ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985
Seria: ELEKTRYKA z. 100 Nr kol. 861

Doc. dr hab. inż. Marek BRODZKI
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

KILKA UWAG O MATEMATYCZNEJ NATURZE WIELKOŚCI FIZYKALNYCH

Profesor Stanisław Fryze w artykule pt. "Jednostki fizykalne i techniczne. Studium krytyczne oraz nowy system oznaczania jednostek" zamieszczonym w "Przeglądzie Elektrotechnicznym" 12 - 14 (1933)([3], s. 260) pisze na temat wielkości fizykalnej: "Co to jest wielkość, wszyscy pojmujemy, jakkolwiek każdy z nas mogłby tu za św. Augustynem powiedzieć "Dopoki mnie nikt nie pyta - wiem, gdy pytającego mam objaśnić - nie wiem"."

Nie zamierzam pokusić się o pełniejszą odpowiedź na pytanie, czym są wielkości fizykalne, bowiem jest to trudne zagadnienie filozofii fizyki. O tym, co chcemy uważać za taką wielkość, decyduje pomiar. Jest on bardzo różny w przypadku rozmaitych wielkości fizycznych. Decyduje tu rownież kultura matematyczna sprawiająca, że wyniki pomiaru ujmujemy z pomocą takiego lub innego pojęcia matematycznego. Chodzi mi o rzecz znacznie prostszą. Jeśli już zgadzamy się co do kwestii wprowadzenia pewnej konkretnej wielkości fizykalnej, to jak matematycznie ująć kwestię posiadania przez nią pewnego wymiaru fizykalnego? Następnie, czy wielkościami fizykalnymi można "rachować" i jeśli tak, to na ile powyższe "rachunki" są podobne do tych, ktore dokonujemy na wartościach bezwymiarowych przyporządkowanych danym wielkościom fizykalnym? Odpowiedź na te pytania jest ważna, ponieważ podręczniki fizyki zamieszczają aneksy zawierające różne systemy jednostek oraz ich porównania, lecz sformułowane wyżej zagadnienie pomijają milczeniem.

Wielkości mogą być przedstawione z pomocą pojęć logicznych rozmaitych typów ([6], R.VIII). Zajmiemy się na początku najprostszymi, tzn. takimi, którym w sensie bezwymiarowym przypisuje się liczby rzeczywiste. Jest naturalne za wielkość odpowiadającą takiej liczbie $x \in R$ uważać uporządkowaną parę (x, m), gdzie m jest pewną stałą symbolizującą np. jednostkę odległości lub też czasu, masy itp. Oznaczmy zbiór wszystkich takich par znakiem $\underline{X}$. Jest równie naturalne wyposażyć go w strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych R_c, tzn. utworzyć uporządkowaną czwórkę $(\underline{X}, R_c, +, \cdot)$, gdzie działania $+$, $\cdot$ definiujemy poniżej:

$$(x_1,m) + (x_2,m) = (x_1+x_2,m), \quad (1)$$

$$c \bullet (x,m) = (cx,m) \quad (2)$$

dla dowolnych liczb x_1, x_2, x, $c \in R$.
Uporządkowaną parę (x,m) będziemy oznaczać tłustą literą $\mathbf{x}$ - podobnie dla innych zmiennych. Jest oczywiste, że dla czwórki $(\underline{X}, R_c, +, \bullet)$ spełnionych jest siedem aksjomatów przestrzeni liniowych ([1], s.44). W ramach takiej przestrzeni liniowej X wiemy już, co to znaczy dodawać wielkości i mnożyć je przez liczby rzeczywiste. Jednostkę stanowi uporządkowana para $(1,m)$, będąca jednym elementem bazy $\{(1,m)\}$ jednowymiarowej przestrzeni liniowej X.

Ponieważ jednocześnie występują w fizyce odwzorowania z jednej takiej przestrzeni liniowej do drugiej, które chcemy różniczkować, więc struktura przestrzeni liniowej nadana zbiorowi $\underline{X}$ nie wystarcza. Trzeba uczynić z niego przestrzeń Banacha. Normę $\| \ \| : \underline{X} \to R$ w przestrzeni X zadajemy wzorem

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x,m)\| = |x| \quad \text{dla dowolnego elementu } \mathbf{x} \in \underline{X}. \quad (3)$$

Łatwo sprawdzić, że trzy aksjomaty przestrzeni unormowanych są wówczas spełnione ([1], s.118). Metrykę $\rho: \underline{X} \times \underline{X} \to R$ określamy w standardowy sposób z pomocą normy

$$\rho(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\| \quad \text{dla dowolnych elementów } \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in \underline{X}. \quad (4)$$

Trzy aksjomaty metryki są też spełnione ([1], s.30).
Zauważmy, że z zupełności przestrzeni arytmetycznej R wynika zupełność przestrzeni liniowej unormowanej $(X, \| \ \|)$ ([1], s.32), czyli przestrzeń $(X, \| \ \|)$ jest przestrzenią Banacha ([1], s.118).
O podobnym sposobie ujęcia wielkości fizykalnych mowa jest w pracy ([2], s.10,11).

Przypuśćmy teraz, że mamy dwa zbiory $\underline{X}$, $\underline{Y}$ (na razie nie musimy zaopatrywać je w żadne dodatkowe struktury) złożone odpowiednio ze wszystkich uporządkowanych par (x,m), (y,n), $x, y \in R$ oraz odwzorowanie $\mathbf{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$. Zbudujemy dwie bijekcje $\varphi_1: R \to \underline{X}$, $\varphi_2: R \to \underline{Y}$

$$\varphi_1(x) = (x,m) = \mathbf{x}, \quad (5)$$

$$\varphi_2(y) = (y,n) = \mathbf{y} \text{ dla dowolnych liczb } x,y \in R. \quad (6)$$

Bijekcje φ_1^{-1}, φ_2^{-1} można nazwać bijekcjami zapominania wymiarów fizykalnych wielkości.

Powiemy, że odwzorowania $f : R \to R$ oraz $\mathbf{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek:

$$\varphi_2 \circ f = \mathbf{f} \circ \varphi_1. \quad (7)$$

Wzór (7) może być oczywiście użyty do zdefiniowania odwzorowania $\mathbf{f}$ z pomocą odwzorowań f, φ_1, φ_2. Wzór ten można zapisać w postaci przemiennego diagramu

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & R \arrow[d, "\varphi_2"] \\ \underline{X} \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \underline{Y} \end{tikzcd} \tag{7a}$$

Definicję tę można uogólnić na przypadek n -argumentowych $(n \in N)$ relacji S i $\mathbf{S}$.

Mianowicie (np. dla $n = 2$) relacje te są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ze spełnienia warunków (5) i (6) wynika równoważność

$$xSy \equiv \mathbf{x}\,\mathbf{S}\,\mathbf{y} \quad \text{dla dowolnych liczb } x,\ y \in R. \tag{8}$$

Ten wzór również może służyć do zdefiniowania relacji $\mathbf{S}$ z pomocą relacji S i odwzorowań φ_1, φ_2.

Wprowadźmy z kolei dowolną funkcję zdaniową $\Phi(S_1, \ldots, S_k, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$ pewnej teorii fizykalnej posiadającą jako argumenty wolne zmienne relacyjne $S_1, \ldots, S_k$ i indywiduowe (rzeczywiste) $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$. Jest ona zbudowana z atomicznych funkcji zdaniowych typu $x_1S_1y_1$ połączonych funktorami zdaniotwórczymi (spójnikami), np. takimi jak negacja czy implikacja oraz poprzedzonych kwantyfikatorami wiążącymi zmiennie indywiduowe ([6], s.215; [4], s.114, 115).
Jeśli utożsamić relację (dwuargumentową) ze zbiorem par uporządkowanych elementów spełniających ją, to zakładamy $S_1, \ldots, S_k \subset R^2$. Rozumowanie powyższe dotyczące konstrukcji funkcji zdaniowych, można powtórzyć dla relacji n-argumentowych - dla dwuargumentowych zapis jest prostszy. W dalszym ciągu niech będzie dana funkcja zdaniowa $\Phi(\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$ o tej samej budowie co poprzednia, gdzie wolne zmienne relacyjne S_i zastąpiono zmiennymi relacyjnymi $\mathbf{S}_i$ i odpowiednio wolne argumenty x_i, y_i argumentami (wolnymi) $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz mamy $\mathbf{S}_i \subset \underline{X}_i \times \underline{Y}_i$, $\mathbf{x}_i \in \underline{X}_i$, $\mathbf{y}_i \in \underline{Y}_i$.
Indywiduowe zmienne związane (rzeczywiste) zastąpiono również indywiduowymi zmiennymi związanymi (pisanymi tłusto) o tym samym numerze. W obu funkcjach zdaniowych liczba wolnych zmiennych indywiduowych może być jednocześnie inna niż 2k. Dla uproszczenia zapisu ustalono po jednej zmiennej wolnej należącej do każdego ze zbiorów $\underline{X}_i$, $\underline{Y}_i$. Zaznaczamy, że pierwsza funkcja zdaniowa nie zawiera żadnych zmiennych pisanych tłusto. Oprócz tego obie funkcje zdaniowe, o tej samej budowie, mogą posiadać jednocześnie pewne zmienne (tak wolne, jak i związane) oraz stałe nie wymienione poprzednio. Jeśli uznamy, że rzędy typów logicznych zmiennych $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_k$ oraz stałych $m_1, \ldots, m_k$, $n_1, \ldots, n_k$, wymienionych poniżej są jednakowe (rząd zerowy), to zmienne $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ będą typu takiego jak uporządkowane pary (x_i, m_i), (y_i, n_i), czyli typu rzędu pierw-

szego. Wobec tego pierwsza z naszych funkcji zdaniowych jest formułą języka pewnej teorii fizykalnej pierwszego rzędu, druga - jest formułą języka drugiego rzędu (o ile oczywiście nie występują w nich inne zmienne lub stałe wyższych rzędów) ([6], s.217; [4], s.117, 142). Teraz możemy dla dowolnych powyżej podanych funkcji zdaniowych wypowiedzieć twierdzenie:

Jeśli dla dowolnych elementów x_i, $y_i \in R$ z równości

$$\varphi_i(x_i) = (x_i, m_i) = \mathbf{x}_i, \tag{9}$$

$$\psi_i(y_i) = (y_i, n_i) = \mathbf{y}_i, \quad i \in \{1,\dots,k\},$$

wynika równoważność

$$x_i \, S_i \, y_i \equiv \mathbf{x}_i \, \mathbf{S}_i \, \mathbf{y}_i , \tag{10}$$

to dla zmiennych indywiduowych x_i, y_i, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ i relacyjnych S_i, $\mathbf{S}_i$ powiązanych wzorami (9), (10) zachodzi równoważność:

$$\Phi(S_1,\dots,S_k, x_1,\dots,x_k, y_1,\dots,y_k) \equiv$$

$$\equiv \Phi(\mathbf{S}_1,\dots,\mathbf{S}_k, \mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k) . \tag{11}$$

Dowód można uzyskać poprzez niewielką modyfikację zasadniczego twierdzenia o izomorfizmie ([6], s.(199-202)). Różnica polega na tym, że w książce [6] wszystkie zmienne indywiduowe x_i, y_i, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ należą do tego samego zbioru oznaczonego znakiem 1 i wszystkie relacje S_i, $\mathbf{S}_i$ są zawarte w zbiorze 1 x 1 oraz w związku z tym występuje tam jedna bijekcja φ. Dowód ten (indukcyjny) opiera się na przejściu od wykazania słuszności twierdzenia dla formuł atomicznych typu (10) do wykazania go dla dowolnej opisanej formuły poprzez kolejne zastosowanie operacji negacji, koniunkcji i dołączania kwantyfikatora szczegółowego (ponieważ każda taka formuła da się uzyskać z atomicznych poprzez stosowanie skończoną liczbę razy powyższych operacji). Analogiczne twierdzenie można uzyskać dla funkcji zdaniowych w logikach predykatów (teoriach) rzędów wyższych ([6], s.200, 307).

Sens powyższego twierdzenia jest jasny. Mianowicie, to co da się wypowiedzieć w ramach naszej teorii, z pomocą odpowiednich funkcji zdaniowych, o danych wielkościach fizycznych opisywanych indywiduami i relacjami z uwzględnieniem wymiarów fizykalnych (pisanych tłusto) - da się również wypowiedzieć o nich w sensie bezwymiarowym (druk "chudy"), i odwrotnie.

Widzimy jednocześnie, że działania +, · , wyprowadzone we wzorach (1), (2), wyprowadzone są tak jak we wzorze (8), tylko trzeba użyć relacji trójczłonowych.

Wypowiedź zawartą w poprzednio sformułowanym twierdzeniu można wzmocnić. Biorąc pod uwagę definicję dowodów twierdzeń w naszej teorii ([6], s.227; [4], s.138, 143) zauważamy, że wychodząc z aksjomatów teorii za -

pisanych w postaciach równoważnych - raz bezwymiarowo, drugi raz z użyciem wymiarów i stosując analogiczne kroki dowodowe (reguły inferencji) w obu przypadkach otrzymujemy ciągi formuł kończące się na naszym twierdzeniu wypowiedzianym raz w postaci bezwymiarowej - drugi z użyciem wymiarów. Ciągi te mają wyrazy o jednakowych numerach powiązane relacjami równoważności typu (11), gdzie spełnione są warunki typu (9), (10).

Stąd wniosek, że zapisy bezwymiarowe i z użyciem wymiarów są nie tylko "równie dobre", jeśli chodzi o treść wypowiadanego twierdzenia, lecz także są "równie dobre", gdy chodzi o ich dowody. Sformułowanie "równie dobre" należy rozumieć w wyjaśnionym powyżej sensie, bowiem jak okaże się na przykładzie, operowanie wielkościami bezwymiarowymi wymaga użycia tej części aparatu matematycznego, związanego na ogół z funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej, który lepiej znamy. Oczywiście, używając zapisu bezwymiarowego trzeba pamiętać (również stosując regułę podstawiania ([6], s.53)), by dla różnych wielkości fizycznych stosować różne zmienne.

Przykład dotyczyć będzie równań różniczkowych. Rzecz jasna, nie trzeba podkreślać jego wagi, bowiem znana jest rola równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych w fizyce. Dla prostoty ograniczmy się do jednego równania cząstkowego pierwszego rzędu.

Niech dane będą dwa odwzorowania $F : R^n \times R \times R^n \longrightarrow R$, $\mathbf{F} : \underline{X}^n \times \underline{Y} \times \underline{Y}^n \longrightarrow \underline{Z}$, $n \in N$. Oprócz tego mamy bijekcje $\varphi : R \longrightarrow \underline{X}$, $\psi : R \longrightarrow \underline{Y}$, $\omega : R \longrightarrow \underline{Z}$:

$$\varphi(x) = (x,m) = \mathbf{x} \text{ dla dowolnej liczby } x \in R, \tag{12}$$

$$\psi(y) = (y,n) = \mathbf{y} \text{ dla dowolnej liczby } y \in R, \tag{13}$$

$$\omega(z) = (z,k) = \mathbf{z} \text{ dla dowolnej liczby } z \in R. \tag{14}$$

Dla dowolnych liczb $x_1,\dots,x_n,\ y,\ y_1,\dots,y_n \in R$ zachodzi warunek

$$\omega(F(x_1,\dots, x_n, y, y_1,\dots,y_n)) = \mathbf{F}(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n), \psi(y), \psi(y_1),\dots,\psi(y_n)), \tag{15}$$

stanowiący o równoważności odwzorowań F oraz $\mathbf{F}$.

Przypuśćmy teraz, że uporządkowane pary $(\underline{X}, \|\ \|_{\underline{X}})$, $(\underline{Y}, \|\ \|_{\underline{Y}})$ stanowią przestrzenie Banacha. Wówczas zbiorowi $\underline{X}^n \times \underline{Y} \times \underline{Y}^n$ można też nadać strukturę przestrzeni Banacha ([1] s.55, 136, 137; [5] s.138, 139). O przestrzeni $\underline{Z}$ zakładamy, że jest liniowa.

Bijekcje φ, ψ, ω są wówczas liniowe. Dla uproszczenia zakładamy, że argumenty $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ należą do tego samego zbioru $\underline{X}$. Wprowadźmy odwzorowania $u : R^n \longrightarrow R$ klasy C_1 oraz $\mathbf{u} : \underline{X}^n \longrightarrow \underline{Y}$ różniczkowalne w sposób ciągły na $\underline{X}^n$ ([5], s.125, 126, 139). (O odwzorowaniach F, $\mathbf{F}$ możemy dodatkowo założyć, że są ciągłe - lecz wówczas operujemy uporządkowaną parą $(\underline{Z}, \|\ \|_{\underline{Z}})$ stanowiącą przestrzeń Banacha.) Niech dla dowolnych liczb $x_1,\dots,x_n \in R$ zachodzi warunek:

$$\psi(u(x_1,\dots,x_n)) = \mathbf{u}(\varphi(x_1),\dots, \varphi(x_n)), \tag{16}$$

oznaczający z kolei równoważność odwzorowań u oraz **u**.

Wówczas łatwo zauważyć, że odwzorowanie u spełnia równanie różniczkowe cząstkowe

$$F\left(x_1,\dots,x_n,\ u(x_1,\dots,x_n),\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n),\dots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n)\right)=0 \quad (17)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie **u** spełnia równanie różniczkowe cząstkowe (dla n = 1 są to równania równiczkowe zwyczajne)

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n,\mathbf{u}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n),\ \nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{u}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n),\dots,\ \nabla_{\mathbf{e}_n}\mathbf{u}(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n)\right)=\mathbf{0}, \quad (18)$$

gdzie wyrażenie $\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{u}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ jest pochodną kierunkową odwzorowania **u** w kierunku wektora $\mathbf{e}_i = ((0,m),\dots,(1,m),\dots,(0,m))$, para $(1,m)$ występuje w ciągu na i-tym miejscu), ([5], s. 126, 165), "**0**" jest elementem zerowym przestrzeni liniowej Z.

W celu udowodnienia tego faktu wystarczy wykazać proste twierdzenie (dowód pomijam) mówiące, że z równoważności odwzorowań u oraz **u** wynika równoważność odwzorowań:

$\frac{\partial u}{\partial x_i} : R^n \longrightarrow R$ oraz $\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{u} : \underline{X}^n \longrightarrow \underline{Y}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, przy czym w obu przypadkach bijekcjami ustalającymi równoważność są odwzorowania φ, ψ (ustalające również równoważność odwzorowań F oraz **F**).

Widzimy więc, że równania (17), (18) spełniają rolę funkcji zdaniowych występujących w ogólnym zapisie (11) (czy też raczej pewnych ich fragmentów, ponieważ całość powinna obejmować założenia uczynione odnośnie do odwzorowań F, u lub **F**, **u**). Stwierdzamy również, że wygodniej jest operować równaniem (17), bowiem nie trzeba do tego znać rachunku różniczkowego uprawianego w przestrzeniach Banacha.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A. : Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Brodzki M. : Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej nr 847, Gliwice 1979.

[3] Fryze S. : Jednostki fizykalne i techniczne. Studium krytyczne oraz nowy system oznaczania jednostek. Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki. PWN, Warszawa - Wrocław 1966.

[4] Hunter G. : Metalogika. PWN, Warszawa 1982.

[5] Maurin K. : Analiza, cz. I. PWN, Warszawa 1971.

[6] Mostowski A. : Logika matematyczna. Monografie matematyczne, Warszawa - Wrocław 1948.