ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 100 Nr kol. 861

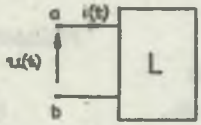
Prof. dr hab. inż. Zygmunt NOWOMIEJSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

3. UOGÓLNIONA TEORIA MOCY (POR. [4]) 1)

3.1. Moc czynna, bierna i pozorna

Niech L jest dowolnym 2) układem elektrycznym między zaciskami którego występują przebiegi o skończonej mocy. Oznacza to, że między zaciskami (a,b) układu L (por. rys. 1) określone są wartości skuteczne:



Rys. 1

$$U = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u^2(t)\,dt},$$

$$I = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)\,dt} \qquad (3.01)$$

oraz moc modułowa:

$$P_m = U\,I. \qquad (3.02)$$

Podstawowymi mocami przebiegów są moc czynna P i bierna Q. Na podstawie definicji mamy:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)i(t)\,dt, \qquad (3.03)$$

$$Q = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)H\left\{i(t)\right\}dt. \qquad (3.04)$$

---

1) Jest to fragment monografii opublikowanej w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej serii Elektryka nr 49, 1977 r. pt. Teoria mocy układów elektrycznych autorów Zygmunt Nowomiejski i Ewa Sowa stanowiący 3 rozdział tej monografii autorstwa Zygmunta Nowomiejskiego.

2) W pracy ograniczymy się do dwójników. Jednak biorąc ogólnie L może być złożonym obiektem aktywnym zawierającym parametry skupione i rozłożone elementy liniowe i nieliniowe oraz elementy odwzorowujące procesy stochastyczne.

Przykładowo, gdy: $i(t) = G\,u(t)$, gdzie G jest wielkością stałą, otrzymamy:

$$P = GU^2; \quad Q = 0$$

wykorzystując, że $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(t)H\left\{f(t)\right\} dt = 0.$

oraz, gdy: $i(t) = B\,H\left\{u(t)\right\}$.

wówczas:

$$P = 0; \quad Q = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i(t)H\left\{u(t)\right\} dt = -BU^2.$$

Położmy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)i(t-\tau)\, dt, \tag{3.05}$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)e^{-j\omega\tau}\, dt. \tag{3.06}$$

Funkcja $\vartheta(\tau)$ jest funkcją korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu. (Można ją nazwać korelacją napięciowo-prądową układu L). Na podstawie relacji

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\, d\omega$$

oraz

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega$$

zachodzi:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\, d\omega, \tag{3.07}$$

$$Q = (-j)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega\, \Theta(\omega)\, d\omega. \tag{3.08}$$

Stąd:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\,(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\,d\omega. \tag{3.09}$$

Relacja (3.09) ma znaczenie podstawowe. Wynika z niej, że jeżeli występujące na zaciskach układu L przebiegi napięcia i prądu posiadają zerową korelację wzajemną (są nieskorelowane) to moce: czynna P i bierna Q są równe zeru. (Np. dwa przebiegi sinusoidalne o różnych pulsacjach są przebiegami nieskorelowanymi).

W praktycznych obliczeniach bardziej specyficzna postać zależności (3.09) może okazać się przydatniejsza. Aby to pokazać załóżmy, że: $u(t) = U_0 =$ $=$ constans; $i(t) = I_0 =$ constans. Otrzymamy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} U_0\, I_0\, dt = U_0\, I_0.$$

Natomiast

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 I_0\, e^{-j\omega t}\, dt = U_0 I_0\, 2\pi\delta(\omega)$$

i stąd:

$$P = U_0 I_0; \quad Q = 0.$$

Ogólnie więc, jeżeli w transformacie $\Theta(\omega)$ występuje impuls Diraca dla $\omega = 0$, tzn. jeżeli:

$$\Theta(\omega) = \Theta_0\, 2\pi\delta(\omega) + \Theta_1(\omega), \tag{3.10}$$

to:

$$P + jQ = \Theta_0 + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \Theta_1(\omega)\, d\omega \tag{3.11}$$

Moc pozorną S definiujemy za pomocą relacji:

$$S = \left|P + jQ\right| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{3.12}$$

Transformatę $\Theta(\omega)$ możemy przedstawić w postaci amplitudowo-fazowej. Kładziemy:

$$\Theta(\omega) = A(\omega)\, e^{j\Phi(\omega)}; \quad \cos\Psi = \frac{P}{S}; \quad \sin\Psi = \frac{Q}{S}. \tag{3.13}$$

Otrzymamy:

$$S\, e^{j\Psi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{j\sigma(\omega)}\,(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\, d\omega. \tag{3.14}$$

Moc pozorna S jest wielkością rzeczywistą. Stąd:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\left\{\cos\left[\sigma(\omega) - \Psi\right](1+\mathrm{sgn}\,\omega)\right\} d\omega, \tag{3.15}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\left\{\sin\left[\sigma(\omega) - \Psi\right](1+\mathrm{sgn}\,\omega)\right\} d\omega. \tag{3.16}$$

Zauważmy, że w przypadku szczególnym, gdy: $\sigma(\omega)$ = constans = Ψ relacja (3.16) jest spełniona dla dowolnej amplitudy $A(\omega)$ i wtedy:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sigma(\omega)\right|(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\, d\omega. \tag{3.17}$$

Teoria mocy - biorąc najogólniej, dotyczy związków zachodzących między mocami rozważanych przebiegów. W zastosowaniach - aby jej nadać określone znaczenie techniczne i ekonomiczne odnosimy ją do wyróżnionego obiektu lub układu. Jeżeli dynamiczne zachowanie się układu pozwala na przeprowadzenie efektywnej analizy, to znaczy prowadzącej do znalezienia zależności zachodzących między przebiegami, teoria mocy staje się składową częścią tej analizy a występujące moce możemy wyrazić w zależności od dynamicznych charakterystyk układu.

Najprostszym tego przykładem jest układ liniowy czasowo niezmienniczy. Załóżmy, że L jest układem liniowym pasywnym lub aktywnym czasowo niezmienniczym i niech $y(t)$ będzie odpowiedzią tego układu na napięciowy impuls Diraca $\delta(t)$ a $\varphi(t)$ funkcją autokorelacji przyłożonego napięcia $u(t)$.

Na podstawie zasady superpozycji:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau. \tag{3.18}$$

Stąd

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\left|Y(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{3.19}$$

ponadto korzystając z relacji (3.09) oraz z zależności pomiędzy przebiegiem h(t) o skończonej energii a f(t) przebiegiem o skończonej mocy, oraz przebiegiem g(t) o skończonej mocy zachodzi relacja $\Theta(\omega) = \Phi(\omega)\, H^*(\omega)$ otrzymujemy:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \cdot Y^*(\omega)\,(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\, d\omega, \qquad (3.20)$$

gdzie $\Phi(\omega)$ i $Y(\omega)$ są transformatami Fouriera odpowiednio funkcji $\varphi(t)$ i $y(t)$.

Jeżeli występujące przebiegi nie zawierają składowych stałych to (3.20) redukuje się do postaci:

$$P + jQ = \frac{1}{\pi}\int_{-0}^{\infty} \Phi(\omega)\, Y^*(\omega)\, d\omega, \qquad (3.21)$$

Ważną cechą uzyskanych relacji jest fakt, że nie są one zależne bezpośrednio od przebiegów lecz (dla danego układu) od transformaty Fouriera funkcji autokorelacji przyłożonego napięcia. Transformata $\Phi(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą i dodatnią co oznacza, że jest ona niezależna od kąta fazowego i dlatego różne przebiegi mogą posiadać taką samą funkcję autokorelacji. Tym samym dla różnych przebiegów napięć przyłożonych do zacisków (a,b) układu L (posiadających równą funkcję autokorelacji) pobór mocy P i Q oraz wartość skuteczna I prądu i(t) będą takie same.

Korzystając, że: $F_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \quad \varepsilon \neq 0.$ (3.21a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt \cong F_\varepsilon(\omega) e^{-j\omega\tau}. \qquad (3.21b)$$

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau.$$

mamy:

$$I_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t}\, e^{-j\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau)\, d\tau \right\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t}\, u(t-\tau) e^{-j\omega t}\, dt \right\} d\tau$$

$$\cong U_\varepsilon(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

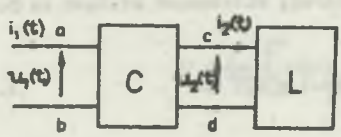
Stąd, dla wystarczająco małego ε:

$$I_\varepsilon(\omega) \cong Y(\omega)U_\varepsilon(\omega), \tag{3.22}$$

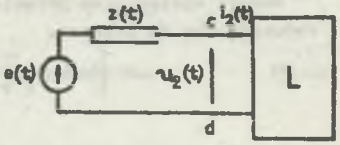
gdzie $U_\varepsilon(\omega)$ jest uogólnioną transformatą Fouriera przebiegu napięcia u(t).

3.2. Przenoszenie mocy przez czwórnik liniowy

Rozważmy układ składający się z czwórnika liniowego "C" zawartego między parą zacisków (a,b) i (c,d) oraz dowolnego obciążenia L (rys. 2).



Rys. 2



Rys. 3

Stosując twierdzenie Thevenina do liniowej części układu otrzymamy kolejno (por. rys. 3):

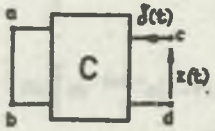
$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(\tau)u_1(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.23}$$

gdzie $k_u(t)$ jest napięciową transmitancją czwórnika (e(t) jest napięciem występującym między zaciskami (c,d) przy odłączeniu tych zacisków od obciążenia).

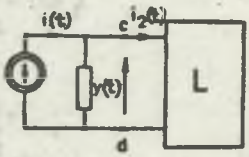
$$u_2(t) = e(t) - \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)i_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.24}$$

gdzie (por. rys. 4) z(t) jest odpowiedzią czwórnika zwartą między zaciskami (c,d) przy wymuszeniu prądowym impulsem Diraca i zwartych końcówkach (a,b)

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(\tau)u_1(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)i_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.25}$$



Rys. 4



Rys. 5

Na podstawie (3.21a) oraz (3.21b) dla uogólnionych transformat Fouriera zachodzi:

$$U_{\varepsilon 2}(\omega) \approx K_u(\omega)U_{\varepsilon 1}(\omega) - Z(\omega)I_{\varepsilon 2}(\omega). \tag{3.26}$$

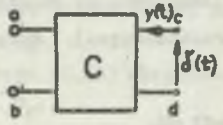
Podobnie, stosując twierdzenie Nortona, otrzymamy (por. rys 5):

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau)i_1(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.27}$$

gdzie $k_1(t)$ jest prądową transmitancją czwórnika.

($i(t)$ jest prądem płynącym między zaciskami (c,d) przy ich zwarciu)

$$i_2(t) = i(t) - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.28}$$



Rys. 6

gdzie (por. rys. 6) $y(t)$ jest odpowiedzią czwórnika zawartą między zaciskami (c,d) przy wymuszeniu napięciowym impulsem Diraca i otwartych końcówkach (a,b).

Czyli:

$$i_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau)i_1(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.29}$$

Dla uogólnionych transformat Fouriera, zachodzi:

$$I_{\varepsilon 2}(\omega) \approx K_i(\omega)I_{\varepsilon 1}(\omega) - Y(\omega)U_{\varepsilon 2}(\omega). \tag{3.30}$$

Wykorzystując (3.26) oraz (3.30), otrzymamy:

$$U_{\varepsilon 2}(\omega) \approx \frac{K_u(\omega)U_{\varepsilon 1}(\omega) - K_i(\omega)Z(\omega)I_{\varepsilon 1}(\omega)}{1-Z(\omega)Y(\omega)} \tag{3.31}$$

$$I_{\varepsilon 2}(\omega) \approx \frac{K_i(\omega)I_{\varepsilon 1}(\omega) - K_u(\omega)Y(\omega)U_{\varepsilon 1}(\omega)}{1-Z(\omega)Y(\omega)}. \tag{3.32}$$

Mamy:

$$\Theta_2(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U_{\varepsilon 2}(\omega)I^*_{\varepsilon 2}(\omega)}{4\Re\varepsilon}.$$

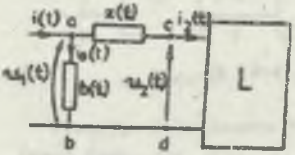
Stąd:

$$\Theta_2(\omega) = \frac{1}{|1-Z(\omega)Y(\omega)|^2}\Big\{K_u(\omega)K_1(\omega)\Theta_1(\omega) + Z(\omega)Y^*(\omega)K_1(\omega)K_u(\omega)\Theta_1^*(\omega)$$

$$- \Big[Y^*(\omega)|K_u(\omega)|^2\Phi_1(\omega) + Z(\omega)|K_1(\omega)|^2\Gamma_1(\omega)\Big]\Big\}. \tag{3.33}$$

gdzie $\Gamma_1(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji przebiegu prądu $i_1(t)$.

Zagadnieniem dualnym do przedstawionego jest obliczanie mocy przebiegów występujących między zaciskami (a,b).



Rys. 7

Załóżmy, że czwórnik "C" jest dany w układzie Γ (por. rys. 7) a funkcje przejścia jego elementów $x(t)$ oraz $b(t)$ są funkcjami nieparzystymi. (Założenie to określa obydwa elementy jako reaktancyjne). Otrzymamy:

$$u_1(t) = u_2(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)i_2(t-\tau)\,d\tau,$$

$$i_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau)u_1(t-\tau)d\tau + i_2(t). \tag{3.34}$$

Stąd:

$$U_{\varepsilon 1}(\omega) = U_{\varepsilon 2}(\omega) + j\,X(\omega)I_{\varepsilon 2}(\omega),$$

$$I_{\varepsilon 1}(\omega) = j\,B(\omega)U_{\varepsilon 1}(\omega) + I_{\varepsilon 2}(\omega). \tag{3.35}$$

Czyli:

$$U_{\varepsilon 1}(\omega) = U_{\varepsilon 2}(\omega) + j\,X(\omega)I_{\varepsilon 2}(\omega),$$

$$I_{\varepsilon 1}(\omega) = j\,B(\omega)U_{\varepsilon 2}(\omega) + \Big[1 - X(\omega)B(\omega)\Big]I_{\varepsilon 2}(\omega). \tag{3.36}$$

Pamiętając o definicji $\Theta(\omega)$ oraz $\Phi(\omega)$, a mianowicie:

$$\Theta(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi_\varepsilon(\omega)\,G_\varepsilon^*(\omega)}{4\pi\varepsilon}.$$

$$\phi(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left|F_\varepsilon(\omega)\right|^2}{4\pi\varepsilon}.$$

otrzymamy:

$$\Theta_1(\omega) = -jB(\omega)\Phi_2(\omega) + jX(\omega)\left[1 - X(\omega)B(\omega)\right]\Psi_2(\omega) +$$

$$+ \Theta_2(\omega)\left[1 - X(\omega)B(\omega)\right] + \Theta_2^*(\omega)X(\omega)B(\omega). \qquad (3.37)$$

Kładziemy:

$$\Theta_1(\omega) = \Theta_{1r}(\omega) + j\Theta_{1u}(\omega).$$
$$\Theta_2(\omega) = \Theta_{2r}(\omega) + j\Theta_{2u}(\omega). \qquad (3.38)$$

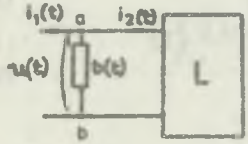
Stąd:

$$\Theta_{1r}(\omega) = \Theta_{2r}(\omega), \qquad (3.39)$$

$$\Theta_{1u}(\omega) = \Theta_{2u}(\omega)\left[1 - 2X(\omega)B(\omega)\right] - B(\omega)\Phi_2(\omega) + X(\omega)\left[1 - X(\omega)B(\omega)\right]\Psi_2(\omega) \qquad (3.40)$$

Relacja (3.39) wyraża oczywistą własność układu, a mianowicie fakt, że: $P_1 = P_2$.

Relacja (3.40) określa wpływ parametrów czwórnika na pobór mocy biernej Q_1.



Rys. 8

W szczególnym przypadku, gdy $X(\omega) \equiv 0$ (p
B), otrzymamy:

$$\Phi_1(\omega) = \Phi_2(\omega) = \Phi(\omega), \qquad (3.41)$$

$$\Psi_1(\omega) = \Psi_2(\omega) + B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right], \qquad (3.42)$$

$$\Theta_{1u}(\omega) = \Theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\Phi(\omega). \qquad (3.43)$$

3.3. Moc dystorsji

Ogólnie, dla każdej skończonej wartości T prawdziwa jest tożsamość:

$$\int_{-T}^{T} u(t)^2\,dt \cdot \int_{-T}^{T} i(t)^2\,dt = \left|\int_{-T}^{T} u(t)i(t)dt\right|^2 +$$

$$+ \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left|u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)\right|^2 dt\,d\tau, \qquad (3.44)$$

a ponieważ granica:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u^2(t)dt \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)dt = P_n^2,$$

istnieje - określona jest także wielkość D zdefiniowana za pomocą relacji:

$$D = \sqrt{\lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{2T}\right)^2 \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left|u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)\right|^2 dt\, d\tau}, \tag{3.45}$$

D nazwiemy mocą dystorsji przebiegów $u(t)$ i $i(t)$.
Na podstawie (3.44) zachodzi:

$$P_{=}^2 = P^2 + D^2. \tag{3.46}$$

Zauważmy, że gdy:

$$i(t) = \lambda u(t), \tag{3.47}$$

gdzie λ jest wielkością stałą, to moc D jest równa zero. Jak pokażemy wielkość D odgrywa istotną rolę w rozważaniach prowadzących do poprawy współczynnika mocy układu.

3.4. Rozkład ortogonalny przebiegów[1)]

Połóżmy

$$i(t) = \lambda u(t) + i_\psi(t) \tag{3.48}$$

$$\lambda = \frac{P}{U^2} \quad \text{(por. [5])}. \tag{3.49}$$

Zachodzi:

$$\Theta(\omega) = \lambda\Phi(\omega) + \Phi_\psi(\omega), \tag{3.50}$$

$$\Psi(\omega) = \lambda^2\Phi(\omega) + \Psi_\psi(\omega) + 2\lambda\Theta_\psi(\omega), \tag{3.51}$$

gdzie $\Theta_\psi(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji korelacji wzajemnej:

$$\vartheta_\psi(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)i_\psi(t-\tau)dt, \tag{3.52}$$

a $\Psi_\psi(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji przebiegu $i_\psi(t)$.
Na podstawie (3.07) oraz (3.49), otrzymamy:

$$P = P + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_\psi(\omega)\, d\omega.$$

1) Ze względu na zastosowania praktyczne rozkład przeprowadzono przyjmując przebieg napięcia za wielkość odniesienia.

Czyli:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_{\psi}(\omega)\,d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}u(t)i_{\psi}(t)dt = 0. \tag{3.53}$$

Wynika stąd, że przebieg $i_{\psi}(t)$ jest ortogonalny do przebiegu napięcia $u(t)$.
Z drugiej strony:

$$(-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Theta(\omega)d\omega = (-j)\lambda\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Phi(\omega)d\omega +$$

$$+ (-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Theta_{\psi}(\omega)d\omega.$$

Stąd (por. (3.8)):

$$Q = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Theta_{\psi}(\omega)d\omega. \tag{3.54}$$

Mamy (por. (3.51)):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon(\omega)d\omega = \left(\frac{P}{U^2}\right)^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon_{\psi}(\omega)d\omega +$$

$$+ 2\lambda\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_{\psi}(\omega)d\omega.$$

Stąd:

$$I^2 = \frac{P^2}{U^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon_{\psi}(\omega)d\omega. \tag{3.55}$$

Lecz:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon_{\psi}(\omega)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}i_{\psi}^2(t)dt = I_{\psi}^2. \tag{3.56}$$

Czyli:

$$I^2 = \frac{P^2}{U^2} + I_{\psi}^2,$$

$$P_{\Pi}^2 = P^2 + (U\,I_{\psi})^2. \tag{3.57}$$

Porównując (3.57) z (3.46), otrzymamy:

$$D = U\, I_{\varphi}. \tag{3.58}$$

gdzie I_{φ} jest wartością skuteczną przebiegu $i_{\varphi}(t)$.

Bezpośrednio relację (3.58) możemy uzyskać wstawiając (3.48) i (3.49) do (3.45). Istotnie, wykonując zaznaczone działania, otrzymamy:

$$D = U\sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i_{\varphi}^{2}(t)dt}. \tag{3.59}$$

3.5. Poprawa współczynnika mocy

Współczynnikiem mocy nazwiemy stosunek (por. rys. 9):

$$\frac{P}{P_m} = \cos\varphi. \tag{3.60}$$

Rys. 9

Jak widać współczynnik ten określa sprawność wykorzystania mocy dostarczonej do układu i jest równy jedności wtedy i tylko wtedy, gdy moc dystorsji D = 0.

Interesuje nas poprawa współczynnika mocy, tzn. minimalizacja mocy dystorsji układu. Jest oczywista, że minimalizację taką można w różny sposób przeprowadzić. Jednak z punktu widzenia wykorzystania w praktyce można przyjąć, że wartość skuteczna U napięcia wzbudzania jest dana i różna od zera. Przyjęcie takie redukuje problem minimalizacji mocy D do minimalizacji wartości skutecznej I_{φ} przebiegu $i_{\varphi}(t)$ (por. (3.59)). Z definicji wartości skutecznej wynika, że będzie ona równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy przebieg $i_{\varphi}(t)$ będzie przebiegiem o skończonej energii. Tak więc warunkiem koniecznym i równocześnie wystarczającym, aby moc dystorsji D układu była równa zero jest spełnienie nierówności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\varphi}^{2}(t)dt < \infty \tag{3.61}$$

Załóżmy, że spełnienie warunku (3.61) spodziewamy się uzyskać przez wprowadzenie między zaciski (a,b) układu L elementu reaktancyjnego, którego funkcją przejścia jest b(t), (por. rys. 8). Zachodzi (por. (3.47), (3.42)):

$$\Phi_1(\omega) = \Phi_2(\omega) = \Phi(\omega),$$

$$\mathcal{V}_1(\omega) = \mathcal{V}_2(\omega) + B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right].$$

Stąd (por. (3.51)):

$$\lambda^2\Phi(\omega) + \Upsilon_{\psi 1}(\omega) + 2\lambda\Theta_{\psi 1}(\omega) =$$

$$= \Upsilon_2(\omega) + B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right],$$

$$\frac{P^2}{U^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon_{\psi 1}(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon_2(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right]d\omega.$$

Przyjmując:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Upsilon_{\psi 1}(\omega)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}i_{\psi 1}^2(t)dt = 0,$$

(warunek równoważny nierówności (3.61)),
otrzymamy:

$$I_2^2 - \frac{P^2}{U^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\left[2\Theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\Phi(\omega)\right]d\omega$$

$$I_{\psi 2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\left[2\Theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\Phi(\omega)\right]d\omega. \tag{3.62}$$

W równaniu (3.62) szukaną funkcją jest $B(\omega)$. $I_{\psi 2}$ oraz pozostałe funkcje są znane.

Łatwo można zauważyć, że gdy $\Theta_{2u}(\omega) \equiv 0$ to równanie (3.62) nie może być spełnione dla żadnej funkcji $B(\omega)$ a z relacji (3.43) wynika, że gdy $\Theta_{1u}(\omega) \equiv 0$ to prawa strona równania (3.62) jest niezależna od $I_{\psi 2}$. Ogólniej: ponieważ wprowadzenie elementu $B(\omega)$ nie wpływa na przebieg prądu $i_2(t)$ proponowane rozwiązanie ma tylko ograniczony wpływ na poprawę współczynnika mocy. Na ogół (w zależności od funkcji przebiegów) bardziej złożona struktura czwórnika "C" (por. rys. 2) będzie konieczna do uzyskania efektywnej poprawy współczynnika mocy.

W literaturze problem poprawy współczynnika mocy sprowadza się często do zagadnienia kompensacji mocy biernej układu. Takie ustawienie problemu nie jest ogólnie biorąc prawidłowe, pozwala jednak dla niektórych klas przebiegów uzyskać pewne informacje mogące być użyteczne. W rozważanym przypadku, na podstawie (3.37), otrzymamy:

$$(-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_1(\omega)\operatorname{sgn}\omega d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)B(\omega)\operatorname{sgn}\omega d\omega +$$

$$+ (-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_2(\omega)\operatorname{sgn}\omega d\omega.$$

Stąd:

$$Q_1 = Q_2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega B(\omega)\Phi(\omega)d\omega. \tag{3.63}$$

Przyjmując:

$$Q_1 = 0 \quad \text{(kompensacja zupełna)},$$

otrzymamy:

$$Q_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega B(\omega)\Phi(\omega)d\omega. \tag{3.64}$$

Równanie (3.64) da się uprościć. Jeżeli napięcie zasilania $u(t)$ nie zawiera składowej stałej to przyjmuje ono postać:

$$Q_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\Phi(\omega)d\omega. \tag{3.65}$$

W przypadku, gdy $u(t)$ zawiera składową stałą U_0 to transformatę jego funkcji autokorelacji możemy przedstawić w postaci:

$$\Phi(\omega) = U_0^2 \cdot 2\pi\delta(\omega) + \Phi_0(\omega). \tag{3.66}$$

Wstawiając (3.66) do (3.64), otrzymamy:

$$Q_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\Phi_0(\omega)d\omega. \tag{3.67}$$

W równaniu (3.65) lub (3.67) szukaną funkcją jest $B(\omega)$. Pozostałe wielkości są znane.

3.6. Przebiegi zespolone (por. [6], [7])

Bardzo często w praktycznych obliczeniach mocy mamy do czynienia z przebiegami, dla których wygodniej zamiast operować przebiegami rzeczywistymi rozważać zależności zachodzące między przebiegami zespolonymi stowarzyszonymi z przebiegami rzeczywistymi. Dotyczy to przede wszystkim przebiegów okresowych, prawie okresowych oraz przebiegów posiadających obwiednie o znanym kształcie.

DEFINICJA: Niech $f(t)$ będzie przebiegiem rzeczywistym o skończonej mocy a $H\{f(t)\}$ jego transformatę Hilberta.
Przebieg zespolony:

$$F(t) = f(t) - j\,H\{f(t)\} \tag{3.68}$$

nazywamy przebiegiem stowarzyszonym z przebiegiem rzeczywistym $f(t)$.

Dla przebiegu tego, zachodzi:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} |F(t)|^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[H\{f(t)\}\right]^2 dt\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt.$$

Czyli, dla wartości skutecznej F przebiegu rzeczywistego $f(t)$, otrzymamy:

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} |F(t)|^2\,dt} \tag{3.69}$$

Uwaga. Jeżeli $f(t)$ zawiera składową stałą F_0, to w zależności (3.69) zamiast F_0^2 wystąpi $\frac{1}{2}F_0^2$. Należy to uwzględnić w obliczeniach.

Przykładowo, niech:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_{mn}\cos(\omega_n t + \vartheta_n). \tag{3.70}$$

Stąd korzystając, że zachodzi $H\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = j\,e^{j\omega_0 t}, \omega > 0$ mamy:

$$H\left\{f(t)\right\} = -\sum_{n=1}^{n=N} C_{mn}\sin(\omega_n t+\psi_n), \tag{3.71}$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_{mn}\, e^{j\psi_n}\, e^{j\omega_n t}, \tag{3.72}$$

$$\left|F(t)\right|^2 = \sum_{n,r=1}^{N} C_{mn}\, C_{mr}\, e^{j(\psi_n-\psi_r)}\, e^{jt(\omega_n-\omega_r)}. \tag{3.73}$$

Gdy $r \neq n$, otrzymamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} e^{jt(\omega_n-\omega_r)}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(\omega_n-\omega_r)T}{2T(\omega_n-\omega_r)} = 0.$$

Z drugiej strony, gdy $r = n$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} dt = \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie więc:

$$F^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=N} C_{mn}^2 = \sum_{n=1}^{n=N} \left(\frac{C_{mn}}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{3.74}$$

Połóżmy:

$$U(t) = u(t) - j\,H\left\{u(t)\right\}; \quad I(t) = i(t) - j\,H\left\{i(t)\right\} \tag{3.75}$$

Na podstawie (3.03), (3.04) oraz korzystając z zależności

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)H\left\{g(t)\right\}dt = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)H\left\{f(t)\right\}dt.$$

otrzymamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} U(t)I^*(t)dt = P + jQ. \tag{3.76}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\left|\int_{-T}^{T} U(t)I^{*}(t)dt\right| = S. \tag{3.77}$$

Przyjmijmy, że przebiegi $u(t)$ i $i(t)$ posiadają postać (3.70) to znaczy, niech:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{mn}\cos(\omega_n t+\beta_n); \quad i(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{mn}\cos(\omega_n t+\alpha_n).$$

Otrzymamy:

$$U(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{mn}\, e^{j\beta_n}\cdot e^{j\omega_n t}; \quad I(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{mn}\, e^{j\alpha_n}\cdot e^{j\omega_n t},$$

$$U(t)I^{*}(t) = \sum_{n,r=1}^{N} U_{mn} I_{mr}\, e^{j(\beta_n-\alpha_r)}\cdot e^{jt(\omega_n-\omega_r)},$$

$$P + jQ = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} U(t)I^{*}(t)dt = \sum_{n=1}^{n=N}\left|\bar{U}_n\right|\left|\bar{I}_n\right| e^{j\varphi_n},$$

gdzie:

$$\left|\bar{U}_n\right| = \frac{U_{mn}}{\sqrt{2}}; \quad \left|\bar{I}_n\right| = \frac{I_{mn}}{\sqrt{2}}; \quad \varphi_n = \beta_n - \alpha_n.$$

Tożsamość (3.44) można także zastosować do przebiegów zespolonych (3.68). Otrzymamy:

$$\int_{-T}^{T}|U(t)|^2\,dt \int_{-T}^{T}|I(t)|^2\,dt = \left|\int_{-T}^{T} U(t)I^{*}(t)dt\right|^2 +$$

$$+\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\left|U(t)I(\tau) - U(\tau)I(t)\right|^2 dt\,d\tau. \tag{3.79}$$

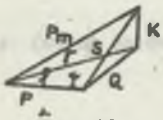
Z (3.79) wynika, że określona jest wielkość K zdefiniowana za pomocą relacji:

$$K = \sqrt{\lim_{T,T\to\infty}\left(\frac{1}{4T}\right)^2\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\left|U(t)I(\tau) - U(\tau)I(t)\right|^2 dt\,d\tau} \tag{3.80}$$

K nazywamy mocą deformacji.

Na podstawie (3.79) zachodzi:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2. \tag{3.81}$$



Rys. 10

Geometryczna interpretacja zależności (3.81) podana jest na rys. 10.

Połóżmy:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m}; \quad \cos\psi = \frac{P}{S}; \quad \cos\gamma = \frac{S}{P_m}. \tag{3.82}$$

Otrzymamy:

$$\cos\varphi = \cos\psi \cos\gamma. \tag{3.83}$$

Jak wiemy współczynnik $\cos\varphi$ nazywamy współczynnikiem mocy. Współczynnik $\cos\psi$ nazwiemy współczynnikiem obciążenia a $\cos\gamma$ współczynnikiem deformacji.

Wszystkie wprowadzone współczynniki posiadają określone znaczenie przy czym współczynnik obciążenia jest w istotny sposób zależny od mocy biernej Q, a współczynnik deformacji od mocy deformacji K. Relacja (3.83) wskazuje na zależność współczynnika mocy tak od poboru mocy biernej przez układ jak i od wielkości mocy deformacji K. W szczególnym przypadku, gdy $K = 0$, $\cos\gamma = 1$ i otrzymamy: $\cos\varphi = \cos\psi$.

LITERATURA

[1] Titchmarsh E.C.: Theory of Fourier Integrals. Oxford at the Clarendon Press second Edition 1948.

[2] Wiener N.: The Fourier Integral and Certain of Its Applications. Cambridge University Press, N. York, 1933.

[3] Papoulis A.: The Fourier Integral and Its Applications. McGraw-Hill Book Comp. INC. 1962.

[4] Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka z. 46, 1975.

[5] Fryze S.: Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. P.E. 1931, Nr 7 i 8.

[6] Gabor D.: Theory of Communications. Inst. Electr. Engrs. 93,1946, 429.

[7] Nowomiejski Z.: Analyse elektrischer Kreise mit periodischen nicht sinusoidalformigen Vorgangen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik. 8, s. 244-254. 1967.

[8] Demidowicz B.P.: Matematyczna teoria stabilności, WNT 1972.

[9] Mikusiński J.,Sikorski R.: Elementarna teoria dystrybucji. PWN, Warszawa 1964.

Przyjęto do druku w czerwcu 1976 r.

Recenzent: prof. dr inż. Tadeusz Puchałka - Politechnika Poznańska