

Zygmunt PIĄTEK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

Edmund PIĘTKA

Instytut Elektroenergetyki i Sterowania
Układów Wydziału Elektrycznego
Politechniki Śląskiej

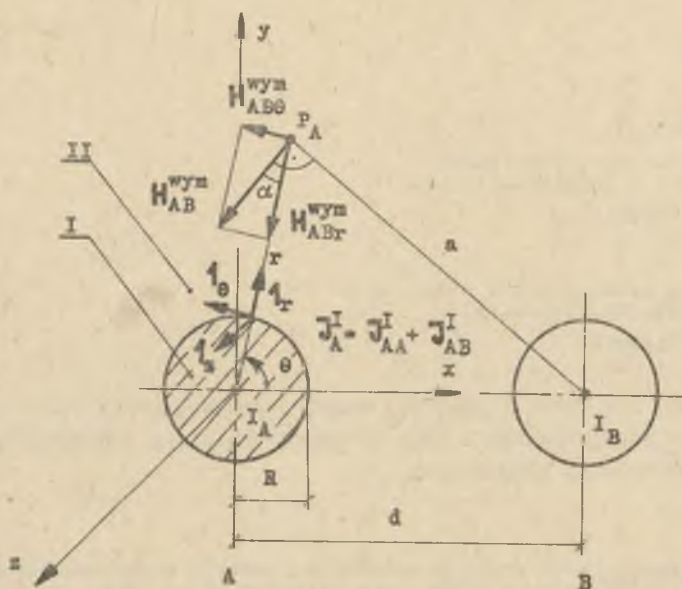
ROZKŁAD WYPADKOWEGO WEKTORA GĘSTOŚCI PRĄDU W PRZEWODZIE WALCOWYM
UMIESZCZONYM W NIERÓWNOMIERNYM POLU MAGNETYCZNYM PRĄDU SINUSOIDALNEGO
PLYNĄCEGO W PRZEWODZIE RÓWNOLEGLYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę obliczania prądów wirowych indukowanych w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym. Dysponując ponadto określonym wzorem na wektor gęstości prądu własnego (z uwzględnieniem zjawiska nasórkowości) określono wypadkowy wektor gęstości prądu w rozpatrywanym przewodzie walcowym.

1. WSTĘP

W układzie dwóch lub więcej przewodów z prądami przemiennymi umieszczonymi w ten sposób, że ich pola magnetyczne w sposób istotny wpływają na siebie, w przewodach zachodzi zmiana rozkładu wektora gęstości prądu w przekroju poprzecznym warunkowana działaniem tych pól. Zmiana spowodowana jest tym, że do wektora gęstości prądu własnego dodaje się wektor gęstości prądu indukowanego w nim przez przemiennie pole magnetyczne prądów przewodów sąsiednich. Zjawisko to nazywa się zjawiskiem zbliżenia. Wpływ jego zjawiska na rozkład gęstości prądu w przewodzie zależny jest od kierunku i częstotliwości prądów płynących w rozpatrywanym układzie przewodów, kształtu geometrycznego i temperatury przewodów oraz odległości między nimi.

Rozpatrywany układ, przedstawiony na rys. 1, składa się z dwóch nieskończenie długich, walcowych przewodów (faza A i faza B), przez które płyną prądy sinusoidalne odpowiednio $i_A(t)$ oraz $i_B(t)$. Przemiennie pole magnetyczne prądu $i_B(t)$ indukuje w przewodzie fazy A prąd wirowy o gęstości J_{AB}^I . Zakłada się przy tym, że walcowy przewód fazy B jest przewodem linearnym.



Rys. 1. Przewód walcowy z prądem I_A w polu magnetycznym prądu linearnego I_B

2. NATEŻENIE POLA MAGNETYCZNEGO W OBSZARZE ZEWNĘTRZNYM PRZEWODU FAZY A

W obszarze zewnętrznym przewodu - II ($r \geq R$) wektor natężenia pola magnetycznego H_{AB}^{II} w postaci zespolonej jest sumą wektorową wektorów pola H_{AB}^{wym} wytworzonego przez prąd I_B oraz pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego prądów wirowych H_{AB}^{oz} indukowanych w przewodzie:

$$H_{AB}^{II} = H_{AB}^{wym} + H_{AB}^{oz} \quad (1)$$

Wektor H_{AB}^{wym} określony jest (rys. 1) wzorem:

$$H_{AB}^{wym} = -1_r H_{ABr}^{wym} + 1_\theta H_{AB\theta}^{wym} \quad (2)$$

które składowe dane są wzorami [8]:

$$H_{ABr}^{wym} = \frac{I_B}{2\pi} + \frac{d \sin \theta}{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta} \quad (3)$$

oraz

$$H_{AB\theta}^{\text{wym}} = \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{r - d \cos\theta}{r^2 + d^2 - 2rd \cos\theta} \quad (4)$$

W obszarze zewnętrznym przewodu konduktywność $\gamma = 0$ i przy pominięciu prądów przesunięcia z drugiego równania Maxwella, drogą wykonania na tym równaniu operacji rotacji, otrzymuje się wektorowe równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 E_{AB}^{\text{oz}} = 0. \quad (5)$$

Ponieważ wektor natężenia pola elektrycznego w rozpatrywanym zagadnieniu posiada tylko jedną składową E_{ABz}^{oz} (zależną od zmiennych r oraz θ), można więc równanie (5) sprowadzić do skalarnego równania Laplace'a, które rozwiązuje się poprzez rozdzielanie zmiennych. Stosując ponadto drugie równanie Maxwella, otrzymuje się:

$$H_{AB}^{\text{oz}}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n}{j\omega \mu r^{n+1}} [1_r \sin n\theta - 1_\theta \cos n\theta]. \quad (6)$$

Po rozwinięciu składowych (3) i (4) w szereg Fouriera, sumę (1) przedstawia się następująco:

$$H_{AB}^{\text{II}}(r, \theta) = -1_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{n B_n}{j\omega \mu r^{n+1}} \right] \sin n\theta -$$

$$- 1_\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{n B_n}{j\omega \mu r^{n+1}} \right] \cos n\theta. \quad (7)$$

3. NATĘŻENIE POLA MAGNETYCZNEGO W PRZEWODZIE FAZY A

W obszarze I (rys. 1), tj. wewnątrz przewodu ($0 \leq r \leq R$), obowiązuje [10] dla wektora natężenia pola elektrycznego (w postaci zespolonej) następujące równanie falowe Helmholtza:

$$\nabla^2 E_{AB}^{\text{I}} = j m^2 E_{AB}^{\text{I}}, \quad (8)$$

gdzie:

$$m = \sqrt{j\omega\mu\gamma}.$$

Natężenie pola elektrycznego ma w tym obszarze tylko jedną składową E_{ABz}^{I} zależną od zmiennych r oraz θ . Można więc równanie (8) sprowadzić do skalarnego równania falowego Helmholtza. Rozwiązanie równania (8) poprzez rozdzielanie zmiennych i przy uwzględnieniu ograniczoności pola elektrycznego dla $r \rightarrow 0$, jest określone wzorem:

$$E_{AB}^I(r, \theta) = 1_z \sum_{n=1}^{\infty} E_{ABzn}^I(r, \theta) = 1_z \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_n(\sqrt{-j} mr) \cos n\theta, \quad (9)$$

gdzie:

$J_n(\sqrt{-j} mr)$ - funkcja Bessela - Kelvina [4] pierwszego rodzaju rzędu n .

Z drugiego równania Maxwella oraz wzoru (9) otrzymuje się:

$$H_{AB}^I(r, \theta) = 1_r \frac{1}{j\omega\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n J_n(\sqrt{-j} mr) \sin n\theta + \\ + 1_\theta \frac{1}{j\omega\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [-n J_n(\sqrt{-j} mr) + \sqrt{-j} mr J_{n-1}(\sqrt{-j} mr)] \cos n\theta. \quad (10)$$

4. WEKTOR GĘSTOŚCI PRĄDU WIROWEGO INDUKOWANEGO W PRZEWODZIE FAZY A

Przy założeniu równości współczynników przenikalności magnetycznej bezwzględnej obszaru przewodu - I i obszaru zewnętrznego - II można otrzymać [1] następujący warunek brzegowy dla natężenia pola magnetycznego przy $r = R$:

$$H_{AB}^{II}(R, \theta) = H_{AB}^I(R, \theta). \quad (11)$$

Warunek (11) sprowadza się do układu dwóch równań skalarnych (dla poszczególnych składowych wektorów $H_{AB}^I(R, \theta)$ i $H_{AB}^{II}(R, \theta)$), który to układ pozwala na wyznaczenie stałej C_n :

$$C_n = \frac{I_B \sqrt{-j} \omega \mu}{\pi m R} \left(\frac{R}{a}\right)^n \frac{1}{J_{n-1}(\sqrt{-j} mR)}. \quad (12)$$

Wykorzystując uogólnione prawo Ohma oraz wzory (9) i (12), otrzymuje się:

$$J_{AB}^I(r, \theta) = 1_z J_{ABz}^I(r, \theta) = 1_z \frac{I_B \sqrt{-j} m}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^n \frac{J_n(\sqrt{-j} mr)}{J_{n-1}(\sqrt{-j} mR)} \cdot \\ \cdot \cos n\theta = 1_z \frac{|I_B|}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{a}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \cdot \\ \cdot \exp \left\{ j [\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_n] \right\} \cos n\theta, \quad (13)$$

gdzie:

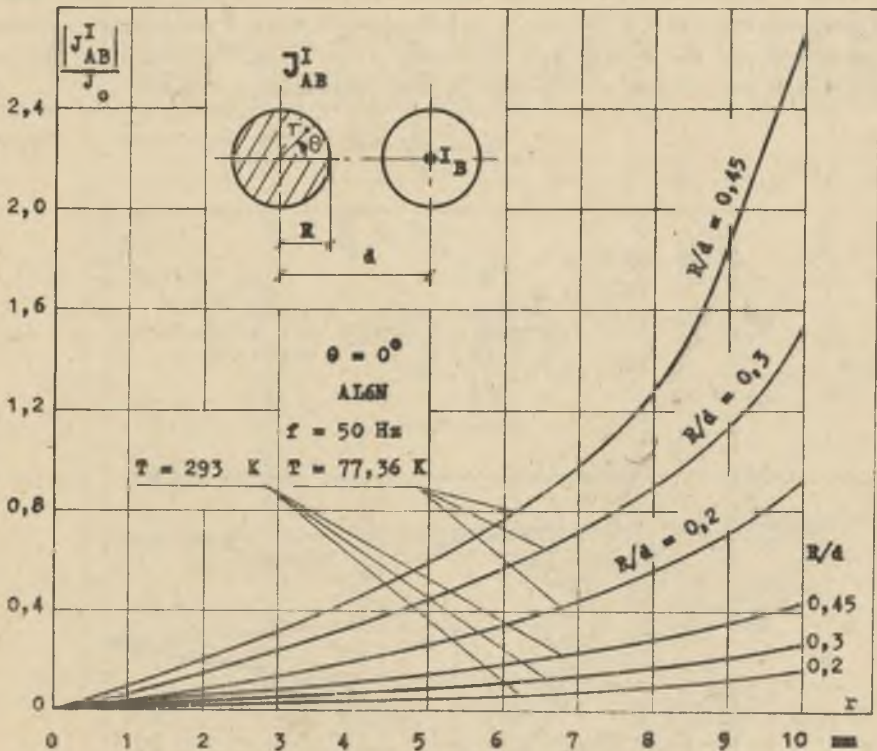
M_n - moduł funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju n -tego rzędu,

β_n - argument tej funkcji.

Otrzymany przedstawioną wyżej metodą wzór (13) na gęstość prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd płynący w linearnym przewodzie równoległym, pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Mjejerowioza w pracy [6] poprzez wprowadzenie skalarnego potencjału magnetycznego w postaci zespolonej i równania Helmholtza w metodzie kolejnych przybliżeń. Wzór ten uzyskał również Manneback w pracy [3] na drodze wprowadzenia i rozwiązania równania ostatecznego.

Dla $n = 1$ wzór (13) przyjmuje postać:

$$J_{AB}^I = 1_z \frac{I_B \sqrt{-j}^m}{\pi d} \cdot \frac{J_1(\sqrt{-j} \pi r)}{J_0(\sqrt{-j} \pi R)} \cos \theta. \quad (14)$$



Rys. 2, Rozkład modułu wektora względnej gęstości prądu indukowanego w walcowym przewodzie aluminiowym 6N, dla $\theta = 0^\circ$ i $f = 50 \text{ Hz}$, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d

Wzór (14) pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Kadena w pracy [2] dla przewodu prętowego umieszczonego w równomiernym polu magnetycznym określonym wzorem (15):

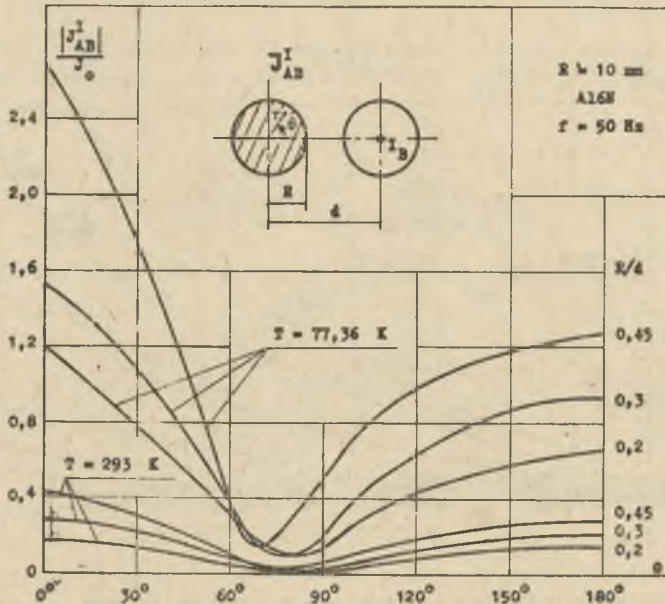
$$H_{AB}^{\text{wym}} = \frac{I_B}{2\pi d}. \quad (15)$$

Otrzymane rozwiązanie na wektor gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym w postaci wzoru (13) jest zatem rozwiązaniem ogólnym, gdyż nie wymaga stosowania założenia upraszczającego dotyczącego zewnętrznego pola magnetycznego oddziaływującego na przewód.

Dla ilustracji wzoru (13) na rys. 2 przedstawiono rozkład modułu wektora względnej gęstości prądu indukowanego w przekroju poprzecznym przewodu aluminiowego 6N, o $R = 10$ mm, dla $\theta = 0^\circ$ i $f = 50$ Hz, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d promienia do odległości od osi przewodu równoległego.

Na rys. 3 przedstawiono rozkład modułu wektora względnej gęstości prądu na powierzchni tego przewodu, w zależności od kąta θ walcowego układu współrzędnych. Na obu powyższych wykresach moduł gęstości prądu wyrażono w jednostkach względnych w stosunku do bazy określonej wzorem:

$$J_o = \frac{|I_B|}{\pi R^2}. \quad (16)$$



Rys. 3. Rozkładu modułu wektora względnej gęstości prądu na powierzchni walcowego przewodu aluminiowego 6N w zależności od kąta θ , dla $R = 10$ mm i $f = 50$ Hz, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d

5. WYPADKOWY WEKTOR PRĄDU W PRZEWODZIE WALCOWYM UMIESZCZONYM W NIERÓWNO-
MIERNYM POLU MAGNETYCZNYM PRĄDU SINUSOIDALNEGO PŁYNĄCEGO W PRZEWODZIE
RÓWNOLEGLYM

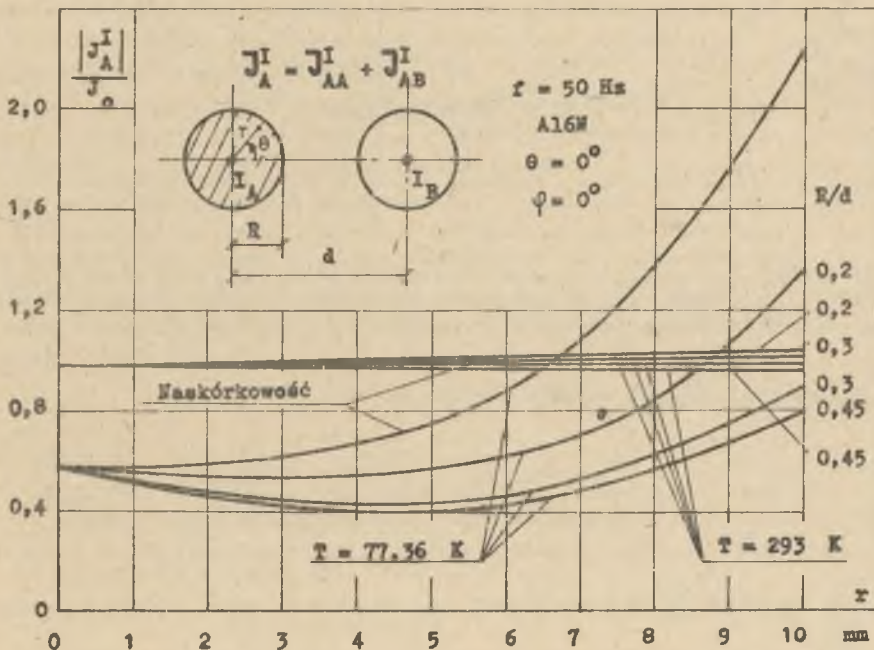
Wypadkowy wektor gęstości prądu J_A^I w rozpatrywanym przewodzie fazy A jest sumą wektorową (w postaci zespolonej) wektora gęstości prądu własnego J_{AA}^I i wektora gęstości prądu indukowanego J_{AB}^I :

$$J_A^I = J_{AA}^I + J_{AB}^I = 1_z (J_{AAz}^I + J_{ABz}^I) = 1_z J_{Az}^I. \quad (17)$$

Wektor gęstości prądu indukowanego określony jest wzorem (13). Wektor gęstości prądu własnego określony jest (z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości) wzorem [9] :

$$J_{AA}^I = 1_z \frac{I_A \sqrt{-j} m}{2\pi R} \cdot \frac{J_0(\sqrt{-j} mr)}{J_1(\sqrt{-j} mR)}. \quad (18)$$

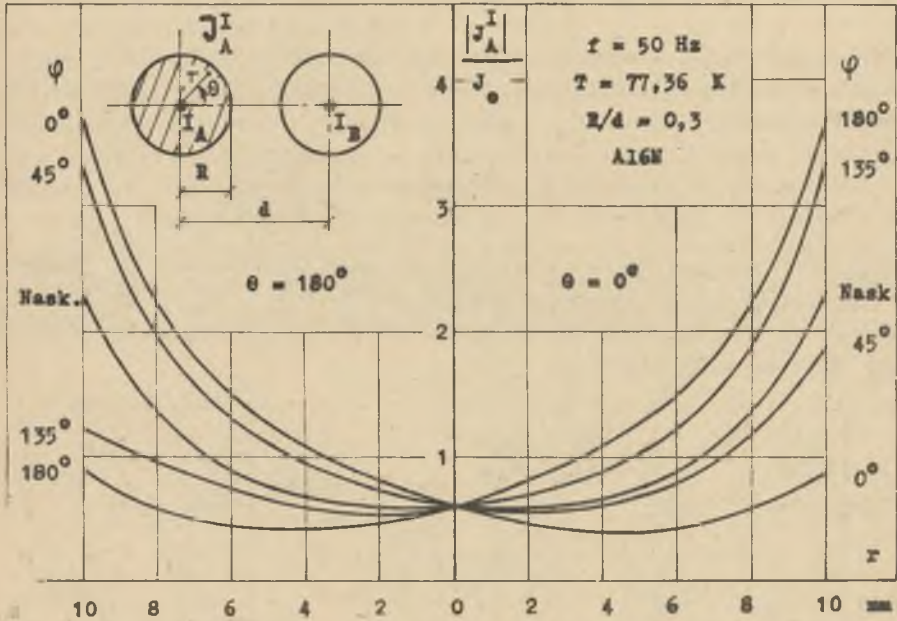
Suma (17) zależna jest w każdym punkcie przekroju przewodu od położenia tego punktu (r, θ), wartości modułów prądów $|I_A|$ i $|I_B|$, wartości stosunku R/d jak również od wartości kąta fazowego $\varphi = \alpha_A - \alpha_B$ między wskazem prądu I_A a wskazem prądu I_B .



Rys. 4. Rozkład modułu wektora względnej gęstości prądu wypadkowego w przekroju kołowym walcowego przewodu aluminiowego 6N dla $\theta = 0^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ i $f = 50 \text{ Hz}$, w temperaturze pokojowej oraz w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d

Na rys. 4 przedstawiono rozkład modułu wektora gęstości prądu wypadkowego w przekroju kołowym walegowego przewodu aluminiowego 6N dla $\theta = 0^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ i $f = 50$ Hz, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d .

Wpływ kąta fazowego φ na rozkład modułu wektora względnej gęstości prądu w przekroju kołowym przewodu walegowego przy ustalonej wartości stosunku R/d , dla kąta $\theta = 0^\circ$ i $\theta = 180^\circ$ przedstawiono na rys. 5.



rys. 5. Rozkład modułu wektora względnej gęstości prądu wypadkowego w przekroju kołowym walegowego przewodu aluminiowego 6N dla $f = 50$ Hz, $R/d = 0,3$ $\theta = 0^\circ$ i $\theta = 180^\circ$, w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach kąta przesunięcia fazowego między prądami I_A i I_B

Kwadrat tego modułu określa się wzorem:

$$|J_{Az}^I|^2 = J_{Az}^I J_{Az}^{I*} = \left[\frac{|I_A|}{2\pi R} \cdot \frac{M_0(\text{mR})}{M_1(\text{mR})} \right]^2 + \frac{|I_A| |I_B| \text{m}^2}{\pi^2 R^2} \cdot \frac{M_0(\text{mR})}{M_1(\text{mR})}$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(\text{mR})}{M_{n-1}(\text{mR})} \cos [\beta_n(\text{mR}) - \beta_{n-1}(\text{mR}) - \beta_0(\text{mR}) + \beta_1(\text{mR}) + \varphi] \cos n\theta +$$

$$+ \left| \frac{I_B}{\pi R} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d} \right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \exp \left\{ j \left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B \right] \right\} \quad (19)$$

$$\cdot \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d} \right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \exp \left\{ -j \left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B \right] \right\} \cos \theta.$$

Na rys. 4 i rys. 5 rozkład modułu wektora gęstości prądu wyrażono w jednostkach względnych w stosunku do bazy danej wzorem (16). Założono przy tym, że $|I_A| = |I_B| = |I|$.

6. ZAKOŃCZENIE

Wzór (17) wraz ze wzorami (13) i (18) określają rozkład wektora gęstości prądu w przewodzie walcowym z uwzględnieniem zjawisk nakórkowości i zbliżenia przy dowolnie związanych ze sobą wartościach prądów I_A i I_B - zarówno co do modułu, jak i również kąta przesunięcia fazowego między nimi.

Z przedstawionych wyżej wykresów wynika, że wpływ zjawiska zbliżenia na rozkład wektora gęstości prądu wypadkowego jest tym większy, im niższa jest temperatura przewodów. Dlatego też zjawiska zbliżenia i nakórkowości są w krioelektrotechnice zagadnieniami, których nie wolno pomijać już dla prądów o częstotliwości przemysłowej 50 Hz.

Disponując otrzymanym wzorem (19) na kwadrat modułu wektora gęstości prądu wypadkowego oraz korzystając z prawa Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej, można określić wartość strat ciepłych w przewodzie, a tym samym można ocenić wpływ zjawisk nakórkowości i zbliżenia na wartość tych strat.

Prezentowana metoda wyznaczania wypadkowego wektora gęstości prądu może mieć duże znaczenie przy wyznaczaniu strat ciepłych w poszczególnych przewodach 3-fazowego krioporowego toru prądowego, w którym ze względu na żądane małe odległości międzyfazowe (w celu ograniczenia strat mocy biernej) zjawisko zbliżenia odgrywa poważną rolę.

LITERATURA

- [1] Falkowski O.I.: *Technożeskaja elektrodinamika*. Swjaz, Moskwa 1978.
- [2] Kaden G.: *Elektromagnitnyje ekrany w wysokocząstotnojj technice i mechanice elektroswjazi*. Gosnierzgoizdat, Moskwa 1957.
- [3] Mannebaek C.: An integral equation for skin - effect in parallel conductors. *J. of Math. and Phys.*, v. 1, 1921.
- [4] Mo Lachlan N.W.: *Funkcje Bessela dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1964.
- [5] Moon P., Spence D.E.: *Teoria pola*. PWN, Warszawa 1966.

- [6] Mjejerowicz Z.A., Czaljan K.M.: Rasczet mietodom posledowatielnych približenij raspriedielenija toka w tokoprowodaoh s ucetom effiekta blizosti. Iz. AN ZSRR, Energiyetika i Transport, nr 3, 1963.
- [7] Mukosjejew Ju. L.: Raspriedielenije pieriemennowo toka w tokoprowodaoh. Energoizdat, Moskwa 1959.
- [8] Piątek Z.: Straty Joule'a w trójfazowych, płaskich torach prądowych chłodzonych ciekłym azotem przy symetrii i asymetrii prądowej. Praca doktorska. Pol. Śl. 1980 (niepublikowana).
- [9] Piątek Z.: Zjawisko naskórkowości w aluminiowym przewodzie o kształcie walca w ciekłym azocie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 64, Gliwice 1979.
- [10] Turowski J.: Elektrodynamika techniczna. WNT, Warszawa 1968.

Wpłynęło do Redakcji dnia 20.VI.1980 r.

Recenzent:

Prof. dr hab. inż. Czesław Królikowski

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА ПЛОТНОСТИ ТОКА
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКЕ В НЕРАВНОМЕРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ
СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА, ПРОТЕКАЮЩЕГО В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОВОЛОКЕ

Р е з ю м е

В статье представлен метод расчета вихревых токов, наводимых в цилиндрической проволоке синусоидальным током, протекающим в параллельной проволоке. Располагая кроме того определенной формулой вектора плотности собственного тока с учетом скин-эффекта, определен главный вектор плотности тока в рассматриваемой цилиндрической плотности.

DISTRIBUTION OF RESULTANT CURRENT DENSITY VECTOR WITHIN
THE CYLINDER CONDUCTOR WHICH IS PLACED IN A NON - HOMOGENOUS
MAGNETIC FIELD OF SINUSOIDAL CURRENT OF PARALLEL CONDUCTOR

S u m m a r y

The method of calculation of eddy currents, induced in the cylinder conductor by the sinusoidal current flowing through a parallel conductor, was presented in this paper.

The resultant current density vector in this cylinder conductor was determined on the basis of the formula for own current density vector; the skin effect was also taken into account.