ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 68 Nr kol. 643

Marian PASKO

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

WYKORZYSTANIE WRAŻLIWOŚCI DRUGIEGO RZĘDU W SYNTEZIE FILTRÓW AKTYWNYCH RC

Streszczenie. W artykule, w oparciu o definicję wrażliwości drugiego rzędu [6], wyznaczono sumaryczną wrażliwość dobroci Q i pulsacji ω_0 napięciowej funkcji przejścia drugiego stopnia dla rozkładu Horowitza i Calahana i porównano z sumaryczną wrażliwością pierwszego rzędu [5].

Wprowadzenie

Zagadnienia wrażliwości układu na zmianę elementów rozpatrywane są od wielu lat. Na ten temat ukazało się dotychczas wiele znaczących prac, jednak prawie wszystkie prace poświęcono wrażliwości pierwszego rzędu. Uwzględnienie tylko wrażliwości pierwszego rzędu jest równoznaczne, przy badaniu zmian funkcji układowej lub innej najlepiej charakteryzującej wielkości realizowanej funkcji, uwzględnieniu tylko wyrazów pierwszego rzędu w rozwinięciu na szereg Taylora. Jest to niewystarczające w wielu przypadkach. Dla pełniejszej oceny oddziaływania różnych parametrów na funkcję układową wprowadza się definicje wrażliwości drugiego rzędu [2], [3], które są ściśle związane z uwzględnieniem wyrazów drugiego rzędu w rozwinięciu na szereg Taylora.

W dalszej części pracy będziemy korzystać z definicji wrażliwości drugiego rzędu [6].

$$S^T_{x_i,x_i} = \frac{\partial(S^T_{x_i})}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\partial(S^T_{x_i})}{\partial x_i} x_i = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \cdot \frac{x_i^2}{T} + S^T_{x_i} - (S^T_{x_i})^2 \tag{1}$$

a w przypadku, gdy druga pochodna liczona jest ze względu na inny parametr np. x_j, wrażliwości określona jest wzorem

$$S^T_{x_i,x_j} = \frac{\partial(S^T_{x_i})}{\partial(\ln x_j)} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{x_i x_j}{T} - S^T_{x_i} S^T_{x_j} \tag{2}$$

gdzie:

$$S_{x_i}^{T} = \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{T} \tag{3}$$

tzw. wrazliwość klasyczna pierwszego rzędu podana przez Bodego.

Z definicji wrażliwości pierwszego rzędu (3) wynikają następujące własności [1], [4]. Podamy tylko niektóre z nich, z których będziemy korzystać z dalszej części pracy.

Niech:

$$T' = \left[T(x)\right]^n; \quad \text{to} \quad S_x^{T'} = n\, S_x^{T} \tag{4}$$

$$T' = T_1(x)\, T_2(x); \quad \text{to} \quad S_x^{T'} = S_x^{T_1} + S_x^{T_2} \tag{5}$$

$$T' = \frac{T_1(x)}{T_2(x)}; \quad \text{to} \quad S_x^{T'} = S_x^{T_1} - S_x^{T_2} \tag{6}$$

W pracy ograniczymy się do analizy zmian parametrów filtrów aktywnych RC drugiego rzędu, w których elementem aktywnym jest konwerter impedancji ujemnej lub żyrator, o napięciowej funkcji przejścia o postaci

$$K_u(s) = \frac{L(s)}{D(s)} = \frac{L(s)}{s^2 + 2\delta s + \omega_o^2} = \frac{L(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_o} \tag{7}$$

gdzie: $L(s)$ jest wielomianem co najwyżej drugiego stopnia, posiadającym zera w początku układu lub w nieskończoności. Wielomian $D(s)$ posiada parę zer zespolonych sprzężonych.

Dla oceny zmian funkcji przejścia w takim wypadku wystarczy ocenić wpływ zmian mianownika $D(s)$, którego współczynniki określają dobroć Q oraz pulsację środkową ω_o, zgodnie z zależnościami

$$Q = \frac{\sqrt{a_o a_2}}{a_1} \tag{8}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{a_o}{a_2}} \tag{9}$$

Korzystając z zależności (4, 5, 6), mamy

$$S_{x_i}^{Q} = \frac{1}{2}\left(S_{x_i}^{a_o} + S_{x_i}^{a_2} - 2S_{x_i}^{a_1}\right) \tag{10}$$

$$S^{\omega_o}_{x_i} = \frac{1}{2}\left(S^{a_o}_{x_i} - S^{a_2}_{x_i}\right) \tag{11}$$

Natomiast wrażliwości drugiego rzędu przyjmują postać

$$S^{Q}_{x_i,x_i} = \frac{1}{2}\left(S^{a_o}_{x_i,x_i} + S^{a_2}_{x_i,x_i} - 2S^{a_1}_{x_i,x_i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\delta^2 a_o}{\delta x_i^2}\cdot\frac{x_i^2}{a_o} + S^{a_o}_{x_i} - \left(S^{a_o}_{x_i}\right)^2 + \frac{\delta^2 a_2}{\delta x_i^2}\cdot\frac{x_i^2}{a_2} + S^{a_2}_{x_i} - \left(S^{a_2}_{x_i}\right)^2 - \right. \tag{12}$$

$$\left. - 2\left[\frac{\delta^2 a_1}{\delta x_i^2}\cdot\frac{x_i^2}{a_1} + S^{a_1}_{x_i} - \left(S^{a_1}_{x_i}\right)^2\right]\right\}$$

$$S^{\omega_o}_{x_i,x_i} = \frac{1}{2}\left(S^{a_o}_{x_i,x_i} - S^{a_2}_{x_i,x_i}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta^2 a_o}{\delta x_i^2}\cdot\frac{x_i^2}{a_o} + S^{a_o}_{x_i} - \left(S^{a_o}_{x_i}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta^2 a_2}{\delta x_i^2}\cdot\frac{x_i^2}{a_2} - S^{a_2}_{x_i} + \left(S^{a_2}_{x_i}\right)^2\right] \tag{13}$$

$$S^{Q}_{x_i,x_j} = \frac{1}{2}\left(S^{a_o}_{x_i,x_j} + S^{a_2}_{x_i,x_j} - 2S^{a_1}_{x_i,x_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\delta^2 a_2}{\delta x_i\,\delta x_j}\cdot\frac{x_i x_j}{a_o} - S^{a_o}_{x_i}\, S^{a_o}_{x_j} + \frac{\delta^2 a_2}{\delta x_i\,\delta x_j}\cdot\frac{x_i x_j}{a_2} - S^{a_2}_{x_i}\, S^{a_2}_{x_j} - \right. \tag{14}$$

$$\left. - 2\,\frac{\delta^2 a_1}{\delta x_i\,\delta x_j}\cdot\frac{x_i x_j}{a_1} + 2\, S^{a_1}_{x_i}\, S^{a_1}_{x_j}\right]$$

$$S^{\omega_o}_{x_i,x_j} = \frac{1}{2}\left(S^{a_o}_{x_i,x_j} - S^{a_2}_{x_i,x_j}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta^2 a_o}{\delta x_i\,\delta x_j}\cdot\frac{x_i x_j}{a_o} - S^{a_o}_{x_i}\, S^{a_o}_{x_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta^2 a_2}{\delta x_i\,\delta x_j}\cdot\frac{x_i x_j}{a_2} + S^{a_2}_{x_i}\, S^{a_2}_{x_j}\right] \tag{15}$$

Jeżeli a_o, a_1, a_2 są funkcjami liniowymi zmiennego parametru, to wyrażenia (12) i (13) uproszczą się do postaci

$$S^{Q}_{x_i,x_i} = S^{Q}_{x_i} - \frac{1}{2}\left[\left(S^{a_0}_{x_i}\right)^2 + \left(S^{a_2}_{x_i}\right)^2 - 2\left(S^{a_1}_{x_i}\right)^2\right] \tag{16}$$

$$S^{\omega_o}_{x_i,x_i} = S^{\omega_o}_{x_i} - \frac{1}{2}\left[\left(S^{a_o}_{x_i}\right)^2 - \left(S^{a_2}_{x_i}\right)^2\right] \tag{17}$$

Określenie sumarycznej wrażliwości drugiego rzędu dla rozkładu Horowitza i Calahana

Dla realizacji funkcji w klasie RC - NIC, przy rozkładzie optymalnym Horowitza, wielomian D(s) ma postać [5]

$$D(s) = A(s) - kB(s) = (s+\alpha)^2 - k\beta s = a_2 s^2 + a_1 s + a_o$$

dla którego $a_2 = 1$; $a_1 = 2\alpha - k\beta$; $a_c = \alpha^2$

$$Q = \frac{\alpha}{2\alpha - k\beta} \tag{18}$$

$$\omega_o = \alpha \tag{19}$$

$$\sum\left|S^{Q}_{x_i}\right| = \left|S^{Q}_{\alpha}\right| + \left|S^{Q}_{\beta}\right| + \left|S^{Q}_{k}\right| = 3(2Q-1) = \Delta'_Q \tag{20}$$

$$\sum\left|S^{\omega_o}_{x_i}\right| = \left|S^{\omega_o}_{\alpha}\right| + \left|S^{\omega_o}_{\beta}\right| + \left|S^{\omega_o}_{k}\right| = 1 = \Delta'\omega_o \tag{21}$$

Wrażliwości drugiego rzędu obliczane na podstawie zależności (12),(13), (14), (15) odpowiednio wynoszą

$$S^{Q}_{\alpha,\alpha} = S^{Q}_{\beta,\beta} = S^{Q}_{k,k} = S^{Q}_{k,\beta} = -S^{Q}_{\alpha,\beta} = -S^{Q}_{\alpha,k} = 2Q(2Q-1)$$

$$S^{\omega_o}_{\alpha,\alpha} = S^{\omega_o}_{\beta,\beta}\ S^{\omega_o}_{k,k} = S^{\omega_o}_{k,\beta} = S^{\omega_o}_{\alpha,\beta} = S^{\omega_o}_{\alpha,k} = 0$$

Natomiast

$$\sum\left|S^{Q}_{x_i,x_i}\right| + \sum_{i\neq j}\left|S^{Q}_{x_i,x_j}\right| = 12Q(2Q-1) = \Delta''Q \tag{22}$$

$$\sum \left| S^{\omega_0}_{x_i,x_i} \right| + \sum_{i \neq j} \left| S^{\omega_0}_{x_i,x_j} \right| = 0 = \Delta''\omega_0 \qquad (23)$$

Dla realizacji funkcji w klasie RC-żyrator, przy rozkładzie Calahana, wielomian D(s) ma postać [5]

$$D(s) = A(s) + kB(s) = (s + \alpha)^2 + kb^2 = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

dla którego: $a_2 = 1$; $a_1 = 2\alpha$; $a_0 = \alpha^2 + kb^2$

$$Q = \frac{\sqrt{\alpha + kb^2}}{2\alpha} \qquad (24)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + kb^2} \qquad (25)$$

$$\sum \left| S^Q_{x_i} \right| = \left| S^Q_\alpha \right| + \left| S^Q_b \right| + \left| S^Q_k \right| = 2{,}5\ (1 - \frac{1}{4Q^2}) = \Delta'_Q \qquad (26)$$

$$\sum \left| S^{\omega_0}_{x_i} \right| = \left| S^{\omega_0}_\alpha \right| + \left| S^{\omega_0}_b \right| + \left| S^{\omega_0}_k \right| = 1{,}5(1 - \frac{1}{4Q^2}) + \frac{1}{4Q^2} = \Delta'\omega_0 \qquad (27)$$

Wrażliwości drugiego rzędu wynoszą:

$$S^Q_{\alpha,\alpha} = S^Q_{b,b} = -S^Q_{\alpha b} = 2S^Q_{b,k} = -2S^Q_{\alpha k} = 4S^Q_{k,k} = \frac{1}{2Q^2}\ (1 - \frac{1}{4Q^2})$$

$$S^{\omega_0}_{\alpha,\alpha} = -S^{\omega_0}_{\alpha,b} = 2S^{\omega_0}_{b,b} = 2S^{\omega_0}_{b,k} = -2S^{\omega_0}_{\alpha,k} = 4S^{\omega_0}_{k,k} = \frac{1}{2Q^2}\ (1 - \frac{1}{4Q^2})$$

Natomiast

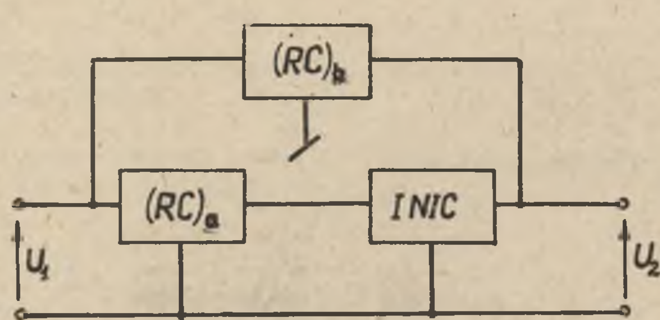
$$\sum \left| S^Q_{x_i,x_i} \right| + \sum_{i \neq j} \left| S^Q_{x_i,x_j} \right| = \frac{17}{8Q^2}\ (1 - \frac{1}{4Q^2}) = \Delta''_Q \qquad (28)$$

$$\sum \left| S^{\omega_0}_{x_i,x_i} \right| + \sum_{i \neq j} \left| S^{\omega_0}_{x_i,x_j} \right| = \frac{15}{8Q^2}\ (1 - \frac{1}{4Q^2}) = \Delta''\omega_0 \qquad (29)$$

Zakończenie

Na podstawie przyjętych definicji określono sumaryczną wrażliwość drugiego rzędu dla Q i ω_0 bez wnikania w konkretne rozwiązanie układowe podobnie, jak to miało miejsce przy określeniu sumarycznej wrażliwości pierwszego rzędu [5]. Należy zaznaczyć, że tak obliczona sumaryczna wrażliwość wypadkowa jest największa z możliwych i w konkretnych rozwiązaniach może być mniejsza ze względu na wzajemną kompensację. Dla potwierdzenia tego faktu rozpatrzmy wrażliwość dobroci Q dla praktycznej realizacji filtru o funkcji przejścia (7), posiadającej zero w początku układu

Realizację przeprowadzimy w oparciu o strukturę Yanagisawy podaną na rys. 1, z uwzględnieniem rozkładu Horowitza [1].



Rys. 1

Funkcja (7) przyjmie wówczas postać:

$$K_u(s) = \frac{Hs}{(s+\omega_0)^2 - 2(\omega_0 - \sigma)s} \tag{30}$$

Wybierając dodatkowy wielomian $q(s) = s + \omega_0$, dzieląc licznik i mianownik wyrażenia (30), otrzymujemy:

$$K_u(s) = \frac{\frac{Hs}{s+\omega_0}}{s+\omega_0 - \frac{2(\omega_0-\sigma)s}{s+\omega_0}} = \frac{ky_{21a} - y_{21b}}{y_{22b} - ky_{22a}} \tag{31}$$

Porównując stronami wyrażenie (31), pamiętając jednak, że czwórniki $(RC)_a$ i $(RC)_b$ są realizowane za pomocą czwórników RC kształtu ˥, otrzymujemy strukturę filtru podaną na rys. 2, na którym podane są także wynikające z tego rozkładu wartości elementów prototypu filtru.

Przejście do rzeczywistych wartości elementów RC wymaga pomnożenia każdego R i podzielenia każdego C przez współczynnik skali λ, wybrany w ten sposób, aby największy spośród elementów obwodu nie przekroczył technologicznie rozsądnej wartości.

Funkcja przejścia dla struktury z rys. 2 ma postać

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-k\frac{s}{R_aC_a}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_aC_a} + \frac{1}{R_bC_b} - \frac{k}{R_aC_b}\right)s + \frac{1}{R_aR_bC_aC_b}} \tag{32}$$

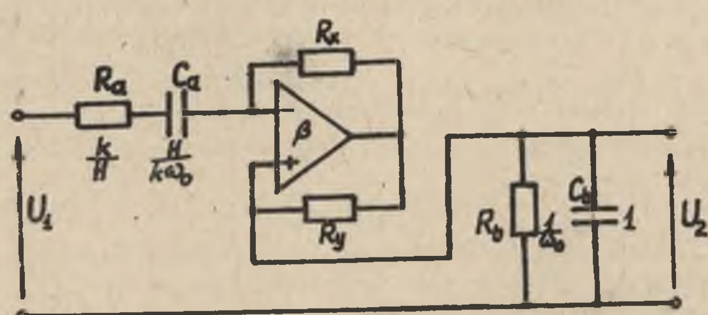
stąd:

$$a_0 = \frac{1}{R_aR_bC_aC_b}$$

$$a_1 = \frac{1}{R_aC_a} + \frac{1}{R_bC_b} - \frac{k}{R_aC_b}$$

$$a_2 = 1$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_aC_a}{R_bC_b}} + \sqrt{\frac{R_bC_b}{R_aC_a}} - k\sqrt{\frac{R_bC_a}{R_aC_b}}}$$



Rys. 2

Wykorzystując relacje (12), (14) oraz przyjmując wariant doboru elementów w ten sposób, aby $R_a = R_b$, $C_a = C_b$, a regulowany jest współczynnik konwersji k konwertera impedancji ujemnej, który jest określony stosunkiem rezystancji $\frac{R_x}{R_y}$ w konwerterze (rys. 2), otrzymujemy

$$S^Q_{R_a,R_a} = S^Q_{C_b,C_b} = S^Q_{R_b,R_b}\ S^Q_{C_a,C_a} = Q(Q-1)$$

$$S^Q_{k,k} = 2Q(2Q-1)$$

$$S^{Q}_{R_a,R_b} = S^{Q}_{C_a,C_b} = -S^{Q}_{R_a,C_b} = Q(Q-1)$$

$$S^{Q}_{R_b,C_b} = -S^{Q}_{R_b C_a} = Q^2$$

$$S^{Q}_{R_b,k} = -S^{Q}_{C_a} = -S^{Q}_{C_b} = Q(1-2Q)$$

$$S^{Q}_{R_a,k} = (2Q-1)(Q-2); \quad S^{Q}_{R_a,C_a} = Q(Q-2)$$

Przyjmując, że dla praktycznych celów interesuje nas przypadek dla którego $Q \gg 1$, wówczas:

$$\sum_i \left| S^{Q}_{x_i,x_i} \right| + \sum_{i \neq j} \left| S^{Q}_{x_i,x_j} \right| \cong 22\, Q^2$$

co w zupełności potwierdza wyprowadzoną uprzednio relację (22). Dla pełniejszej oceny uzyskanych wyników na drodze teoretycznej określmy stosunki $\frac{\Delta''Q}{\Delta'Q}$ i $\frac{\Delta''\omega_0}{\Delta'\omega_0}$ dla obu rozpatrywanych rozkładów:

dla rozkładu Horowitza:

$$\frac{\Delta''Q}{\Delta'Q} = 4Q \tag{33}$$

$$\frac{\Delta''\omega_0}{\Delta'\omega_0} = 0 \tag{34}$$

dla rozkładu Calahana

$$\frac{\Delta''Q}{\Delta'Q} = \frac{17}{20Q^2} \tag{35}$$

$$\frac{\Delta''\omega_0}{\Delta'\omega_0} = \frac{15}{20Q^2} \tag{36}$$

Z zależności (33), (34), (35), (36) nasuwa się wniosek, że dla syntezy funkcji z użyciem elementu aktywnego, dla którego procedura syntezy opiera się na rozkładzie różnicowym wielomianu D(s), uwzględnienie tylko wrażliwości pierwszego rzędu jest obarczone bardzo dużym błędem. O tolerancji potrzebnych elementów decydują przede wszystkim pochodne wyższych rzędów, co bezpośrednio wiąże się z wrażliwościami wyższych rzędów. Natomiast dla rozkładów sumarycznych można poprzestać na uwzględnieniu tylko wrażliwości pierwszego rzędu (35), (36).

LITERATURA

[1] Białko M.: Elementy syntezy układów scalonych. WKŁ, Warszawa, 1973.

[2] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwości układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1976.

[3] Goddard P.J., Spence R.: Efficient method for the calculation of first and second order network sensitivities. Electronics Letters vol. 5, nr 16, 1969.

[4] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych. WNT, Warszawa 1973.

[5] Pasko M.: Wybór metody syntezy aktywnych filtrów RC. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka nr 54, 1976.

[6] Tatara I.: Czułość drugiego rzędu. Rozprawy elektroniczne, z.1, 1978.

Przyjęto do druku w maju 1979 r.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СИНТЕЗЕ АКТИВНОСТИ RC-ФИЛЬТРОВ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена суммарная чувствительность второго порядка добротности Q и частоты ω_0 передаточной функции типа К полюсового фильтра для разложения Калахана и Горовица.

AN APPLICATION OF SECOND-ORDER SENSITIVITY IN THE SYNTHESIS OF ACTIVE RC FILTRES

S u m m a r y

On the basis of the definition of second-order sensitivity the summed - sensitivity of Q and ω_0 for second - order transfer function is described. For Horowitz's and Calahan's polynomial decomposition the summed - sensitivity of second order was compared with the summed - sensivity of first order.