

Gerard BARTODZIEJ

Instytut Elektroenergetyki  
i Sterowania Układów  
Politechniki Śląskiej

## MODELOWANIE ZŁĄCZY STYKOWYCH LINEARNYCH

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono możliwość modelowania matematycznego i fizycznego linearnych złączy stykowych. Rozważano model deterministyczny złącza stykowego jednorodnego.

### 1. WPROWADZENIE

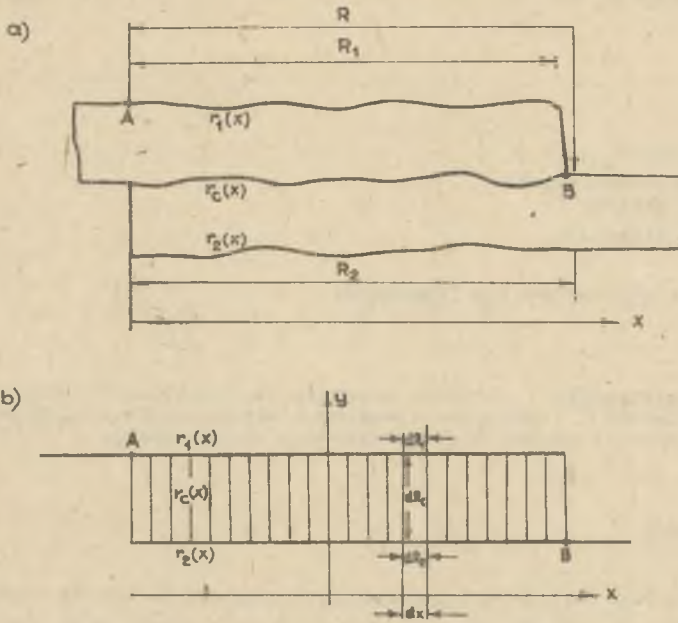
Określenie współzależności podstawowych parametrów złącza stykowych ma duże znaczenie dla określenia zasad wymiarowania złącza przy ich projektowaniu oraz dla oceny właściwości złącza eksploatowanych,

Różnorodność rozwiązań konstrukcyjnych złącza stykowych jest bardzo duża, szeroki zakres stosowania złącza stykowych w elektrotechnice, elektronice, teletechnice itp. stwarza szeroką gamę warunków pracy złącza i wymaganych właściwości. Wiele złącza stykowych spełnia warunek linearności, tj. możliwy jest podział złącza na dowolną ilość jednakowych równolegle połączonych elementów. Złącze takie może być zatem sprowadzone do modelu płaskiego i analizowane - po uproszczeniach jako linearne.

### 2. UOGÓLNIONY MODEL FIZYCZNY ZŁĄCZA STYKOWEGO LINEARNEGO DLA ANALIZY PARAMETRÓW ELEKTRYCZNYCH

Złącza stykowe stosowane do łączenia elektroenergetycznych torów przewodowych mogą być - dla wielu rozwiązań konstrukcyjnych - sprowadzone do układu 2 przewodników o rezystancji rozłożonej  $r_1(x)$  i  $r_2(x)$ , pomiędzy którymi występuje styczność, reprezentowana przez rozłożoną rezystancję ze-stykową  $r_0(x)$ , tworzących złącze linearne (rys. 1)

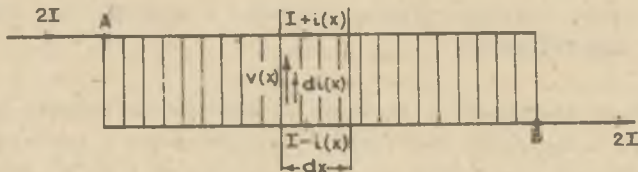
Przyjęcie założenia o pomijalności składowych poprzecznych spadków napięcia w przewodnikach tworzących złącze, wobec spadku napięcia na rezystancji zestykowej, pozwala uzyskać stosunkowo prosty model matematyczny złącza (struktura rys. 1b), wynikający z modelu fizycznego (rys. 1a).



Rys. 1. Złącze stykowe linearne  
a - schemat poglądowy, b - ilustracja przyjętych oznaczeń

Przyjmując elementarne zależności (rys. 2):

$$\begin{aligned} dR_1 &= r_1(x) dx \\ dR_2 &= r_2(x) dx \\ dR_0 &= \frac{r(x)}{dx} \end{aligned} \quad (1)$$



Rys. 2. Ilustracja równań (2) do (5)

oraz zależności wynikające z prawa Ohma:

$$di = - \frac{v(x)}{r_0(x)} dx \quad (2)$$

$$dV = (I+i)r_1(x)dx - (I-i)r_2(x)dx \quad (3)$$

można uzyskać różniczkowe równanie opisujące prąd  $i(x)$  przepływający przez złącze:

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} + \frac{1}{r_o(x)} \cdot \frac{di(x)}{dx} \cdot \frac{dr_o(x)}{dx} - i(x) \frac{r_1(x) + r_2(x)}{r_o(x)} - I \frac{r_1(x) - r_2(x)}{r_o(x)} = 0 \quad (4)$$

Wprowadzenie wielkości pomocniczych  $o(x)$ ,  $\Delta(x)$  prowadzi do prostszej postaci równania:

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} + \frac{1}{r_o(x)} \cdot \frac{dr_o(x)}{dx} \cdot \frac{di(x)}{dx} - i(x) o^2(x) - I \Delta(x) o^2(x) = 0 \quad (5)$$

przy czym:

$$o^2(x) = \frac{r_1(x) + r_2(x)}{r_o(x)} \quad (6)$$

$$\Delta(x) = \frac{r_1(x) - r_2(x)}{r_1(x) + r_2(x)} \quad (7)$$

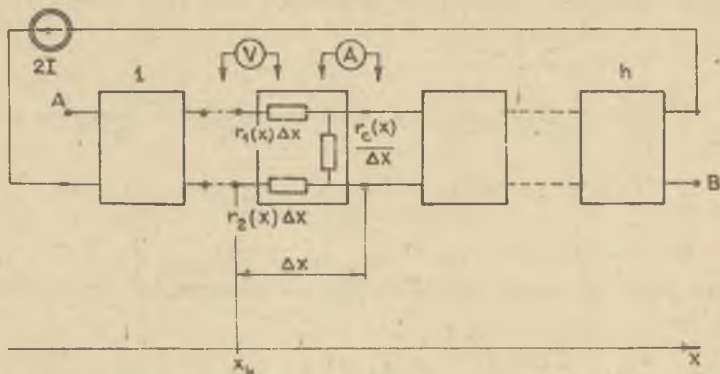
Możliwość uzyskania analitycznej postaci funkcji  $i(x)$  istnieje jedynie dla prostszych postaci funkcji  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$ ,  $r_o(x)$  lub odpowiednich funkcji pomocniczych  $o(x)$ ,  $\Delta(x)$ . W ogólnym przypadku możliwe jest jednak uzyskanie rozwiązania równania w postaci numerycznej przy wykorzystaniu EMC.

Wyznaczenie  $i(x)$  pozwala na uzyskanie funkcji opisujących pozostałe parametry elektryczne złącza, spadków napięć, strat mocy, rezystancji całkowitej złącza.

### 3. MODELE ANALOGOWE DLA WYZNACZANIA PARAMETRÓW ELEKTRYCZNYCH ZŁĄCZA LINEARNEGO

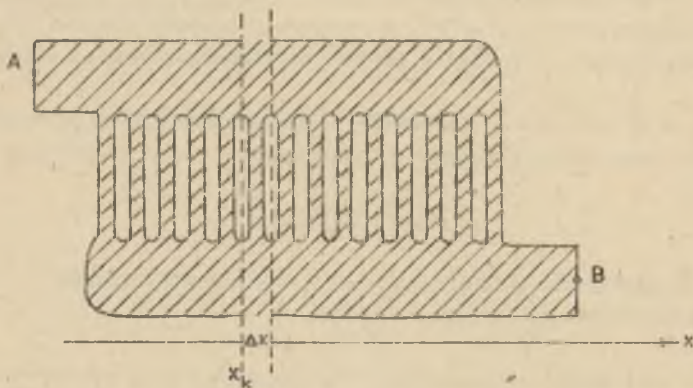
Duża pracochłonność rozwiązywania równania (4) opisującego rozkład prądu w złączu stykowym linearym (zarówno dla uzyskania rozwiązania o postaci analitycznej, jak również numerycznej) skłania do wykorzystania modelu analogowego złącza w postaci rezystancyjnej linii łańcuchowej do bezpośredniego pomiarowego wyznaczenia rozplywu prądu (i innych parametrów z nim związanych).

Rys. 3 ilustruje sposób realizacji modelu analogowego np. przy wykorzystaniu analizatora sieciowego. Ze względu na małe wartości rezystancji występujących w złączu stykowym, modelowanie winno być przeprowadzone przy odpowiednio zwiększonych rezystancjach modelu (skala odwzorowania rezystancji  $10^3 \dots 10^6$  dla elektroenergetycznych złączy stykowych).



Rys. 3. Model analogowy złącza w postaci linii łańcuchowej

Do realizacji modelu złącza linearnego może być wykorzystany papier przewodzący lub folia metalowa (np. na płytce laminowanej przeznaczony dla obwodów drukowanych (rys. 4)). Zaletą tego sposobu jest łatwość odwzorowania dowolnego ukształtowania obu elementów (styków) tworzących linearnie złącze stykowe i łatwość uzyskiwania żądanej rezystancji zestykowych przez zmianę szerokości i długości ścieżek łączących oba elementy.



Rys. 4. Model fizyczny płaski złącza stykowego linearnego

#### 4. ANALIZA MODELU ZŁĄCZA STYKOWEGO JEDNORODNEGO

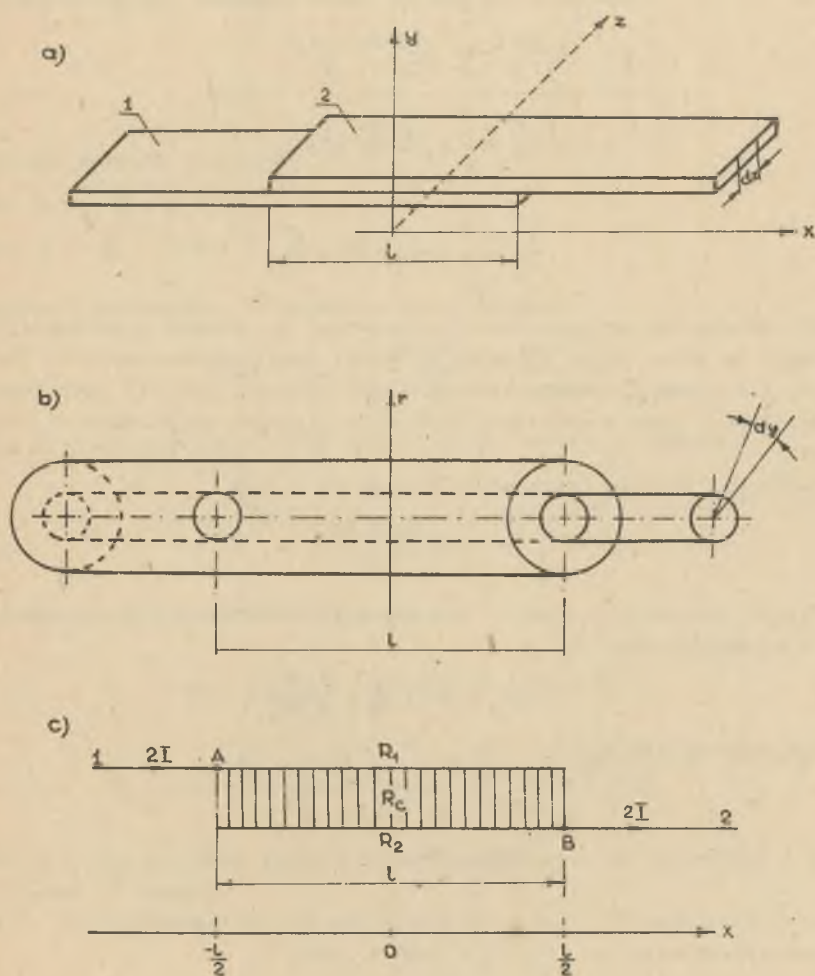
##### 4.1. Założenia i określenie

Złącze stykowe jednorodne cechuje stałość wartości rezystancji jednostkowych wzdłuż złącza:

$$r_1(x) = r_1; \quad r_2(x) = r_2; \quad r_c(x) = r_c.$$

Model złącza jednorodnego może odwzorowywać:

- złącza stykowe dwóch elementów toru prądowego ("na zakładkę") stosowane dla przewodów szynowych i połączeń aparatów elektrycznych z przewodami szynowymi (rys. 5a),
- złącza stykowe przewodów w liniach elektroenergetycznych (napowietrznych i kablowych) wykonywane za pomocą zaprasowania (rys. 5b).



Rys. 5. Struktura fizyczna podstawowych złączy stykowych jednorodnych (a) i (b) oraz ilustracja oznaczeń w p.4

Rozważa się zatem złącza stykowe posiadające następujące właściwości:

- a - elementy 1 i 2 (rys. 5), tworzące złącze, posiadają stały przekrój,
- b - długość złącza jest znacznie większa od jego wymiaru poprzecznego prostopadłego do powierzchni zetknięcia elementów 1 i 2,
- c - złącze można podzielić na dowolną ilość jednakowych części przez przecięcie płaszczyznami równoległymi do osi symetrii złącza (oś x na rysunku 5).

Rezystancje występujące w złączu mogą być opisane zależnościami:

$$R_1 = \int_0^1 r_1(x) dx = r_1 l \quad (8)$$

$$R_2 = \int_0^1 r_2(x) dx = r_2 l \quad (9)$$

$$\frac{1}{R_0} = \int_0^1 \frac{1}{r_0(x)} dx = \frac{1}{r_0} \quad (10)$$

Przyjęto założenie, że rezystancja zestykowa  $R_0$  wynika z równomiernego rozłożenia na powierzchni zetknięcia bardzo dużej liczby zestyków elementarnych. W rozważanym modelu matematycznym złącza (rys. 5c) rezystancja  $R_0$  może przewodzić prąd elektryczny jedynie w kierunku prostopadłym do osi modelu.

Określa się średnią rezystancję elementów 1 i 2:

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (11)$$

oraz charakteryzuje się różnicę rezystancji elementów 1 i 2 za pomocą parametru bezwymiarowego  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{R_1 - R_2}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad (12)$$

Wynikają stąd zależności:

$$\begin{aligned} R_1 &= (1 + \Delta)R \\ R_2 &= (1 - \Delta)R \end{aligned} \quad (13)$$

Rezystancję zestyku  $R_0$  można określić parametrem bezwymiarowym  $C$  zdefiniowanym zależnością

$$C^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_0} = \frac{2R}{R_0} = c^2 \cdot l^2 \quad (14)$$

4.2. Rozpływ prądu i rozkład napięć w złączu

Do wyznaczenia rozpływu prądów i rozkładu napięć w złączu wykorzystano uogólnione równanie różniczkowe (5), które dla złącza jednorodnego (rys.5) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} - \frac{C^2}{I} i(x) - I \Delta \frac{C^2}{I} = 0 \quad (15)$$

Rozwiązanie takiego równania podał J. Hus [2] w postaci:

$$i(x) = I \left[ - \frac{\text{sh}\left(\frac{Cx}{I}\right)}{\text{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} + \frac{\Delta \text{ch}\left(\frac{Cx}{I}\right)}{\text{oh}\left(\frac{C}{2}\right)} - \Delta \right] \quad (16)$$

przyjmując warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = -\frac{1}{2} \quad i &= I \\ \text{dla } x = \frac{1}{2} \quad i &= -I \end{aligned} \quad (17)$$

Wychodząc z zależności (3) uzyskuje się równanie:

$$V(x) = I R_0 C \left[ \frac{\text{oh}\left(\frac{Cx}{I}\right)}{\text{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} - \frac{\Delta \text{sh}\left(\frac{Cx}{I}\right)}{\text{oh}\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \quad (18)$$

Spadek napięcia podłużny  $E(x)$  można opisać równaniem całkowym:

$$E(x) = \int_x^{\frac{1}{2}} [I - i(x)] dR_2 = \int_x^{\frac{1}{2}} [I - i(x)] \frac{1-\Delta}{I} R dx \quad (19)$$

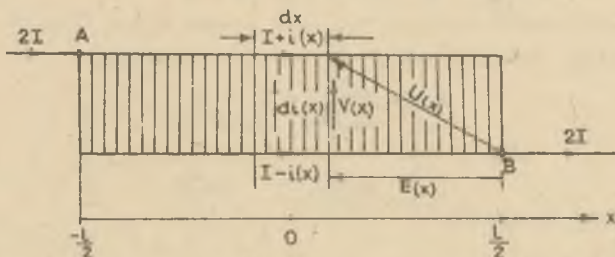
Wykorzystując zależność (16) uzyskuje się

$$\begin{aligned} E(x) = I R_0 C \frac{1-\Delta}{2} & \left[ C \left(1 + \Delta\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{I}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\text{oh}\left(\frac{C}{2}\right) - \text{oh}\left(\frac{Cx}{I}\right)}{\text{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} - \Delta \frac{\text{sh}\left(\frac{C}{2}\right) - \text{sh}\left(\frac{Cx}{I}\right)}{\text{oh}\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Spadek napięcia pomiędzy punktem o współrzędnej  $x$  na elemencie 1 i punktem B (rys. 6) wynosi:

$$U(x) = V(x) + E(x) \quad (21)$$

$$U(x) = IR_0 C \left\{ \frac{1+\Delta}{2} \left[ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{Cx}{l}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} - \frac{\Delta \operatorname{sh}\left(\frac{Cx}{l}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{C}{2}\right)} \right] + \frac{1-\Delta}{2} \left[ C(1+\Delta) \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) + \operatorname{oth}\left(\frac{C}{2}\right) - \Delta^2 \operatorname{th}\left(\frac{C}{2}\right) \right] \right\} \quad (22)$$



Rys. 6. Ilustracja równań (16) do (25)

Całkowity spadek napięcia na złączu określa równanie (23) dla

$$x = -\frac{l}{2} \quad (23)$$

$$U_{AB} = IR_0 C \left[ C \frac{1-\Delta^2}{2} + \Delta^2 \operatorname{th}\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{oth}\left(\frac{C}{2}\right) \right] \quad (24)$$

Rezystancja całkowita złącza może być wyznaczona w oparciu o zależność (24)

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{2I} = \frac{R_0 C}{2} \left[ C \frac{1-\Delta^2}{2} + \Delta^2 \operatorname{th}\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{oth}\left(\frac{C}{2}\right) \right] \quad (25)$$

#### 4.3. Analiza numeryczna rozkładu prądów i spadków napięć w złączu stykowym jednorodnym

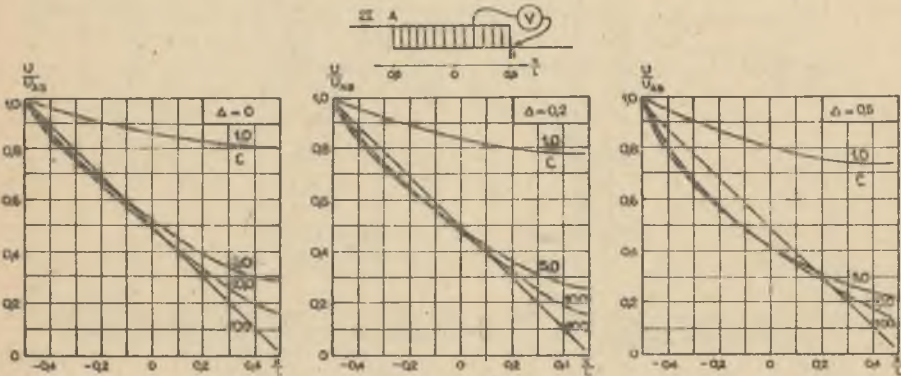
Dla oceny ilościowej rozkładu prądów spadków napięć i strat mocy w złączu ograniczono się do rozważania modelu złącza jednorodnego, przyjmując układ wielkości względnych. Względny spadek napięcia na jednorodnym złączu linearnym opisuje wzór wynikający z zależności (23) i (24):

$$U(x) = \frac{U(x)}{U_{AB}} = \left[ \frac{C}{2}(1-\Delta^2) + \Delta^2 \operatorname{th}\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{oth}\left(\frac{C}{2}\right) \right]^{-1} \cdot \left\{ \frac{1+\Delta}{2} \left[ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{Cx}{l}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} - \frac{\Delta \operatorname{sh}\left(\frac{Cx}{l}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{C}{2}\right)} \right] + \frac{1-\Delta}{2} \left[ C(1+\Delta) \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) + \operatorname{oth}\left(\frac{C}{2}\right) + \Delta^2 \operatorname{th}\left(\frac{C}{2}\right) \right] \right\} \quad (26)$$



Wykresy zależności (26) przedstawiono na rys. 7. Udział spadku napięcia na rezystancji zestykowej w oalkowitym spadku napięcia na złączu jednorodnym można wyznaczyć z zależności (18) i (24):

$$\frac{V_{\max}}{U_{AB}} = \frac{\text{oth}(\frac{C}{2}) + \Delta \text{th}(\frac{C}{2})}{C \frac{(1-\Delta^2)}{2} + \Delta^2 \text{th}(\frac{C}{2}) + \text{oth}(\frac{C}{2})} \quad (27)$$



Rys. 7. Rozkład spadków napięcia na złączach stykowych jednorodnych

Na rys. 8 podano wykresy zależności (27), wskazujące na celowość stosowania złącza symetrycznych ( $\Delta = 0$ ) jako zapewniających najmniejszy spadek napięcia na rezystancji zestykowej (przy zadanym oalkowitym spadku napięcia na złączu). Wartość spadku napięcia na rezystancji zestykowej decyduje, m.in. o zachowaniu się zestyków elementarnych w złączu i ma podstawowe znaczenie dla pracy złącza, zwłaszcza przy przepływie prądów zwarcio- wych. Rozkład prądu wzdłuż elementu 1 złącza wyrażony w jednostkach niemianowanych można opisać wykorzystując zależność (16):

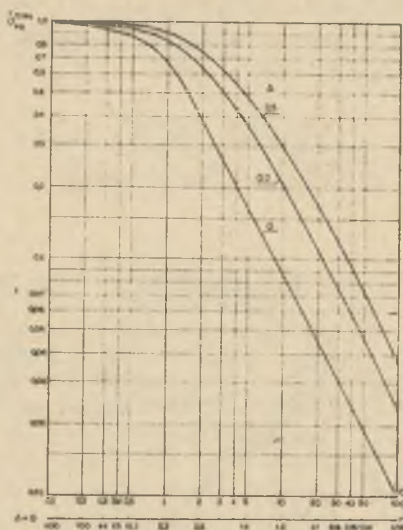
$$\frac{I+1}{2I} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta \text{ch}(\frac{Cx}{I})}{\text{ch}(\frac{C}{2})} - \frac{\text{sh}(\frac{Cx}{I})}{\text{sh}(\frac{C}{2})} \right] \quad (28)$$

Wykresy podano na rys. 9.

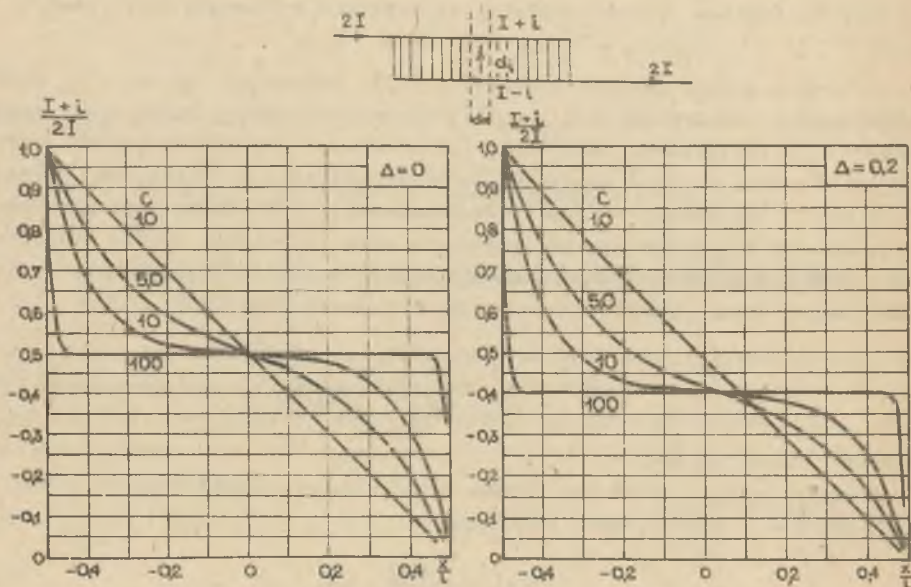
Rozkład gęstości względnej prądu poprzecznego przepływającego przez rezystancję  $R_0$  zdefiniowano wzorami:

$$j(x) = \frac{di(x)}{dx} \cdot \frac{1}{2I} \quad (29)$$

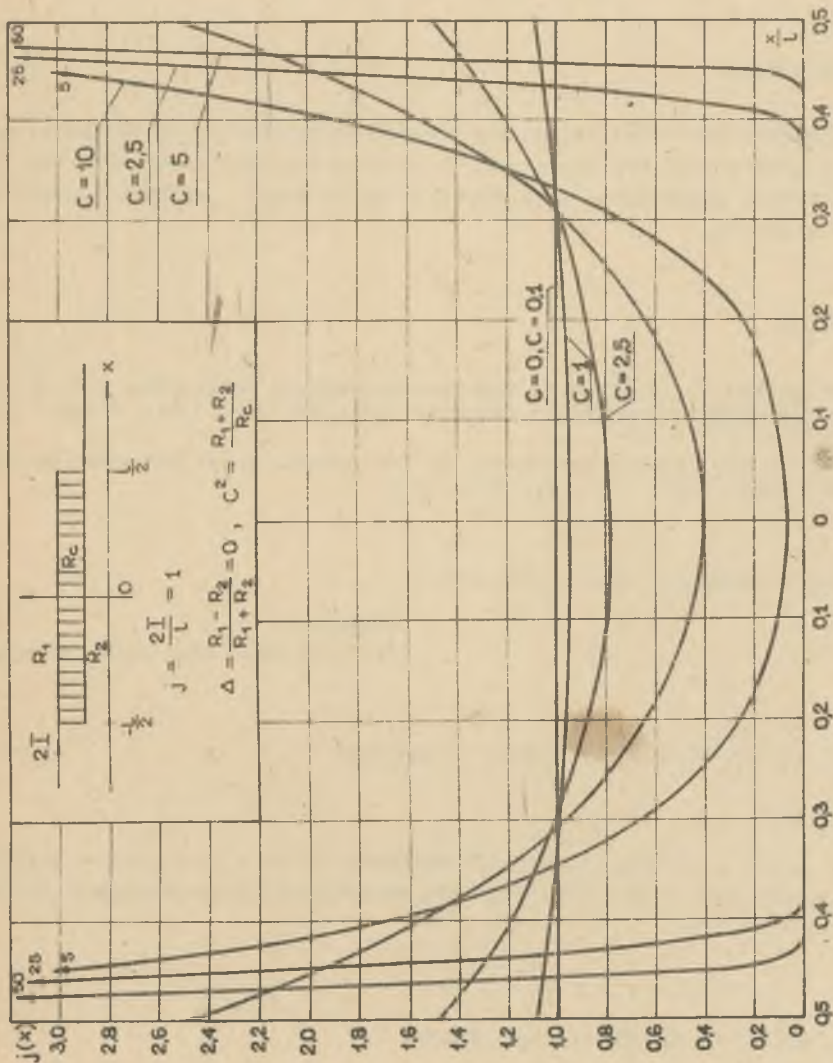
gdzie  $\frac{2I}{I}$  wyraża średnią gęstość liniową prądu poprzecznego.



Rys. 8. Udział największego spadku napięcia na rezystancji zestykowej w całkowitym spadku napięcia na złączu stykowym jednorodnym



Rys. 9. Rozpływ prądu w złączach stykowych jednorodnych



Rys. 10. Rozkład gęstości prądu poprzecznego w złączach stykowych jednorodnych

Biorąc pod uwagę zależność (16) można napisać:

$$j(x) = \frac{IC}{1} \left[ -\frac{\Delta \operatorname{ch}\left(\frac{Cx}{1}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{C}{2}\right)} + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{Cx}{1}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \frac{1}{2I} = \frac{C}{2} \left[ -\frac{\Delta \operatorname{sh}\left(\frac{Cx}{1}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{C}{2}\right)} + \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{Cx}{1}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{C}{2}\right)} \right] \quad (30)$$

Wyniki obliczeń rozkładu  $j(x)$  przedstawiono na wykresach rys. 10.

## 5. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono ogólne równania różniczkowe opisujące rozpiływ prądu w złączu stykowym linearnym. Podano rozwiązanie szczególne dla złącza stykowego jednorodnego, opisujące rozpiływ prądu i rozkład spadków napięcia w złączu.

## LITERATURA

- [1] Bartodziej G.: Étude d'un modèle mathématique applicable à un raccord de conducteur nu de ligne aérienne. EdF. DER Doc. de travail IMO (BG)MC. 25 Mai 1978.
- [2] Hu. J.: The contact resistance of lap joints. Proc. VII Conf. El. Contact Phys. Paris 1974, p. 369...374.

Wpłynęło do Redakcji dnia 20.VI.1980 r.

Recenzent:

Prof. dr hab. inż. Jerzy Maksymiuk

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕАРНЫХ КОНТАКТНЫХ СОЕДИНЕНИИ

### Резюме

В статье рассмотрены возможности математического и физического моделирования контактных соединений. Обсуждена детерминистическая модель однородного соединения.

## THE MODELLING OF THE LINEAR LAP JOINTS

### Summary

The paper presents the possibility of mathematical and physical modelling of the linear lap joints. The deterministic model of the homogeneous joints is analysed.

