc równanie (20) do kwadratu otrzymamy

$$J^2(t) = J_w^2(t) + J_b^2(t) + 2J_w(t)J_b(t),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T J^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T J_w^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T J_b^2(t) dt + 2 \frac{P_w}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T U(t)J_b(t) dt,$$

a stąd równanie kwadratowe wartości skutecznych prądów

$$(23) \quad J^2 = J_w^2 + J_b^2,$$

które po pomnożeniu przez kwadrat wartości skutecznej napięcia

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt$$

daje

$$U^2 J^2 = U^2 J_w^2 + U^2 J_B^2$$

i prowadzi do równania kwadratowego mocy o postaci

$$(24) \quad P_S^2 = P_W^2 + P_B^2.$$

Celem niniejszej rozprawy jest ustalenie definicji mocy czynnej P_W , mocy biernej P_B i mocy pozornej P_S w układach o odkształconych przebiegach napięć i prądów, przy zastosowaniu metody autora. W rozdziale I autor podaje symboliczne określenie wszystkich mocy układu jednofazowego, w rozdziale II — określenie wszystkich mocy układu 3-fazowego, a w rozdziale III — określenie wszystkich mocy układu n -fazowego z przewodem zerowym o odkształconych przebiegach napięć fazowych $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$ i prądów przewodowych $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$, bez rozkładu tych przebiegów na szeregi Fouriera. Metoda autora prowadzi do następujących ogólnych wzorów powyższych trzech mocy:

$$(25) \quad P_w^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{w_k}^2,$$

$$(26) \quad P_B^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{B_k}^2,$$

$$(27) \quad P_S^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_k^2,$$

przy czym jest

$$(28) \quad \sum_1^n J_k^2 = \sum_1^n J_{w_k}^2 + \sum_1^n J_{B_k}^2.$$

Po obustronnym pomnożeniu tego równania przez $\sum_1^n U_k^2$ otrzymamy *równanie kwadratowe mocy*

$$(29) \quad P_S^2 = P_W^2 + P_B^2$$

o postaci analogicznej do równania kwadratowego mocy układu jednofazowego (24).

2. Symboliczne określenie wszystkich mocy układu jednofazowego o odkształconych przebiegach napięcia i prądu. Funkcje rzeczywiste napięcia $U(t)$ i prądu $J(t)$ układu jednofazowego określone wzorami:

$$(1') \quad U(t) = \sqrt{2} \sum_1^m V_h \sin(h\omega t + \alpha_h),$$

$$(2') \quad J(t) = \sqrt{2} \sum_1^m I_h \sin(h\omega t + \beta_h),$$

zastępujemy funkcjami symbolicznymi:

$$(30) \quad \sqrt{2} \hat{U}(t) = \sqrt{2} \sum_1^m \hat{V}_h e^{jh\omega t},$$

$$(31) \quad \sqrt{2} \hat{J}(t) = \sqrt{2} \sum_1^m \hat{I}_h e^{jh\omega t},$$

$$(32) \quad \hat{V}_h = V_h e^{j\alpha_h},$$

$$(33) \quad \hat{I}_h = I_h e^{j\beta_h}.$$

Wprowadzamy dla prądu symboliczną funkcję $\hat{J}(t)$ sprzężoną z funkcją $\hat{J}(t)$:

$$(34) \quad \sqrt{2} \hat{J}(t) = \sqrt{2} \sum_1^m \hat{I}_h e^{-jh\omega t},$$

$$(35) \quad \hat{I}_h = I_h e^{-j\beta_h}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(36) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \hat{J}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_1^m \hat{V}_h e^{jh\omega t} \sum_1^m \hat{I}_h e^{-jh\omega t} \right\} dt =$$

$$= \sum_1^m \hat{V}_h \hat{I}_h = \sum_1^m V_h I_h \cos \varphi_h + j \sum_1^m V_h I_h \sin \varphi_h,$$

$$(37) \quad \varphi_h = \alpha_h - \beta_h.$$

Kładąc zgodnie z Budeanu

$$(38) \quad \sum_1^m V_h I_h \cos \varphi_h = P_w.$$

$$(39) \quad \sum_1^m V_h I_h \sin \varphi_h = P_r.$$

otrzymamy symboliczną moc zespoloną \hat{P}_s określoną wzorem

$$(40) \quad \hat{P}_s = P_w + jP_r.$$

Stąd wynika, iż jest

$$(41) \quad P_s^2 = \hat{P}_s \bar{\hat{P}}_s = (P_w + jP_r)(P_w - jP_r) = P_w^2 + P_r^2 = \\ = \left(\sum_1^n V_k I_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left(\sum_1^n V_k I_k \sin \varphi_k \right)^2.$$

Wprowadzamy teraz symboliczną funkcję prądu zespolonego $\hat{J}_s(t)$ kładąc

$$(42) \quad \hat{J}_s(t) = \frac{\hat{P}_s}{U^2} \hat{U}(t),$$

$$(43) \quad \bar{\hat{J}}_s(t) = \frac{\bar{\hat{P}}_s}{U^2} \bar{\hat{U}}(t),$$

i stwierdzamy, że

$$(44) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \bar{\hat{J}}_s(t) dt = \frac{\hat{P}_s}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \bar{\hat{U}}(t) dt = \hat{P}_s.$$

Rozkładamy wobec tego symboliczną funkcję $\hat{J}(t)$ na składowe $\hat{J}_s(t)$ i $\hat{J}_d(t)$

$$(45) \quad \hat{J}(t) = \hat{J}_s(t) + \hat{J}_d(t),$$

przy czym dla symbolicznej funkcji prądu deformacji $\hat{J}_d(t)$ kładziemy

$$(46) \quad \hat{J}_d(t) = \hat{J}(t) - \hat{J}_s(t),$$

$$(47) \quad \bar{\hat{J}}_d(t) = \bar{\hat{J}}(t) - \bar{\hat{J}}_s(t).$$

Ponieważ według (36) i (44) jest

$$\frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \bar{\hat{J}}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \bar{\hat{J}}_s(t) dt = 0,$$

przeto musi być

$$(48) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \bar{\hat{J}}_d(t) dt = 0.$$

Ogólnie możemy symboliczną funkcję $\hat{J}(t)$ rozłożyć w trojaki sposób:

$$1) \quad \hat{J}(t) = \hat{J}_w(t) + \hat{J}_r(t) + \hat{J}_d(t),$$

$$2) \quad \hat{J}(t) = \hat{J}_s(t) + \hat{J}_d(t),$$

$$3) \quad \bar{\hat{J}}(t) = \bar{\hat{J}}_w(t) + \bar{\hat{J}}_d(t).$$

Kładąc dla pierwszego rozkładu:

$$(49) \quad \dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t), \quad (50) \quad \dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$(51) \quad \dot{J}_r(t) = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \dot{U}(t), \quad (52) \quad \dot{J}_r(t) = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$(53) \quad \dot{J}_d(t) = \dot{J}(t) - [\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t)] = \dot{J}(t) - \dot{J}_w(t),$$

otrzymamy (według nomenklatury autora):

$\dot{J}_w(t)$ — symboliczną funkcję prądu czynnego określoną wzorem (49), przy czym

$$\dot{P}_w(t) = \dot{U}(t)\dot{J}_w(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_w(t) dt = \dot{P}_w, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_w(t)\dot{P}_w(t) dt = P_w^2;$$

$\dot{J}_r(t)$ — symboliczną funkcję prądu reaktywnego, określoną wzorem (51), przy czym

$$\dot{P}_r(t) = \dot{U}(t)\dot{J}_r(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_r(t) dt = \dot{P}_r, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_r(t)\dot{P}_r(t) dt = P_r^2;$$

$\dot{J}_d(t)$ — symboliczną funkcję prądu deformacji, określoną wzorem (53), przy czym

$$\dot{P}_d(t) = \dot{U}(t)\dot{J}_d(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_d(t) dt = \dot{P}_d, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_d(t)\dot{P}_d(t) dt = P_d^2.$$

Uwzględniając, że dla $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)$ przedstawia $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)$ funkcje symboliczne sprzężone i mnożąc stronami te dwa równania, otrzymamy:

$$(54) \quad \dot{J}(t)\dot{J}(t) = [\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)][\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)] = \\ = \dot{J}_w(t)\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t)\dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)\dot{J}_d(t) + A(t) + B(t) + C(t),$$

$$(55) \quad A(t) = \dot{J}_w(t)\dot{J}_r(t) + \dot{J}_w(t)\dot{J}_d(t),$$

$$(56) \quad B(t) = \dot{J}_w(t)\dot{J}_d(t) + \dot{J}_w(t)\dot{J}_d(t),$$

$$(57) \quad C(t) = \dot{J}_r(t)\dot{J}_d(t) + \dot{J}_r(t)\dot{J}_d(t).$$

Całkując (54) w granicach od 0 do T i dzieląc przez T , otrzymamy kwadratowe równanie prądów

$$(58) \quad J^2 = J_w^2 + J_r^2 + J_d^2,$$

gdz

$$\frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt = 0.$$

Podstawiając mianowicie w funkcjach $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$:

$$\dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_v(t) = \frac{P_v}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$\dot{J}_r(t) = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_s(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt &= \frac{P_w}{U^2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_r(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_s(t) dt \right\} = \\ &= \frac{P_w}{U^2} (\dot{P}_r + \dot{P}_s) = \frac{P_w}{U^2} \{jP_r + (-jP_r)\} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt = \frac{P_v}{U^2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_a(t) dt \right\} = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt + \frac{\dot{P}_s}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt = 0.$$

Kładąc dla drugiego rozkładu funkcji $\dot{J}(t)$, tj. dla równania $\dot{J}(t) = \dot{J}_s(t) + \dot{J}_d(t)$,

$$\dot{J}_s(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_d(t) = \frac{\dot{P}_d}{U^2} \dot{U}(t),$$

otrzymamy

$$\dot{J}(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_d(t), \quad \dot{J}(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_d(t),$$

a po wymnożeniu stronami obu tych równań jest

$$(59) \quad \dot{J}(t) \dot{J}(t) = \frac{P_s^2}{U^4} \dot{U}(t) \dot{U}(t) + \dot{J}_d(t) \dot{J}_d(t) + D(t) + E(t),$$

przy czym

$$(60) \quad D(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_d(t), \quad (61) \quad E(t) = \frac{\dot{P}_d}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_d(t).$$

Po scałkowaniu (59) w granicach od 0 do T , podzieleniu przez T i uwzględnieniu, że $P_s^2/U^4 = J_s^2$, wypada drugie równanie kwadratowe prądów

$$(62) \quad J^2 = J_s^2 + J_d^2,$$

gdzie

$$\frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{P}_w}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{P}_b}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_b(t) dt = 0.$$

Kładąc dla trzeciego rozkładu prądu $\dot{J}(t)$, tj. dla równania $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_b(t)$, $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_b(t)$,

$$\dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_b(t) = \frac{P_b}{U^2} \dot{U}(t);$$

otrzymamy

$$\dot{J}(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_b(t), \quad \dot{J}(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_b(t),$$

a po wymnożeniu stronami obu tych równań

$$(63) \quad \dot{J}(t)\dot{J}(t) = \frac{P_w^2}{U^4} \dot{U}(t)\dot{U}(t) + \dot{J}_b(t)\dot{J}_b(t) + F(t) + G(t),$$

przy czym

$$(64) \quad F(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t), \quad (65) \quad G(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t).$$

Po scałkowaniu (63) w granicach od 0 do T , podzieleniu przez T i uwzględnieniu, że $P_w^2/U^2 = J_w^2$ wypada trzecie równanie kwadratowe prądów

$$(66) \quad J^2 = J_w^2 + J_b^2,$$

gdzie

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t) dt = 0.$$

Powyższe trzy rozkłady funkcji $\dot{J}(t)$ doprowadziły więc do zespołu trzech kwadratowych równań, skutecznych wartości prądów:

$$(58') \quad J^2 = J_w^2 + J_r^2 + J_d^2,$$

$$(62') \quad J^2 = J_b^2 + J_d^2,$$

$$(66') \quad J^2 = J_w^2 + J_b^2,$$

przy czym

$$(67) \quad J_b^2 = J_w^2 + J_r^2,$$

$$(68) \quad J_b^2 = J_r^2 + J_d^2.$$

Mnożąc stronami każde z powyższych równań przez U^3 otrzymamy:
 $U^3 J^2 = U^3 J_w^2 + U^3 J_r^2 + U^3 J_d^2$, $U^2 J^2 = U^2 J_w^2 + U^2 J_d^2$, $U^1 J^2 = U^1 J_w^2 + U^1 J_d^2$.

Skąd wynikają równania kwadratowe mocy:

$$P_s^2 = P_w^2 + P_r^2 + P_d^2, \quad P_s^1 = P_r^1 + P_d^1, \quad P_s^0 = P_w^0 + P_d^0,$$

przy czym jest $P_s^2 = P_w^2 + P_r^2$, $P_s^1 = P_r^1 + P_d^1$.

2. MOC CZYNNA, BIERNĄ I POZORNĄ UKŁADU 3-FAZOWEGO O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ FAZOWYCH I PRĄDÓW PRZEWODOWYCH

Zastosowanie metody autora. Na rys. 2 przedstawiony jest schemat układu 3-fazowego z nieuziemiionym przewodem zerowym, o odkształconych napięciach fazowych $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ i odkształconych prądach przewodowych $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ z jednakowym okresem T dla wszystkich tych okresowych przebiegów.

Zakładając, że jest to układ *niesymetryczny i nierównomiernie obciążony* i że znajduje się w stanie ustalonym (stacjonarnym) stawiamy pytanie:

Jak należy zastosować metodę autora do tego układu. celem uzyskania wzorów określających jego moc czynną P_W moc bierną P_B i moc pozorną P_S przy danych napięciach fazowych $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ i danych prądach przewodowych $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$.

Odpowiedź. Analogicznie jak dla układu jednofazowego mamy tu odnośnie do układu 3-fazowego *dwie możliwości*, prowadzące do tych samych wielkości P_W , P_B i P_S :

I. Rozkład *prawidłowy* każdego z prądów $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ na składowe czynne i bierne przy zachowaniu danych napięć fazowych $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$.

II. Rozkład *prawidłowy* każdego z napięć $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ na składowe czynne i bierne, przy zachowaniu danych prądów przewodowych $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$.

Jakkolwiek oba te rozkłady prowadzą do tych samych mocy P_W , P_B i P_S , to jednak wprowadzamy rozkład I jako dogodniejszy dla praktyki i pozostawiając napięcia $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ nie zmienione, rozkładamy prądy $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ według następujących równań:

$$(69) \quad J_1(t) = J_{w_1}(t) + J_{b_1}(t), \quad J_2(t) = J_{w_2}(t) + J_{b_2}(t), \quad J_3(t) = J_{w_3}(t) + J_{b_3}(t).$$

Rozkład ten jest *prawidłowy tylko w tym jednym przypadku, gdy spełnia następujące dwa kardynalne warunki*:

1. Moc czynną P_w określona dla układu 3-fazowego podstawowym wzorem

$$(70) \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt$$

i moc czynna P_w określona za pomocą prądów czynnych — wzorem

$$(71) \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt$$

mają wartości te same.

2. Gdy

$$(72) \quad \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{b_k}(t) dt = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że oba te warunki będą spełnione, gdy wprowadzimy do określeń prądów czynnych $J_{w_1}(t)$, $J_{w_2}(t)$, $J_{w_3}(t)$ przewodność czynną

$$(73) \quad G_w = \frac{P_w}{\sum_1^3 U_k^2}$$

jak to uwidacznia następujący zespół wzorów:

$$(74) \quad J_{w_1}(t) = G_w U_1(t), \quad J_{w_2}(t) = G_w U_2(t), \quad J_{w_3}(t) = G_w U_3(t).$$

Mnożąc mianowicie powyższe równania kolejno przez $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$, otrzymamy

$$(75) \quad U_1(t) J_{w_1}(t) = G_w U_1^2(t), \quad U_2(t) J_{w_2}(t) = G_w U_2^2(t), \quad U_3(t) J_{w_3}(t) = G_w U_3^2(t),$$

a stąd po scałkowaniu w granicach od 0 do T i podzieleniu przez T każdego równania zespołu (75) i zsumowaniu obustronnym otrzymanych wyrażeń jest

$$\sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt = G_w \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k^2(t) dt = \frac{P_w}{\sum_1^3 \Sigma_k^2} \sum_1^3 U_k^2 = P_w.$$

Ponieważ zaś odnośnie do równań

$$(76) \quad \begin{cases} U_1(t) J_1(t) = U_1(t) J_{w_1}(t) + U_1(t) J_{b_1}(t), \\ U_2(t) J_2(t) = U_2(t) J_{w_2}(t) + U_2(t) J_{b_2}(t), \\ U_3(t) J_3(t) = U_3(t) J_{w_3}(t) + U_3(t) J_{b_3}(t), \end{cases}$$

zachodzi według pierwszego warunku równość

$$\sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt = P_w,$$

przeto zgodnie z drugim warunkiem jest

$$\sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{b_k}(t) dt = 0.$$

Uwaga. Warto zaznaczyć, że powyższy rozkład prądów $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ na prądy czynne $J_{w_1}(t)$, $J_{w_2}(t)$, $J_{w_3}(t)$, określone wzorami (74), i prądy biernie $J_{b_1}(t)$, $J_{b_2}(t)$, $J_{b_3}(t)$, określone wzorami

$$(77) \quad J_{b_1}(t) = J_1(t) - J_{w_1}(t), \quad J_{b_2}(t) = J_2(t) - J_{w_2}(t), \quad J_{b_3}(t) = J_3(t) - J_{w_3}(t),$$

jest jedynym, jaki spełnia podane powyżej dwa warunki.

Podnosząc każde z równań zespołu (74) do kwadratu, uzyskamy równania kwadratowe o postaci:

$$(78) \quad J_{w_1}^2(t) = G_w^2 U_1^2(t), \quad J_{w_2}^2(t) = G_w^2 U_2^2(t), \quad J_{w_3}^2(t) = G_w^2 U_3^2(t).$$

Stąd po scałkowaniu w granicach od 0 do T i podzieleniu przez T uzyskujemy określenia kwadratów prądów czynnych w postaci wzorów:

$$(79) \quad J_{w_1}^2 = G_w^2 U_1^2, \quad J_{w_2}^2 = G_w^2 U_2^2, \quad J_{w_3}^2 = G_w^2 U_3^2.$$

W równaniach tych jest

$$G_w^2 = \frac{P_w^2}{\left(\sum_1^3 U_k^2\right)^2},$$

a U_1^2 , U_2^2 , U_3^2 są to kwadraty wartości skutecznych napięć fazowych, uzyskane z ogólnego wzoru

$$(80) \quad U_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_k^2(t) dt \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3.$$

Zespół równań (79) prowadzi do równania zespolonego

$$\sum_1^3 J_{w_k}^2 = \frac{P_w^2}{\left(\sum_1^3 U_k^2\right)^2} \sum_1^3 U_k^2 = \frac{P_w^2}{\sum_1^3 U_k^2},$$

z którego wynika, że moc czynną w kwadracie P_w^2 określa wzór

$$(81) \quad P_w^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2.$$

Dla mocy czynnej mamy przeto trzy wzory:

$$(70') \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt \quad (\text{wzór podstawowy}),$$

$$(71') \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt,$$

$$(82) \quad P_w = \sqrt{\sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2}$$

Celem znalezienia wzoru dla mocy biernej P_b podnosimy równania (69) do kwadratu, co prowadzi do następujących równań kwadratowych prądów:

$$\begin{aligned} J_1^2(t) &= J_{w_1}^2(t) + J_{b_1}^2(t) + 2J_{w_1}(t)J_{b_1}(t), \\ J_2^2(t) &= J_{w_2}^2(t) + J_{b_2}^2(t) + 2J_{w_2}(t)J_{b_2}(t), \\ J_3^2(t) &= J_{w_3}^2(t) + J_{b_3}^2(t) + 2J_{w_3}(t)J_{b_3}(t). \end{aligned}$$

Po scałkowaniu tych równań w granicach od 0 do T i podzieleniu przez T otrzymujemy podstawowe równanie zespolone dla wartości skutecznych prądów w kwadracie:

$$(83) \quad \sum_1^3 J_i^2 = \sum_1^3 J_{w_k}^2 + \sum_1^3 J_{b_k}^2,$$

gdzież

$$2 \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T J_{w_k}(t)J_{b_k}(t) dt = 2 \sum_1^3 \frac{P_w}{\sum_1^3 U_k^2} \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t)J_{b_k}(t) dt = 0.$$

Mnożąc obustronnie równanie kwadratowe prądów (83) przez $\sum_1^3 U_k^2$ otrzymamy równanie zespolone formy

$$\sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_k^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2 + \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{b_k}^2,$$

skąd wynika równanie kwadratowe mocy o postaci

$$(84) \quad P_S^2 = P_w^2 + P_b^2.$$

W równaniu tym oznaczają:

$$(85) \quad P_w^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2 \quad - \text{moc czynną (w kwadracie),}$$

$$(86) \quad P_b^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{b_k}^2 \quad - \text{moc bierną (w kwadracie),}$$

$$(87) \quad P_S^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_k^2 \quad - \text{moc pozorną (w kwadracie)}$$

układu 3-fazowego *niesymetrycznego i nierównomiernie obciążonego* z przewodem zerowym nieuziemiającym, jak podano na rys. 2, i przy założeniu, że straty mocy w przewodach łączących odbiornik z końcówkami 1, 2, 3, 0 urządzenia zasilającego są znikomo małe.

Uwaga. Ze wzoru (84) wynika, że

$$P_B^2 = P_S^2 - P_W^2,$$

co wobec prostoty wzoru dla $P_S^2 = (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$ i możliwości wymierzenia wartości skutecznych napięć fazowych i prądów przewodowych oraz mocy czynnej P_W może służyć do pomiarowego sprawdzenia wartości P_B , gdyż powinno być

$$P_B = \sqrt{\sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{b_k}^2} = \sqrt{P_S^2 - P_W^2}$$

(patrz dalej *Pomiary i przykłady obliczeń*).

3. MOC CZYNNA, BIERNA I POZORNA UKŁADU n -FAZOWEGO O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ I PRĄDÓW

Założenie. Zakładamy, że w układzie n -fazowym z przewodem zerowym nieuziemionym dane są okresowe napięcia fazowe $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$ i okresowe prądy przewodowe $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$ o *jednakowym okresie T* tych wszystkich przebiegów, które ogólnie mogą być *odkształcone*.

Zakładając, że jest to układ *niesymetryczny* tak odnośnie do napięć jako też i prądów i że jest obciążony *nierównomiernie* w poszczególnych fazach, stawiamy pytanie:

Jak należy do tego układu n -fazowego zastosować metodę rozkładu podaną w rozdziale I celem uzyskania definicji: mocy czynnej P_w , reaktywnej P_r i mocy deformacji P_d oraz mocy biernej P_b i mocy pozornej P_o ?

Odpowiedź. Przy założeniu, że napięcia fazowe mają być zachowane, a rozkładowi mają być poddane prądy przewodowe, tok postępowania jest następujący:

1) Wymierzamy lub obliczamy wartości skuteczne U_1, U_2, \dots, U_n danych napięć fazowych $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$ i wartości skuteczne J_1, J_2, \dots, J_n danych prądów przewodowych $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$ według wzorów

$$(88) \quad U_k = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_k^2(t) dt}, \quad (89) \quad J_k = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T J_k^2(t) dt}.$$

2) Wymierzamy lub obliczamy moc czynną P_w według wzoru

$$(90) \quad P_w = \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt.$$

3) Rozkładamy prądy przewodowe $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$ na składowe czynne $J_{w_1}(t), J_{w_2}(t), \dots, J_{w_n}(t)$ i składowe bierne $J_{b_1}(t), J_{b_2}(t), \dots, J_{b_n}(t)$ według wzorów:

6) Mnożąc równanie (97) przez $\sum_1^n U_k^2$, otrzymamy równanie kwadratowe mocy

$$(98) \quad \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_k^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{w_k}^2 + \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{b_k}^2.$$

7) Stąd przy określeniach:

$$(25') \quad P_W^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{w_k}^2 \quad \text{-- dla mocy czynnej,}$$

$$(26') \quad P_B^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{b_k}^2 \quad \text{-- dla mocy biernej,}$$

$$(27') \quad P_S^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_k^2 \quad \text{-- dla mocy pozornej,}$$

8) równanie kwadratowe mocy omawianego układu n -fazowego w postaci

$$(29') \quad P_S^2 = P_W^2 + P_B^2.$$

Literatura

[1] C. I. Budeanu, *Puissances réactives et fictives*, Publication de l'Institut National Roumain pour l'Étude de l'Aménagement et de l'Utilisation des Sources d'Énergie, Bucarest 1927.

[2] S. Fryze, *Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, Przegląd Elektrotechniczny 7-8 (1931).

[3] — *W sprawie określenia mocy w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, ibidem 22 (1931).

[4] — *Wirk-, Blind- und Scheinleistung in elektrischen Stromkreisen mit nichtsinusoidalem Verlauf von Strom und Spannung*, Elektrotechnische Zeitschrift 25, 26, 29 (1932).

[5] I. Rosenzweig, *Symboliczny wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układów wielofazowych*, Czasopismo Techniczne 56 (1939).