ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

TADEUSZ WIECZOREK

ANALIZA NAGRZEWNIC INDUKCYJNYCH PŁASKICH I CYLINDRYCZNYCH STOSOWANYCH W PROCESACH OBRÓBKI CIEPLNEJ I PLASTYCZNEJ METALI

HUTNICTWO

Z. 42
GLIWICE
1992

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1155

TADEUSZ WIECZOREK

ANALIZA NAGRZEWNIC INDUKCYJNYCH PŁASKICH I CYLINDRYCZNYCH STOSOWANYCH W PROCESACH OBRÓBKI CIEPLNEJ I PLASTYCZNEJ METALI

GLIWICE 1992

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN0324-802X

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 150+83 Ark. wyd. 8,5 Ark. druk. 8,5 Papier offset. kl.III 70x100 70g
Oddano do druku 7.02.92 Podpis. do druku 7.02.92 Druk ukończ. w marcu 1992
Zam 53|92 Cena zł 12.000,—

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

A, A_x, A_r, A_φ	-	potencjał wektorowy i jego składowe
$a, a_i, a^{(s)}_{ijk}$	-	współczynnik wyrównywania temperatur
B, B_y, B_r, B'_z	-	wektor indukcji magnetycznej i jego składowe
$Bi, Bi^{(s)}_{z0ik}$	-	liczba Biota
$C, C_k, C^{s\,i\,jk}_{nmql}$	-	stałe dowolne
c, c_v, c_i	-	ciepło właściwe
c_T	-	pojemność cieplna
$D, D_i, D^{s\,ij}_m$	-	stałe dowolne
d, d_j, d_{rw}	-	wymiary geometryczne (grubość, średnica)
E, E_x, E_φ	-	wektor natężenia pola elektrycznego i jego składowe
E_Y	-	moduł sprężystości (Younga)
e, e_{ij}, e^0_{ij}	-	tensor deformacji i jego składowe
F, F_x, F_z	-	siła i jej składowe
f, f_i, f_v	-	wektor gęstości sił (powierzchniowych, objętościowych)
$f(x), f(r)$	-	funkcje współrzędnych przestrzennych (skalarne, wektorowe)
G, g	-	wymiary geometryczne
$g(x), g(r)$	-	funkcje współrzędnych przestrzennych (skalarne, wektorowe)
H, h, h_i	-	wymiary geometryczne (wysokość)
$\mathcal{H}, \mathcal{H}_i, \mathcal{H}^{(s)}_{ijk}$	-	współczynniki cieplne
$h(x), h(r)$	-	funkcje współrzędnych przestrzennych (skalarne, wektorowe)
I, I_l, I_{nm}	-	natężenie prądu

$I_0(z), I_1(z)$	-	zmodyfikowane funkcje Bessela (rzędu 0,1)
i	-	numer obszaru, elementu
I, i	-	wskaźnik sumowania
J, J_x, J_0	-	wektor gęstości prądu i jego składowe
$J_0(x), J_1(x)$	-	funkcje Bessela 1-go rodzaju (rzędu 0,1)
j	-	jednostka urojona
J, j	-	wskaźnik sumowania
$K_0(z), K_1(z)$	-	funkcje McDonalda (rzędu 0,1)
k	-	numer obszaru, elementu
K, k	-	wskaźnik sumowania
l, l_i	-	wymiar geometryczny (długość)
l	-	wskaźnik sumowania
$M, M_k, M^{s\,i\,jk}_{nmql}$	-	współczynniki
m	-	współczynnik
M, m	-	wskaźnik sumowania
N	-	liczba zwojów
$N_k, N^{s-1,ijk}_{nmq2}$	-	współczynniki
N, n	-	wskaźnik sumowania
P, P_c	-	moc czynna
$p, p_v, p^{(s)}_{ijk}$	-	gęstość mocy, wydajność źródeł cieplnych
Q	-	ciepło
q	-	wskaźnik sumowania
R, R_l	-	rezystancja
r	-	wektor wodzący
r, r_i	-	współrzędna walcowa i promień ustalony
S, S_y, S_r	-	wektor Poyntinga i jego składowe
s	-	numer etapu obliczeniowego
S, s	-	wskaźnik sumowania

$T, T^{(1)}_{ij}, T^{(s)}_{ijk}$	-	temperatura
t, t_i	-	współrzędna czasowa i chwila czasu
U, U_l	-	napięcie (zespolone)
$u, u(x_i), u_i$	-	wektor przemieszczeń i jego składowe
v, v_z	-	prędkość i jej składowe
X, X_d, X'_2	-	reaktancja
x, x_i	-	współrzędna przestrzenna
y, y_i	-	współrzędna przestrzenna
Z, Z_d	-	impedancja zespolona
z, z_i	-	współrzędna przestrzenna
α_T	-	współczynnik rozszerzalności cieplnej
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_r$	-	współczynnik oddawania ciepła
χ, χ^{sijk}_n	-	wartości własne
δ, δ_{cu}	-	głębokość wnikania prądu
δ_{ij}	-	funkcja delta-Kroneckera
$\delta(x)$	-	funkcja delta-Diraca
$\varepsilon, \varepsilon_0$	-	przenikalność elektryczna
$\Phi(t)$	-	funkcja regulacji
ϕ	-	kąt przesunięcia fazowego
φ	-	współrzędna walcowa
γ	-	konduktywność
η	-	sprawność
κ, κ^{sijk}_m	-	wartości własne
$\lambda, \lambda^{(s)}_{ijk}$	-	przewodność cieplna
μ, μ_0	-	przenikalność magnetyczna
ν	-	liczba Poissona
ω	-	pulsacja
Ψ	-	potencjał skalarny

$\Psi(t)$	-	funkcja regulacji
ψ	-	izotermiczny współczynnik Lamego
ρ, ρ_i	-	współrzędna walcowa lub promień (względne)
σ, σ_{ij}	-	tensor naprężeń i jego składowe
$\theta(x)$	-	funkcja theta-Heaviside'a
τ, τ_o^{sij}	-	wartości własne
Ω	-	powierzchnia
ξ	-	izotermiczny współczynnik Lamego
ζ, ζ_q^{sijk}	-	wartości własne
1_x	-	wersor
π	-	3,14159265
e	-	2,71828183
Δ	-	operator Laplace'a
∇	-	operator Nabla
∂	-	symbol pochodnej cząstkowej
$\int$	-	symbol całki
Σ	-	symbol sumy
Π	-	symbol iloczynu
$\lvert\ \rvert$	-	wartość bezwzględna, moduł
$\lVert\ \rVert$	-	norma
det	-	wyznacznik macierzy
Tr	-	ślad tensora

1. WSTĘP

Nagrzewanie indukcyjne jest metodą szeroko rozpowszechnioną w przemyśle (głównie metalurgicznym i maszynowym) ze względu na możliwości pełnej automatyzacji procesów i uzyskiwania dużej powtarzalności wyników. Stosowane jest w procesach topienia metali*), obróbki powierzchniowej (hartowanie, przesycanie, azotowanie, borowanie), przeróbki plastycznej metali nieżelaznych i stali (kucie, prasowanie, wyciskanie, tłoczenie, walcowanie, cięcie, gięcie, kalibrowanie, spęczanie), a także do zgrzewania, lutowania, odpuszczania, wyżarzania, ogrzewania, suszenia, wytwarzania plazmy i wielu innych.

Z praktycznego punktu widzenia nagrzewnica indukcyjna**) jest pewnym narzędziem umożliwiającym osiągnięcie żądanego skutku technologicznego. Powinna więc nie tylko nagrzać materiał z określoną wydajnością, ale również umożliwić zajście oczekiwanych przemian strukturalnych, uzyskanie właściwego rozkładu temperatury i jej dopuszczalnych gradientów w poszczególnych warstwach, nie powodujących powstawania naprężeń cieplnych odkształcających wyrób itp., przy maksymalnej sprawności i efektywności ekonomicznej. Na podstawie stosowanych dotychczas metod obliczeniowych projektant nie potrafi jednoznacznie stwierdzić, czy zaprojektowane urządzenie umożliwi realizację tak sformułowanych żądań, gdyż większość literatury światowej traktuje problem nagrzewania indukcyjnego wycinkowo, tzn. z osobna rozpatruje się zagadnienia elektromagnetyczne, cieplne, termosprężyste i strukturalne. Istnieje więc pilna potrzeba opracowania takiej metody obliczeniowej, która umożliwiałaby obliczenie i zaprojektowanie nagrzewnicy indukcyjnej na podstawie żądań technologicznych.

---

*) *Omawiane w pracy metody obliczeniowe mogą być również stosowane do projektowania pieców indukcyjnych, ale tylko w tzw. stanie gorącym, przy czym zagadnienia te leżą poza zakresem pracy.*

**) *W literaturze również przez pojęcie nagrzewnicy indukcyjnej rozumie się cały układ łącznie ze źródłem zasilania, tutaj jednak nagrzewnicę rozważać się będzie dopiero począwszy od wzbudnika.*

2. PRZEGLĄD LITERATURY

2.1. Charakterystyka zagadnienia

W ostatnich latach coraz większego znaczenia praktycznego nabiera przebadanie wpływu przemiennych pól elektromagnetycznych na zjawiska cieplne i mechaniczne zachodzące w przewodnikach elektrycznych nagrzewanych indukcyjnie. Wynika to z szerokiego zakresu zastosowań grzejnictwa indukcyjnego w różnych dziedzinach przemysłu. Uwzględnienie trzech głównych grup zjawisk związanych z nagrzewaniem indukcyjnym metali, a to: elektromagnetycznych, cieplnych i termosprężystych może pozwolić na projektowanie efektywniejszych, bardziej energooszczędnych i nowocześniejszych urządzeń i technologii elektrotermicznych. Podejście takie spotyka się w literaturze bardzo rzadko, co jest związane z dużymi trudnościami matematycznymi, nawet dla układów o stosunkowo prostej geometrii. Autorzy z reguły zajmują się każdym z zagadnień z osobna. Sporadycznie, a ma to miejsce głównie wtedy, gdy analizuje się zagadnienie numerycznie lub metodami półempirycznymi, rozważa się równocześnie dwie sprzężone ze sobą grupy zjawisk.

2.2. Problematyka obliczania pól elektromagnetycznych w indukcyjnych układach grzejnych

Zagadnieniu temu poświęconych jest wiele pozycji literaturowych. Do najlepiej rozwiniętych, najszerzej opisanych i w praktyce ciągle jeszcze najczęściej stosowanych należą metody bazujące na rozwiązaniu układów jednowymiarowych. Opracowane one zostały w ubiegłym lub na początku naszego stulecia [83,125,137]. Podstawowym założeniem jest przyjęcie nieskończonej długości wszystkich elementów układu (wsadu, wzbudników, rdzeni itp.). Dla rozwiązania równań Maxwella w takim układzie potrzebna jest tylko znajomość natężenia pola elektrycznego lub magnetycznego na powierzchni wsadu. Powoduje to, że w rozwiązaniach nie występuje właściwie pojęcie wzbudnika. Przez wzbudnik rozumie się w tym przypadku raczej ciągłe źródło fali elektromagnetycznej (idealnie płaskiej, cylindrycznej, kulistej itp.), a tym

samym jego odległość od wsadu (wielkość szczeliny) nie jest istotna (parametr ten nie występuje we wzorach końcowych). Zaniedbanie wpływu końców wzbudnika powoduje, że w układzie występuje tylko jedna, niezerowa składowa indukcji magnetycznej (styczna) i jedna składowa natężenia pola elektrycznego (normalna). Poza tym natężenie pola na zewnątrz uzwojenia jest zawsze równe zeru. Można by więc wnioskować, że wskutek tak dużych uproszczeń w stosunku do rzeczywistości zastosowanie tej metody jest dość ograniczone. Jednak ze względu na prostotę i łatwość analizowania wzorów końcowych jest ona nadal wykorzystywana, np. [7,12,13,15,23,45,46,69,74,97,104,126,127, 136]. Problemy te omówiono w sposób najpełniejszy w kilku monografiach [69,97,127,136]. Przeanalizowano wszystkie spotykane przypadki, począwszy od nagrzewania półprzestrzeni metalowej, a skończywszy na nagrzewaniu rur od wewnątrz.

Sposoby przybliżonego obliczania nagrzewnic indukcyjnych są najbardziej rozpowszechnione w praktyce projektowej [7,12,13,15,20,22,23,54,66, 69,74,97,104,118,124,126,127,136]. Przeprowadzenie rozsądnej klasyfikacji tych metod jest trudne dlatego, że zwykle nadają się do określonych z góry urządzeń. Należy jednak zaznaczyć, że samo pojęcie "metoda przybliżona" jest nieścisłe. Każda bowiem stosowana w praktyce metoda obliczeniowa zawiera pewien stopień przybliżenia. Używaną więc tutaj nazwę "metody przybliżone" należy traktować umownie, rozumiejąc przez to pojęcie metody zawierające znaczne uproszczenia. Wyniki uzyskiwane za pomocą takich metod ukierunkowanych są słuszne w przybliżeniu tylko dla wąskiej grupy zastosowań, a dla pozostałych dają znaczne błędy. Większość z nich oparta jest na rozwiązaniach uzyskiwanych dla układów nieskończenie długich, z wykorzystaniem licznych współczynników korekcyjnych, pozwalających na przybliżone uwzględnienie wpływu skończonych wymiarów układu, asymetrii kształtu lub innych parametrów urządzenia rzeczywistego.

Najdokładniejsze ze stosowanych obecnie w praktyce projektowej metod analitycznych uwzględniają skończoną długość wzbudnika, przy czym jego uzwojenie modelowane jest nieskończenie cienką warstwą prądową. Dla uzyskania rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych stosuje się najczęściej całkowe przekształcenie Fouriera, stąd używana w literaturze nazwa "metoda całki Fouriera". Rozwój tych metod zapoczątkowały prace Buchholza [16,17] oraz praca [34]. Obecnie ilość publikacji wykorzystujących do obliczeń metody analityczne jest duża [25,27-30,33,35,37-38,40,41,50,57,61,70,72,78, 79,87,96,108-111,116,122] i metody te są ciągle rozwijane. W latach 70

opracowano również pewną modyfikację metody całki Fouriera. Polega ona na zastąpieniu pojedyńczego (istniejącego w rzeczywistości) wzbudnika, nieskończonym zespołem identycznych wzbudników, rozłożonych w pewnych odległościach od siebie, w których płyną prądy o kierunkach przeciwnych. W polskiej literaturze jest używana nazwa "metoda szeregu Fouriera", a w literaturze zachodniej "method of periodical fields". Znalazło to odbicie w pracach Biringera i Laversa [70], Lupiego i Niemkowa [75,76], a także autora [24,26,140].

Obecnie na świecie coraz szerzej stosuje się metody numeryczne [63,84, 100,102,114,121,132,133]. Są ane niewątpliwie najogólniejsze, gdyż zezwalają na uwzględnienie zarówno skończonych wymiarów układu, jak i zmienności parametrów elektromagnetycznych wsadu. Należy sądzić, że wraz z rozwojem techniki komputerowej ich stosowanie będzie się rozszerzać. Zdaniem autora najbardziej efektywne metody obliczeniowe uzyskuje się przez połączenie wybranych metod analitycznych i numerycznych, zależnie od żądanej dokładności, kosztów obliczeń, itp.

2.3. Problematyka obliczania pól temperaturowych w indukcyjnych układach grzejnych

Literaturę dotyczącą obliczania pól temperatury we wsadach nagrzewanych indukcyjnie można, w zależności od stosowanych metod obliczeniowych, podzielić na półempiryczne, przybliżone, numeryczne i analityczne, przy czym zaproponowany podział jest raczej umowny, gdyż niektóre metody można zaliczyć do dwóch grup równocześnie, a poza tym istnieją metody, które w ogóle nie znalazły miejsca w podanej klasyfikacji (np. metoda traktująca temperaturę jako wielkość probabilistyczną [53]).

Metody nazwane półempirycznymi dotyczą opracowań, w których podstawę do obliczeń stanowią dane doświadczalne lub współczynniki, czy też określone wzory uzyskane metodą empiryczną [20,65,92,115,118,127]. Znaczenie tych metod jest jednak niewielkie, gdyż dotyczą one konkretnych urządzeń i nie mają ogólnego zastosowania.

Do drugiej grupy zaliczyć można np. prace [6,12,13,15,20,43,54,65,92,94, 97,104,118,137], w których punktem wyjścia są albo znacznie uproszczone równania różniczkowe przewodnictwa cieplnego (np. sprowadzone do zagadnień jednowymiarowych, liniowych), albo ich uproszczone rozwiązania. Dla uzyskania zbieżności z wynikami eksperymentów wprowadza się wiele współczynników

korekcyjnych, a obliczenia prowadzi się na podstawie uśrednionych stałych cieplnych. Są one powszechnie używane do obliczania układów elektrotermicznych ze względu na prostotę wyrażeń końcowych.

Metody numeryczne ze swej istoty prowadzą zawsze do rozwiązań przybliżonych, ponieważ oparte są na zamianie ciągłego modelu przenoszenia ciepła przybliżonym modelem dyskretnym. Obecnie najczęściej stosuje się metody: siatek (różnicowe, różnic skończonych), elementów skończonych, wariacyjno-różnicowe, prostych, statystyczne [8,9,36,42,47,51,63,81,84,112,114, 128]. Największe znaczenie w teorii przewodnictwa cieplnego, ze względu na swą uniwersalność, ma metoda siatek [47,81,84,112,113,128]. Wśród metod wariacyjno-różnicowych, w których dyskretny model zagadnienia uzyskuje się w oparciu o równania wariacyjne, można wyróżnić metodę lokalnych wariacji i metodę elementów skończonych [63,114]. Metoda prostych [8,9] oparta jest na zamianie pochodnych względem wszystkich zmiennych oprócz jednej (np. czasu) różnicami skończonymi. Prowadzi to do układu zwyczajnych równań różniczkowych nieliniowych, dla rozwiązania których stosowana jest metoda Runge-Kutta. Z metod statystycznych w teorii przewodnictwa cieplnego stosuje się najczęściej metody Monte Carlo. Stosowanie metod numerycznych daje możliwość rozwiązania złożonych zagadnień brzegowych lub zagadnień anizotropowych, niemożliwych do rozwiązania innymi metodami.

Najlepiej rozwinęły się metody analitycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych przewodnictwa cieplnego. Ich duża liczba wynika z tego, że są stosowane już od bardzo wielu lat. Można tu wyróżnić następujące główne metody: rozdzielania zmiennych (Fouriera), funkcji źródłowych (Greena), potencjałów cieplnych (stosowana do zagadnień z nieliniowymi warunkami brzegowymi), przekształceń całkowych, wariacyjne (Ritza, Kantorowicza, Biota), linearyzacji (sprowadzanie nieliniowego zagadnienia brzegowego do liniowego), podstawień (algebraicznych, całkowych), kolejnych przybliżeń, rachunku zaburzeń, odwzorowań konforemnych, teoriogrupowe. Głównymi pracami, w których rozważa się zagadnienia w oparciu o analityczne rozwiązanie równania Kirchhoffa-Fouriera wraz z odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi są: [8,9,36,51,56,77,96]. Należy jednak zaznaczyć, że większość zagadnień źródłowych jest w nich rozwiązywana przy założeniu stałego lub eksponencjalnego rozkładu gęstości mocy czynnej we wsadzie, co w grzejnictwie indukcyjnym występuje rzadko. Poza tym, zwykle są rozwiązywane układy jednorodne i izotropowe. Metody analityczne zezwalają na otrzymanie rozwiązania najdokładniejszego i najogólniejszego. Dla danego modelu istnieje możliwość

przeanalizowania wpływu poszczególnych parametrów obiektu na wyniki obliczeń. W wielu przypadkach można uzyskać taniej i szybciej rozwiązanie dokładniejsze niż przy użyciu metod numerycznych.

2.4. Problematyka obliczania pól naprężeń cieplnych w indukcyjnych układach grzejnych

Badania zjawiska termosprężystości rozpoczęto w I poł. XIX w. (J.M.C. Duhamel 1837r., Neumann 1841r.) tworząc teorię oddziaływań cieplnych i mechanicznych, ograniczoną jednak do zagadnień statycznych. Thompson w 1855r. jako pierwszy przystosował podstawowe prawa termodynamiki do określenia własności ciała sprężystego. Wielu badaczy (np. Landau i Lifszyc [67]) stosując metody termodynamiki uzyskało równania termosprężystości. Dopiero jednak termodynamika przemian nieodwracalnych pozwoliła na znacznie bardziej dokładne przeanalizowanie zjawisk cieplnych i mechanicznych w procesie deformowania. Znalazło to odbicie w pracach M.A. Biota (1956r.), P. Chadwick'a (1960r.), B.A. Boley'a (1962r.) i J.H. Weinera (1960r.). Dla opisu zjawisk termodynamicznych zachodzących w deformowalnych ciałach stałych najodpowiedniejsze są metody matematyczne opracowane przez N.N. Szilera (1897r.), C. Caratheodory'ego (1909r.) i T.A. Afanasjewa-Ehrenfest (1925r.). P. F. Papkowicz (1932r.) przedstawił ogólne rozwiązanie zagadnienia quasi-statycznego w postaci przydatnej do obliczeń praktycznych. W metodach rozwiązywania szczegółowych problemów termosprężystości quasi-statycznej osiągnięto znaczny postęp, np. prace Dinnika, Liebiediewa [73], Meizela, Melana, Boley'a, Weinera, Parkusa [93]. Rozwiązania bardziej złożonych problemów termosprężystości quasi-statycznej zawierają prace W. Nowackiego [90,91]. Rozwiązania wielu dynamicznych zagadnień termosprężystości zostały opracowane przez W.I. Daniłowską (1950r.), E. Sternberga i J.G. Chakravorty'ego (1959r.), R. Mukiego i S. Brenera (1962r.), O.W. Dillona (1965r.) i in. Prace teoretyczne Boley'a i Barbera (1957 r.), Krause (1966) i in. wykazały możliwość generacji drgań w elementach cienkościennych wskutek działania impulsowych pól temperaturowych.

W ostatnich latach ukazało się także wiele prac dotyczących dynamicznych zagadnień termosprężystości, między innymi: H. Deresiewicza (1957 r.), Chadwicka i Sneddona (1958r.) oraz W. Nowackiego (1966r.), który opracował teorię płaskich, harmonicznych fal termosprężystych. Także Nowacki (1959-65r.) badał problematykę termosprężystych fal sferycznych i cylindrycznych.

Lockett (1958r.), Chadwick i Windle (1964r.) określili rozprzestrzenianie się termosprężystych fal Rayleigh'a. J.S. Podstrigacz [96] i W. Nowacki (1962r.) uzyskali rozwiązanie ogólne sprzężonych zagadnień termosprężystości. Obecnie na świecie pracuje się nad nieliniową teorią termosprężystości sprzężonej, przy dużych deformacjach i dużych zaburzeniach cieplnych. W zakresie analizy zjawisk termosprężystych zachodzących w indukcyjnych układach grzejnych powstało niewiele prac i to dopiero w ostatnich latach, np. [5,56, 96,106,145].

2.5. Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonego przeglądu literatury można stwierdzić, że zastosowanie nagrzewania indukcyjnego w świecie jest bardzo szerokie. Jednak wdrażanie tych metod w warunkach krajowych napotyka ciągle na znaczne trudności. Wynika to oczywiście z braku dobrej jakości krajowych urządzeń (przekształtników, transformatorów, kondensatorów, przyrządów pomiarowych itp.), ale także, zdaniem autora, w dużym stopniu z braku praktycznie użytecznych i kompleksowych metod obliczania i projektowania nagrzewnic indukcyjnych. Można tu wyodrębnić dwa główne problemy. Przede wszystkim, wyspecjalizowane biura projektowe muszą ze względu na stosowane przestarzałe metody obliczeniowe przewymiarowywać podstawowe urządzenia, gdyż dokładność tych metod jest często rzędu kilkudziesięciu %. Dlatego konieczne jest prowadzenie długotrwałych i kosztownych prób na prototypie, gdyż dopiero na ich podstawie można właściwie skorygować projekt. Drugą, może jeszcze ważniejszą barierą przy wprowadzaniu nowych technologii elektrotermicznych do przemysłu krajowego jest swoista niemożność porozumienia się twórców urządzenia (projektanta, konstruktora) z technologiem odpowiedzialnym w zakładzie za dany proces. Wynika to z faktu, że na konkretne żądania technologiczne, jak: zajście oczekiwanych przemian strukturalnych w materiale, uzyskanie żądanego rozkładu temperatury i nieprzekroczenie jej dopuszczalnych gradientów w poszczególnych warstwach, niedopuszczenie do powstania naprężeń odkształcających wyrób, wyeliminowanie deformacji, uzyskanie żądanej wydajności i sprawności itp., projektant nie potrafi jednoznacznie odpowiedzieć, czy zaprojektowane urządzenie zezwoli na realizację tak sformułowanych żądań, gdyż cała nasza literatura obliczeniowa i większość literatury światowej traktuje problem nagrzewania indukcyjnego wycinkowo. Można więc stwierdzić, że brak jest spójnej, utylitarnej i kompleksowej metody

obliczeniowej umożliwiającej analizę całości zagadnień związanych z konkretną technologią nagrzewania indukcyjnego.

Przeprowadzony przegląd literatury z zakresu metod obliczania i projektowania elektrotermicznych urządzeń indukcyjnych pozwala wyciągnąć następujące wnioski:

- najlepiej opracowane są metody obliczania nagrzewnic indukcyjnych od strony zjawisk elektromagnetycznych (najszerzej w przypadkach jednowymiarowych) i cieplnych (poza polami źródłowymi), nieco słabiej od strony zjawisk termosprężystych,
- brak jest w literaturze dokładnych a jednocześnie utylitarnych metod obliczeniowych traktujących kompleksowo całość zjawisk związanych z nagrzewaniem indukcyjnym metali,
- część autorów, szczególnie prac publikowanych w ostatnich latach, możliwość efektywniejszego osiągania poszukiwanych rozwiązań widzi w odpowiedniej syntezie metod analitycznych i numerycznych.

3. CEL, ZAKRES I TEZA PRACY

3.1. Cel pracy

Opracowanie kompleksowej metody analizy zjawisk elektromagnetycznych, cieplnych i termosprężystych zachodzących w indukcyjnych układach grzejnych jednofazowych o symetrii płaskiej i cylindrycznej.

3.2. Zakres pracy

- analiza zjawisk elektromagnetycznych w najczęściej spotykanych w praktyce nagrzewnicach indukcyjnych płaskich i cylindrycznych, ze wsadami niemagnetycznymi i ferromagnetycznymi,
- analiza trójwymiarowych, niestacjonarnych, źródłowych pól temperatury w indukcyjnych układach grzejnych o symetrii płaskiej i cylindrycznej,
- uproszczona analiza zagadnień naprężno - deformacyjnych we wsadach płaskich i cylindrycznych nagrzewanych indukcyjnie,
- opracowanie uproszczonej metody obliczania nagrzewnic indukcyjnych ze wsadami ferromagnetycznymi,
- przebadanie wpływu poszczególnych elementów konstrukcyjnych nagrzewnicy na sprawność i żądane efekty technologiczne przy wykorzystaniu opracowanej metody obliczeniowej,
- weryfikacja doświadczalna wybranych wyników obliczeniowych.

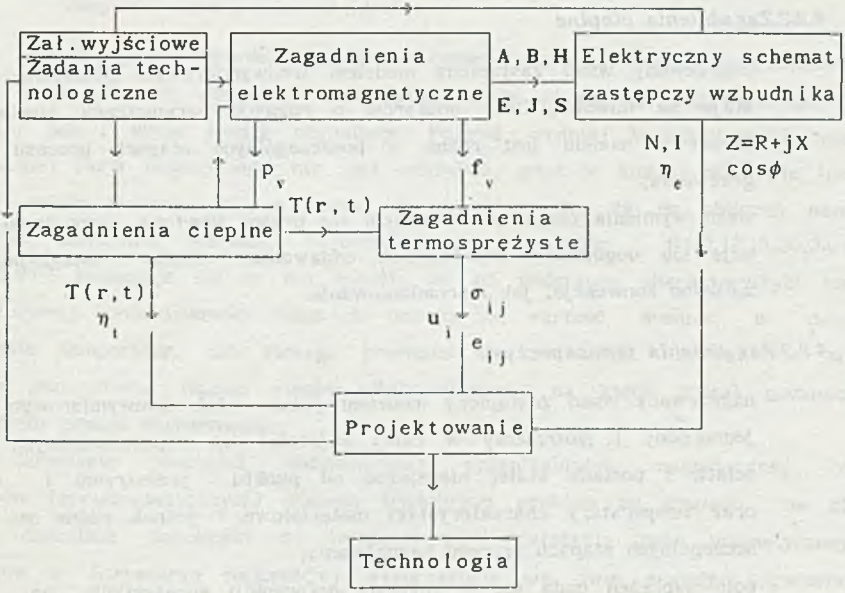
3.3. Teza pracy

Dla grupy płaskich i cylindrycznych nagrzewnic indukcyjnych stosowanych w procesach obróbki cieplnej i plastycznej metali jest możliwe opracowanie uniwersalnych modeli oraz metod obliczeniowych (opartych na ścisłych metodach analitycznych teorii pola i metodach numerycznych) charakteryzujących się wysoką dokładnością i przydatnością do obliczeń praktycznych.

4. GŁÓWNE ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE

4.1. Sformułowanie zagadnienia

Kompleksowa analiza procesu nagrzewania indukcyjnego wsadów metalicznych powinna obejmować współzależne zjawiska elektromagnetyczne, cieplne i termosprężyste. Ich połączenie, a więc stworzenie pełnego modelu matematycznego procesu jest trudne, ale konieczne ze względu na zastosowania. Jednocześnie uzyskiwane wyrażenia końcowe powinny mieć postać przydatną do obliczeń praktycznych. Dlatego wprowadza się pewne założenia dodatkowe, o możliwie małym wpływie na dokładność obliczeń, a równocześnie upraszczające problem pod względem matematycznym. Na ich bazie powstaje model obliczeniowy, w którym wpływ pola elektromagnetycznego na procesy przewodnictwa cieplnego i deformacji będzie się wiązać jedynie z ciepłem Joule'a, pomijając efekty dynamiczne i efekt sprzężenia pól temperatury i naprężeń. Wtedy zadanie sprowadzi się do kolejnego, oddzielnego rozwiązania równań elektrodynamiki, przewodnictwa cieplnego i termosprężystości quasi-statycznej. Podstawowym założeniem, na którym oparta została metoda obliczeniowa, jest stwierdzenie, że rzeczywistą nagrzewnicę indukcyjną (będącą w ogólności układem nieliniowym) można w pewnym wąskim przedziale czasu sprowadzić do modelu liniowego. Cały proces nagrzewania dzieli się więc na etapy (wąskie przedziały czasowe), w których analizuje się modele liniowe o różnych strukturach. Przyjęcia a priori wymaga jedynie struktura i parametry modelu wyjściowego odpowiadającego początkowej fazie nagrzewania (co jest zwykle proste, gdyż warunki początkowe konkretnego procesu można określić z dużą dokładnością). W przyjętym modelu oblicza się pole elektromagnetyczne i gęstość mocy czynnej wydzielanej we wsadzie. Wtedy możliwe staje się wyznaczenie rozkładu temperatury w początkowej fazie nagrzewania, a następnie naprężeń cieplnych. Uzyskane wyniki są warunkami początkowymi dla kolejnego etapu. Struktura i parametry modelu obliczeniowego w następnej fazie nagrzewania są inne, gdyż zależą od wyników otrzymanych w fazie poprzedniej. Postępując kolejno w ten sposób uzyskuje się dyskretny ciąg rozwiązań opisujących nagrzewnicę indukcyjną w poszczególnych etapach jej pracy. Blokowy schemat kompleksowej analizy zagadnienia nagrzewania indukcyjnego przedstawiono na rys.4.1.



Rys. 4.1. Blokowy schemat obliczeń nagrzewnicy indukcyjnej

Fig. 4.1. Block diagram for the calculation of an induction heater

4.2. Założenia upraszczające

Wprowadza się następujące główne założenia upraszczające, podzielone na poszczególne bloki problemowe.

4.2.1. Zagadnienia elektromagnetyczne

- analizę ogranicza się tylko do najistotniejszych z punktu widzenia elektrotermii elementów układu, tzn. wsadu, wzbudników oraz rdzeni magnetycznych, czy ekranów niemagnetycznych;
- nagrzewnicę zastępuje się modelem dwuwymiarowym, w którym wsad jest warstwowy i posiada określone, niezależne od natężeń pól charakterystyki materiałowe w poszczególnych warstwach, jednak różne w każdym z wąskich przedziałów czasowych (etapów nagrzewania), na które podzielono cały proces;

- wektory pola elektromagnetycznego są sinusoidalnie zmienne w czasie.

4.2.2.Zagadnienia cieplne

- nagrzewany wsad zastąpiony modelem trójwymiarowym podzielony zostaje na dowolną ilość obszarów o różnych parametrach cieplnych. Struktura modelu jest różna w poszczególnych etapach procesu nagrzewania;
- wsad wymienia ciepło z otoczeniem wg prawa Newtona, przy czym stosuje się uogólniony współczynnik oddawania ciepła uwzględniający zarówno konwekcję, jak i promieniowanie.

4.2.3.Zagadnienia termosprężyste

- nagrzewany wsad zastąpiony modelem jedno- lub dwuwymiarowym jest jednorodny i izotropowy w całej objętości lub poszczególnych częściach i posiada stałe, niezależne od punktu przestrzeni i czasu oraz temperatury charakterystyki materiałowe, jednak różne w poszczególnych etapach procesu nagrzewania;
- pole naprężeń bada się w zakresie deformacji sprężystych na podstawie liniowej teorii termosprężystości quasi-statycznej ([5,56, 89,91,96,98,99,106]).

4.3. Dobór parametrów wyjściowych do obliczeń

W celu przeprowadzenia obliczeń wg przedstawionego schematu konieczna jest znajomość wielu parametrów, które można nazwać założeniami wyjściowymi w procesie projektowania nagrzewnicy indukcyjnej. Przyjęcie ich nie jest zwykle oczywiste, gdyż uproszczenia poczynione przy konstruowaniu modelu obliczeniowego spowodowały, że pewne parametry modelu różnią się od rzeczywistych, a pewne w ogóle nie występują. Celem tego rozdziału jest podanie (na podstawie powszechnie stosowanych w literaturze metod) sposobu przyjmowania parametrów wyjściowych, aby model obliczeniowy był jak najbardziej zbliżony do rzeczywistej nagrzewnicy.

4.3.1.Dobór konduktywności i przenikalności magnetycznej wsadu oraz częstotliwości prądu wzbudnika

Konduktywność wsadu w trakcie całego procesu nagrzewania indukcyjnego ulega zmianom. Charakter tych zmian zależy od rodzaju nagrzewanego materiału jak i wielu innych czynników. Pojęcie średniej konduktywności wsadu w żadnej fazie nagrzewania nie jest właściwe, gdyż w każdej warstwie (punkcie) wsadu wartości te są różne. Z uwagi na to, że do obliczeń należy przyjąć konkretną wartość, najczęściej w literaturze ([6,7,12,13,20,24,45, 69,70,97]) postępuje się w ten sposób, że na podstawie charakterystyki temperaturowej konduktywności materiału oblicza się wartość średnią w danym zakresie temperatur, dla którego prowadzi się obliczenia. Liczba tych średnich jest równa liczbie etepów obliczeniowych, na które został podzielony konkretny proces nagrzewania.

Określenie wartości obliczeniowej przenikalności magnetycznej (dla wsadów ferromagnetycznych) stanowi trudniejszy problem ze względu na złożony charakter zależności od temperatury i natężenia pola magnetycznego. Obecnie w literaturze najczęściej wykorzystuje się dwie metody: opracowaną przez Rodigina [104], opartą na równości energii magnetycznych (np. [6,12, 13,33,97,136,147] oraz wynikającą z modelu Nejmana [87,88], stosowaną np. w pracach [20,71,118,123,124,134,140].

Wstępnego przyjęcia wymaga również częstotliwość prądu zasilającego wzbudnik. Jest to jeden z najważniejszych parametrów układu grzejnego. Wielkość ta decyduje między innymi o sprawności nagrzewnicy, czasie i szybkości nagrzewania, różnicy temperatur między powierzchnią a wnętrzem wsadu. Zagadnieniom doboru częstotliwości poświęcono między innymi publikacje [12,13,15,97,107,123,124,127].

4.3.2.Określenie parametrów cieplnych i termosprężystych układu

Dla rozwiązania równań termosprężystości należy przyjąć stałe (w poszczególnych etapach) wartości parametrów cieplnych i sprężystych wsadu. Podobnie jak w równaniach elektrodynamiki pojawia się więc problem określenia wartości obliczeniowych ciepła właściwego, przewodności cieplnej, modułów sprężystości, lepkości itp. oraz współczynników oddawania ciepła przez konwekcję i promieniowanie. Pierwsze z wymienionych wielkości są to typowe stałe materiałowe, których wartości zależą głównie od temperatury. Oczywiście, zależności te dla różnych metali są różne, jednakże jedynym sposobem jest uśrednienie ich charakterystyk w pewnym przedziale temperatur.

Trudniejszy problem jest związany z określeniem obliczeniowych wartości współczynników oddawania ciepła. Zależą one bowiem głównie od kształtu wsadu, konfiguracji pozostałych elementów układu, wielkości szczelin powietrznych, usytuowania nagrzewnicy oraz temperatury. Tak więc w praktyce obliczenia należy wykonywać inaczej, w zależności od konkretnego przypadku. Z osobna oblicza się współczynniki oddawania ciepła przez konwekcję i promieniowanie dla wszystkich powierzchni wsadu, a następnie sumuje się je w odpowiednich punktach. Szczegółowo problematykę tę omówiono w [9,18,42,43,51,56,65].

5. ZAGADNIENIA ELEKTROMAGNETYCZNE

5.1. Równania wyjściowe i warunki brzegowe

Zjawiska elektromagnetyczne zachodzące w indukcyjnych układach grzejnych opisywane są równaniami Maxwella, stanowiącymi układ równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego lub równań całkowych. W zagadnieniach, w których występuje więcej niezerowych składowych wektorów pola elektromagnetycznego,rozwiązanie równań Maxwella związane jest ze znacznymi trudnościami. Dlatego w literaturze powszechnie przyjęły się metody polegające na zastąpieniu wyjściowych wektorów pola ich potencjałami [10,11,16,62,68,121, 125]. Z metod tych najszersze zastosowanie w zagadnieniach indukcyjnych znalazła metoda potencjału wektorowego [16,62,123,131,135,148]. Wprowadzając do równań Maxwella potencjał wektorowy **A** poprzez zależność:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \tag{5-1}$$

gdzie **B**,**H** są wektorami indukcji i natężenia pola magnetycznego, a μ przenikalnością magnetyczną, uzyskuje się, że czwarte z równań spełnione jest tożsamościowo, natomiast z drugiego można obliczyć natężenie pola elektrycznego (**E**):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\Phi - \mathrm{rot}\mathbf{A} \times \mathbf{v} \tag{5-2}$$

gdzie Φ jest dowolną funkcją skalarną, a **v** prędkością ruchu wsadu. Wprowadzając (5-1) i (5-2) do równań Maxwella otrzymuje się:

$$\begin{gathered} \Delta\phi + \mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \\ \Delta\mathbf{A} - \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J} \end{gathered} \tag{5-3}$$

gdzie ε jest przenikalnością dielektryczną, a **J** wektorem gęstości prądu. Równania (5-3), równoważne układowi równań Maxwella, opisują pole elektro-

magnetyczne za pomocą potencjałów: wektorowego **A** i skalarnego Φ. Potencjały **A** i Φ są wielkościami pomocniczymi i jako takie nie mają bezpośredniego sensu fizycznego. Zostały one wprowadzone jedynie dla uproszczenia równań pola, gdyż z matematycznego punktu widzenia równania różniczkowe drugiego rzędu (5-3) są prostsze, niż podstawowe równania Maxwella. Jednakże obliczenie potencjałów **A** i ϕ na podstawie równań (5-3) nie jest jednoznaczne i dopuszcza możliwość następującej transformacji:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\Phi' \quad ; \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \tag{5-4}$$

gdzie Φ' jest dowolną funkcją skalarną. Bezpośrednie wprowadzenie (5-4) do (5-1) i (5-2) wykazuje niezmienniczość wektorów pola, a tym samym równań Maxwella względem tej transformacji (niezmienniczość cechowania). Z tych powodów dla pełnego określenia potencjałów, oprócz zależnosci (5-1) i (5-2), wprowadza się dodatkowe warunki dookreślające je. Przeważnie robi się to przez zadanie dywergencji potencjału wektorowego, a w ogólności warunki dodatkowe wybiera sie tak, aby otrzymać możliwie najprostszą postać równań końcowych [68,125]. Dla równań (5-3) jest to warunek postaci:

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \tag{5-5}$$

zwany kalibracją kulombowską. Oprócz tego, zakładając że w chwili początkowej nie występują w układzie ładunki swobodne, można wykazać [96], że gęstość ładunku elektrycznego w dowolnej chwili (czasu) jest równa zeru. Wtedy także [4,47,68] można przyjąć, że ϕ=0. Tak więc ostatecznie wektory pola wyrażają się przez potencjał wektorowy w postaci (przyjmując ich harmoniczną zmienność w czasie):

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \mathrm{rot}\mathbf{A} \times \mathbf{v} \quad ; \quad \mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \tag{5-6}$$

Po wprowadzeniu powyższych zależności do (5-3) uzyskuje się:

$$\Delta\mathbf{A} - \left(j\omega\mu\gamma - \mu\varepsilon\omega^2 + \mu\gamma v \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{A} = 0 \tag{5-7}$$

gdzie γ jest konduktywnością, ω pulsacją; przyjęto, że wsad porusza się z prędkością "v" tylko w kierunku osi "z". Wprowadzenie potencjałów elektromagnetycznych zezwoliło więc na zredukowanie wyjściowego układu równań Maxwella do jednego równania różniczkowego potencjału wektorowego. Z uwagi na to, że w rozważanych w rozprawie układach występuje tylko jedna niezerowa

składowa tego potencjału, upraszcza to znacznie tok obliczeń. Równanie (5-7) jest słuszne we wszystkich obszarach obliczeniowych, przy czym w obszarach powietrznych upraszcza się ono ze względu na $\gamma=0$. Po wyznaczeniu z niego potencjału wektorowego **A** mozliwe jest proste obliczenie pozostałych wielkości pola elektromagnetycznego.

Potencjały wektorowe (A_i) w poszczególnych obszarach obliczeniowych spełniają następujące warunki brzegowe na granicach (r_i) rozdziału środowisk [11,16,62]:

$$\lim_{r\to r_i^+}(A_i(r)) = \lim_{r\to r_i^-}(A_{i+1}(r))$$

$$\frac{1}{\mu_{i+1}}\lim_{r\to r_i^-}(\mathrm{rot}_s A_{i+1}(r)) - \frac{1}{\mu_i}\lim_{r\to r_i^+}(\mathrm{rot}_s A_i(r)) = \delta_{\mu_i\mu_{i+1}} J(r_i) \tag{5-8}$$

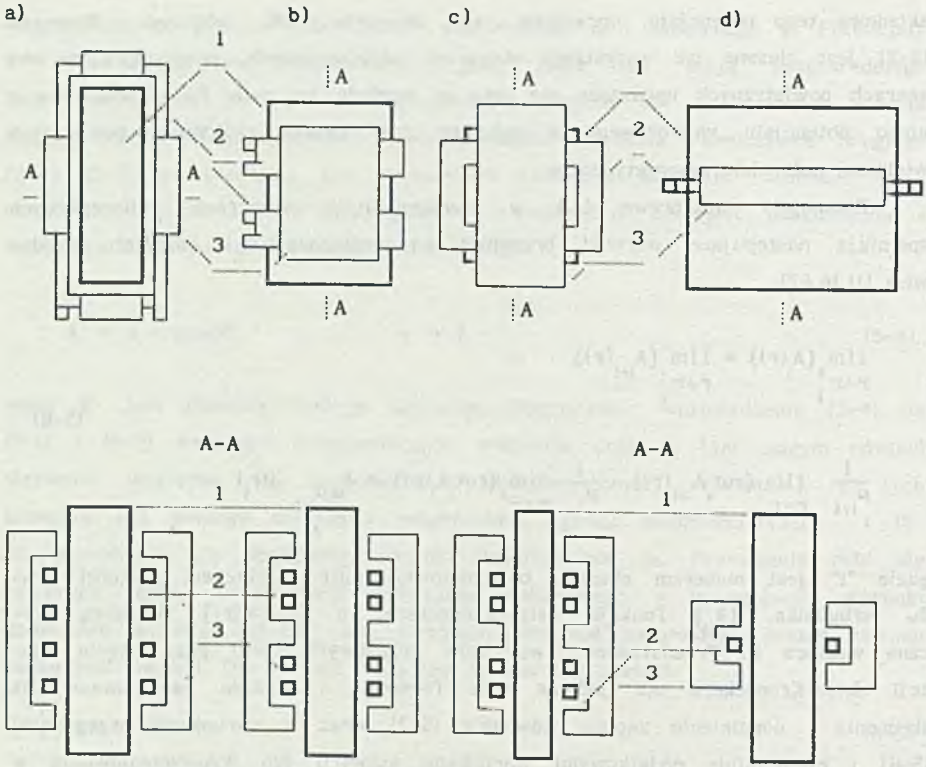
gdzie "i" jest numerem obszaru obliczeniowego, $J(r_i)$ wektorem gestości prądu wzbudnika, (δ_{kl}) funkcją delta-Kroneckera, a $(\mathrm{rot}_s A_i(r))$ składową styczną wektora **B**. Przedstawienie warunków brzegowych (5-8) przy użyciu funkcji delta-Kroneckera ma jedynie sens formalny i zostało zastosowane dla skrócenia i uogólnienia zapisu. Równanie (5-7) wraz z warunkami brzegowymi (5-8) i ewentualnie dodatkowymi warunkami symetrii lub wypromieniowania w nieskończoności zezwala na jednoznaczne rozwiązanie zagadnienia elektromagnetycznego w indukcyjnych układach grzejnych.

5.2. Ogólny model obliczeniowy płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej *)

Często spotykanym w grzejnictwie indukcyjnym urządzeniem do nagrzewania blach, płyt, czy płaskowników metalowych jest płaska nagrzewnica indukcyjna ze wzbudnikiem dwustronnym (rys.5.1) lub jednostronnym. Wewnątrz wzbudnika /2/ z rdzeniem magnetycznym /3/ (lub wewnątrz wzbudnika bezrdzeniowego), zasilanego prądem przemiennym jednofazowym, znajduje się wsad /1/ w postaci płyty metalowej. Cztery układy z rys.5.1 odpowiadają podstawowym rozwiązaniom technicznym nagrzewnic dwustronnych. Na rys.5.1a,b przedstawiono wzbudniki z uzwojeniami skupionymi jedno- i wielosekcyjnymi nawiniętymi

---

*) *Zagadnienia związane z nagrzewaniem indukcyjnym wsadów płaskich analizował autor w pracach [28,140,141,144,145].*



Rys. 5.1. Przykładowe rozwiązania konstrukcyjne płaskich nagrzewnic indukcyjnych

a) ze wzbudnikiem owalnym jednosekcyjnym, b) ze wzbudnikiem owalnym wielosekcyjnym, c) ze wzbudnikiem pętlowym, d) ze wzbudnikiem jednozwojowym

1 - wsad, 2 - uzwojenie wzbudnika, 3 - rdzenie magnetyczne

Fig. 5.1. Examplifying construction solutions of flat induction heaters

a) one - section inductor wound round the plate, b) multisection inductor wound round the plate, c) two - sided inductor with lap winding, d) one - turned inductor

1 - heated plate, 2 - coil, 3 - magnetic shields

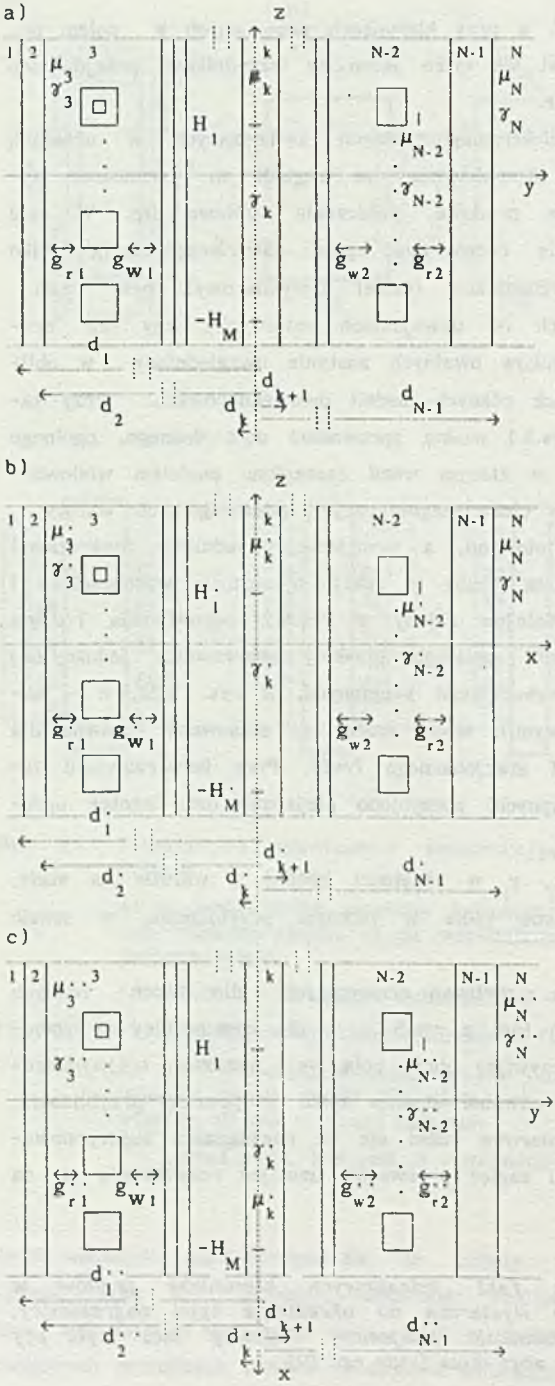
wokół elementu nagrzewanego. Są to układy z tzw. wzbudnikami owalnymi. Rysunki 5.1c, d pokazują możliwość realizacji nagrzewania dwustronnego tzw. wzbudnikiem pętlowym (rys. 5.1c) i jednozwojowym (rys.5.1d). Przy jednakowych kierunkach prądów w obydwu wzbudnikach będą to układy z tzw. po-

lem magnetycznym poprzecznym**), a przy kierunkach przeciwnych z polem podłużnym, natomiast gdy pozostawi się tylko jeden ze wzbudników, przejdą one w nagrzewnice płaskie jednostronne.

Ilościowy opis zjawisk elektromagnetycznych zachodzących w układach przedstawionych na rys.5.1 jest skomplikowany ze względu na skończone wymiary elementów, doprowadzenia prądowe, połączenia czołowe itp. W celu uproszczenia obliczeń będzie się rozpatrywać pole elektromagnetyczne tylko na odcinkach prostoliniowych wzbudników (model 2-wymiarowy), przy czym fakt istnienia połączeń czołowych (w uzwojeniach pętlowych), czy też "drugich boków" uzwojeń dla wzbudników owalnych zostanie uwzględniony w obliczeniach przez superpozycję dwóch różnych modeli dwuwymiarowych. Przy takim założeniu nagrzewnice z rys.5.1 można sprowadzić do jednego, ogólnego modelu obliczeniowego (rys.5.2), w którym wsad zastąpiono modelem wielowarstwowym o różnych parametrach elektromagnetycznych poszczególnych warstw, rdzenie magnetyczne modelami liniowymi, a uzwojenia wzbudników dyskretnymi układami prądów (przyjęto dowolną liczbę m sekcji o różnych wysokościach i różnych okładach prądowych). Kolejne układy z rys.5.2 odpowiadają różnym przekrojom rozpatrywanego modelu ogólnego płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej (rys.5.2a, b - nagrzewnicy z wzbudnikami skupionymi, a rys. 5.2a, c - nagrzewnicy ze wzbudnikami pętlowymi). Model może być stosowany zarówno dla nagrzewania przelotowego, jak i stacjonarnego (v=0). Przy konstruowaniu tego modelu (jak również i następnych) poczyniono niejawnie dwa istotne uproszczenia:

- założono, że wielkości μ_i, γ_i w objętości każdej z warstw są stałe, co oczywiście jest słuszne tylko w pewnym przybliżeniu, w sensie wartości średnich,
- założono, że superpozycja rozwiązań otrzymanych dla dwóch różnych przekrojów 2-wymiarowych (np. z rys.5.2a, b dla nagrzewnicy ze wzbudnikiem owalnym) da rzeczywisty obraz pola we wsadzie trójwymiarowym. Jest to oczywiście również słuszne tylko w pewnym przybliżeniu, gdyż rozwiązanie trójwymiarowe różni się od rozwiązania superponowanego. Tak więc w pobliżu zagięć przewodów uzwojeń rozwiązania nie są

**) *Ściśle rzecz biorąc, sam fakt jednakowych kierunków prądów w przeciwległych wzbudnikach nie wystarcza do określenia typu nagrzewnicy. Konieczne jest jeszcze, aby wzbudniki wzajemnie "widziały" się, czyli aby względna grubość wsadu nie była zbyt duża (vide np. D1).*



Rys.5.2. Ogólny model obliczeniowy płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej

Fig.5.2. General calculating model of a flat induction heater

prawdziwe. Zwykle jednak odcinki te stanowią jedynie niewielki procent długości całego uzwojenia, więc prowadzi to do kilkuprocentowych błędów przy obliczaniu impedancji układu.

Zauważając wpływ omówionych uproszczeń na dokładność rozwiązań, należy jednak wyraźnie podkreślić, że kosztem pewnego zmniejszenia dokładności i matematycznej ogólności uzyskano znaczne uproszczenie obliczeń, gdyż część rozwiązań można otrzymać w postaci analitycznej.

W modelu z rys.5.2 przyjęto dodatkowo, że szczeliny powietrzne po obu stronach wsadu oraz szczeliny między uzwojeniami a rdzeniami są różne. Zwiększa to ogólność obliczeń,obejmując także układy z niesymetrycznym usytuowaniem wsadu we wzbudniku. Poza tym, uogólnienie to zezwala na rozpatrzenie wielu przypadków szczególnych. I tak, model z rys.5.2 odpowiada nagrzewnicy jedno- lub wielosekcyjnej (rys.5.1) z uzwojeniami skupionymi, przy czym kierunki prądów w kolejnych sekcjach mogą być zgodne lub przeciwne. Dodatkowo, dla zwiększenia ogólności obliczeń, przyjęto różne wysokości sekcji. Może on być również modelem dla nagrzewnicy z rys.5.1c z uzwojeniem pętlowym, przy czym dla jednakowych kierunków prądów w obydwu wzbudnikach będzie to nagrzewnica z polem poprzecznym, a dla przeciwnych z polem podłużnym. Model ten odpowiada również urządzeniu do nagrzewania pasmowego blach (rys. 5.1 d), które przy przeciwnych kierunkach prądów we wzbudnikach będzie wytwarzało pole podłużne, a przy zgodnych poprzeczne. Istnieje także możliwość łatwego wykonania przejść granicznych we wzorach końcowych, co zezwala na uzyskanie rozwiązań dla całej gamy płaskich nagrzewnic jednostronnych, rdzeniowych i bezrdzeniowych. Z tych względów przyjęty model obliczeniowy został nazwany modelem ogólnym, gdyż obejmuje większość nagrzewnic płaskich spotykanych w praktyce.

Zjawiska elektromagnetyczne zachodzące w układzie z rys.5.2 a są opisywane równaniem (5-7), które we współrzędnych prostokątnych (dla dowolnego i-tego obszaru, $i=1,\dots,N$) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(j\omega\mu_i\gamma_i - \varepsilon_i\mu_i\omega^2 + \mu_i\gamma_i v\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)A_i = 0 \qquad (5\text{-}9)$$

$$A_i = A_x(y,z)\, e^{j\omega t}\, 1_x$$

Rozwiązanie ogólne równania (5-9), zgodnie z [2,17,25,78,79], można przedstawić jako:

$$A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C_i(k)\, e^{p_i y} + D_i(k)\, e^{-p_i y} \right) e^{jkz}\, dk\, e^{j\omega t}\, 1_x \qquad (5\text{-}10)$$

gdzie

$$p_i = \sqrt{k^2 + m_i^2} \quad ; \quad m_i^2 = j\mu_i \gamma_i (\omega + vk) - \varepsilon_i \mu_i \omega^2 \qquad (5\text{-}11)$$

Jest ono słuszne we wszystkich obszarach obliczeniowych (i) z rys.5.2 a, przy czym w szczelinach powietrznych należy przyjąć $\gamma=0$. Potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach (A_i) spełniają warunki brzegowe (5-8). Wprowadzając potencjały wektorowe (5-10) i dowolne gęstości prądowe do warunków brzegowych (5-8) uzyskuje się układ równań dla wyznaczenia stałych $C_i(k), D_i(k)$, przy zadanej gęstości prądu wzbudników $J(y,z,t)$, typu:

$$\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_2 & c_2 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_7 & b_7 & c_7 & d_7 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_8 & b_8 & c_8 & d_8 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{2i-1} & b_{2i-1} & c_{2i-1} & d_{2i-1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{2i} & b_{2i} & c_{2i} & d_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{2N-7} & b_{2N-7} & c_{2N-7} & d_{2N-7} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{2N-6} & b_{2N-6} & c_{2N-6} & d_{2N-6} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{2N-5} & b_{2N-5} & c_{2N-5} & d_{2N-5} & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{2N-4} & b_{2N-4} & c_{2N-4} & d_{2N-4} & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_{2N-3} & b_{2N-3} & d_{2N-3} \\
0 & \cdots & 0 & a_{2N-2} & b_{2N-2} & d_{2N-2}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
C_1 \\ C_2 \\ D_2 \\ C_3 \\ D_3 \\ C_4 \\ D_4 \\ C_5 \\ \cdots \\ C_i \\ D_i \\ \cdots \\ D_{N-3} \\ C_{N-2} \\ D_{N-2} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \\ D_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ A_{11} e_3 \\ A_{11} e_4 \\ A_{1p} e_5 \\ A_{1p} e_6 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ A_{2l} e_{2N-7} \\ A_{2l} e_{2N-6} \\ A_{2p} e_{2N-5} \\ A_{2p} e_{2N-4} \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\qquad (5\text{-}12)$$

gdzie:

$$a_{2i-1} = \exp(sp_i d_i) \qquad b_{2i-1} = \exp(-sp_i d_i)$$

$$c_{2i-1} = -\exp(sp_{i+1} d_i) \qquad d_{2i-1} = -\exp(-sp_{i+1} d_i)$$

$$a_{2i} = p_i \mu_{i+1} a_{2i-1} \qquad b_{2i} = -p_i \mu_{i+1} b_{2i-1} \qquad (5\text{-}13)$$

$$c_{2i} = -p_{i+1} \mu_i c_{2i-1} \qquad d_{2i} = p_{i+1} \mu_i d_{2i-1}$$

przy czym, s=-1 dla i=1,..,k lub s=1 dla i=k+1,..,N; oraz:

$$e_3=\exp(-kd_2)\ ;\ e_4=k\mu_2 e_3\ ;\ e_5=-\exp(kd_3)\ ;\ e_6=-k\mu_4 e_5\ ;\ e_{2N-7}=\exp(kd_{N-3})\ ;$$

$$e_{2N-6}=k\mu_{N-3} e_{2N-7}\ ;\ e_{2N-5}=-\exp(kd_{N-2})\ ;\ e_{2N-4}=-k\mu_{N-1} e_{2N-5}$$

(5-14)

$$A_{1l}=\frac{\mu_0}{4\pi k} e^{k(d_3+g_{w1})} \sum_{l=1}^{L} e^{kg(2l-1)} \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} e^{-jkh(2o-1)}$$

$$A_{1p}=\frac{\mu_0}{4\pi k} e^{-k(d_3+g_{w1})} \sum_{l=1}^{L} e^{-kg(2l-1)} \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} e^{-jkh(2o-1)}$$

(5-15)

$$A_{2l}=\frac{\mu_0}{4\pi k} e^{-k(d_{N-3}+g_{w2})} \sum_{l=L+1}^{L'} e^{-kg(2l-2L-1)} \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} e^{-jkh(2o-1)}$$

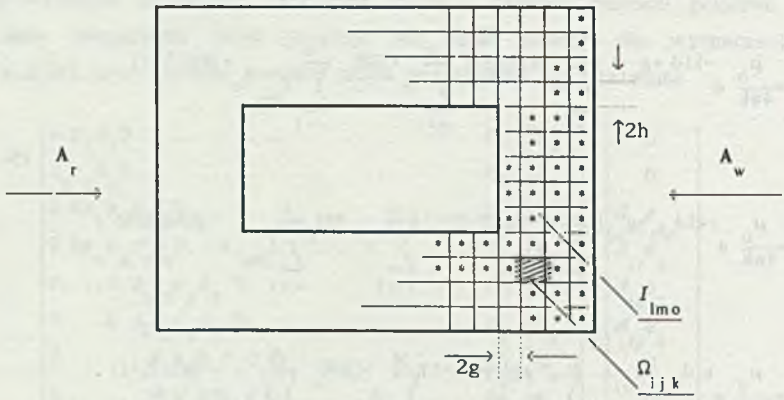
$$A_{2p}=\frac{\mu_0}{4\pi k} e^{k(d_{N-3}+g_{w2})} \sum_{l=L+1}^{L'} e^{kg(2l-2L-1)} \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} e^{-jkh(2o-1)}$$

(5-12) - (5-15) jest liniowym układem równań rzędu (2N-2) na stałe C_i, D_i, którego rozwiązanie nie nastręcza żadnych trudności. Jednakże uzyskane w ten sposób stałe będą zależne od nieznanych prądów wzbudnika (I_{lmo}). Dla ich wyznaczenia rzeczywiste uzwojenie dzieli się na dowolną ilość małych obszarów (jak przykładowo pokazano na rys.5.3). Zakłada się, że w każdym z nich płynie pewien (nieznany) prąd I_{lmo} skupiony w znikomo małym przekroju (nitce prądowej), taki że suma wszystkich tych prądów daje całkowity prąd wzbudnika I. Każdy z prądów I_{lmo} wytwarza w przestrzeni wokół siebie pewne pole charakteryzowane potencjałem wektorowym. Wypadkowy potencjał wektorowy w dowolnym z obszarów jest sumą potencjałów pochodzących od poszczególnych prądów, na które nakładają się jeszcze potencjały pochodzące od innych elementów nagrzewnicy (np. wsadu - A_w, rdzenia - A_r, itp.). Wtedy korzystając z definicji natężenia prądu można dla każdego z obszarów napisać równanie całkowe typu:

$$I_{ijk} = \iint_{s_{ijk}} J_{ijk}(y,z)\, ds = -j\omega\gamma_{cu} \iint_{S_{ijk}} A(I_{lmo},y,z)\, dy\, dz \tag{5-16}$$

oraz równanie dla prądu całkowitego:

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} = I \tag{5-17}$$



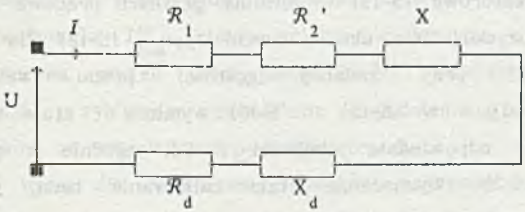
Rys. 5.3. Szkic wybranego zwoju wzbudnika z zaznaczonymi elementami dla obliczania rozkładu prądu

Fig. 5.3. A chosen turn of the inductor with elements for current distribution calculations

gdzie y, z są współrzędnymi, s_{ijk} powierzchnią obszaru, natomiast A jest wypadkowym potencjałem wektorowym (amplitudą) w danym obszarze, zależnym od wszystkich prądów I_{lmo} (także od prądu I_{ijk}) oraz od pozostałych elementów układu grzejnego (wsadu, rdzeni, itp.). Potencjały A w poszczególnych obszarach wyznacza się analitycznie jako sumę potencjałów pochodzących od poszczególnych elementów układu (wszystkich nitek prądowych modelujących wzbudnik, wsad, rdzenie, itp.), tak że możliwe jest częściowe scałkowanie wyrażeń (5-16) przez kwadratury. Prądy I_{ijk} oblicza się numerycznie z układu równań (5-16)-(5-17), który staje się układem liniowym. Po ich obliczeniu łatwo już można znaleźć stałe całkowania (5-12), a tym samym potencjały wektorowe (5-10) w poszczególnych obszarach obliczeniowych. Wyznaczenie po-

zostałych wektorów pola oraz zależności energetycznych nie nastręcza żadnych trudności.

Znając gestość mocy czynnej (p_v) we wszystkich elementach nagrzewnicy, w których następuje dyssypacja energii oraz rozkład wektora Poyntinga (S) w całej przestrzeni, można obliczyć parametry skupione obwodu, tworząc elektryczny schemat zastępczy nagrzewnicy indukcyjnej (rys.5.4). Zaznaczone na tym schemacie impedancje doprowadzeń oblicza się znanymi metodami przybliżonymi, np. [66,107].



Rys. 5.4. Elektryczny schemat zastępczy nagrzewnicy indukcyjnej
$\mathcal{R}_1$ - rezystancja własna uzwojenia wzbudnika, $\mathcal{R}_2'$ - rezystancja wnoszona przez elementy aktywne nagrzewnicy (wsad, rdzenie, itp.), X - reaktancja całkowita, $\mathcal{R}_d$, X_d - rezystancja i reaktancja doprowadzeń, U, I - napięcie i prąd wzbudnika

Fig. 5.4. Equivalent circuit of an induction heater
$\mathcal{R}_1$ - self - resistance of the coil, $\mathcal{R}_2'$ - resistance brought in by the active elements of the heater (charge, core and the like), X - total reactance, R_d, X_d - resistance and reactance of leads, U, I - voltage and current of the inductor

Zjawiska elektromagnetyczne zachodzace w układzie z rys.5.2b opisywane są równaniem (5-7), które we współrzędnych prostokątnych (dla dowolnego i-tego obszaru, i=1,...,N) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(j\omega\mu_i'\gamma_i' - \varepsilon_i'\mu_i'\omega^2 + \mu_i'\gamma_i' v \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) A_i = 0 \tag{5-18}$$

$$A_i = A_y(x,z)\, e^{j\omega t}\, I_y$$

Rozwiązanie ogólne równania (5-18) można przedstawić jako:

$$A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C_i'(k)\, e^{p_i' x} + D_i'(k)\, e^{-p_i' x} \right) e^{jkz}\, dk\, e^{j\omega t}\, I_y \qquad (5\text{-}19)$$

gdzie p_i' dane jest przez (5-11).

Jest ono słuszne we wszystkich obszarach obliczeniowych (i) z rys.5.2b, przy czym w szczelinach powietrznych należy przyjąć $\gamma=0$. Potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach (A_i) spełniają warunki brzegowe (5-8). Wprowadzając potencjały wektorowe (5-19) i dowolne gestości prądowe do warunków brzegowych (5-8) uzyskuje się układ równań typu (5-12) dla wyznaczenia stałych $C_i'(k), D_i'(k)$ przy zadanej gęstości prądu wzbudników $J'(x,z,t)$, przy czym występujące w (5-13) - (5-15) wymiary i stałe materiałowe należy zastąpić przez odpowiednie wielkości z (''), zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys.5.2b. Wyznaczone stałe całkowania będą, podobnie jak i w poprzednim przypadku, zależne od nieznanych, elementarnych prądów wzbudnika I'_{1mo}, które oblicza się zgodnie z (5-16) i (5-17), uzyskując ostateczną postać potencjałów (5-19). Superpozycja rozwiązań (5-10) i (5-19) daje przybliżone rozwiązanie zagadnienia 3-wymiarowego dla nagrzewnic płaskich ze wzbudnikami nawiniętymi wokół nagrzewanych elementów (rys.5.1a, b).

Zjawiska elektromagnetyczne zachodzące w układzie z rys.5.2c opisywane są równaniem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(j\omega\mu_i''\gamma_i'' - \varepsilon_i''\mu_i''\omega^2 \right) \right) A_i = 0$$

$$A_i = A_i(x,y)\, e^{j\omega t}\, I_z \qquad (5\text{-}20)$$

Rozwiązanie ogólne równania (5-20) można przedstawić jako:

$$A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(C_i''(k)\, e^{p_i'' y} + D_i''(k)\, e^{-p_i'' y} \right) e^{jkx}\, dk\, e^{j\omega t}\, I_z \qquad (5\text{-}21)$$

gdzie:

$$p_i'' = \sqrt{k^2 + m_i^2} \quad ; \quad m_i^2 = j\mu_i''\gamma_i''\omega - \varepsilon_i''\mu_i''\omega_i^2 \qquad (5\text{-}22)$$

Jest ono słuszne we wszystkich obszarach obliczeniowych (i) z rys.5.2c, przy czym w szczelinach powietrznych należy przyjąć $\gamma=0$. Potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach (A_i) spełniają warunki brzegowe (5-8). Wprowadzając potencjały wektorowe (5-10) i dowolne gęstości prądowe do warunków brzegowych (5-8) uzyskuje się układ równań typu (5-12) dla wyznaczenia stałych $C_i(k)$, $D_i(k)$, przy zadanej gęstości prądu wzbudników $J''(x,z,t)$, przy czym występujące w (5-13)-(5-15) wymiary i stałe materiałowe należy zastąpić przez odpowiednie wielkości z (''), zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys.5.2c. Wyznaczone stałe całkowania będą, podobnie jak i w poprzednim przypadku, zależne od nieznanych, elementarnych prądów wzbudnika I''_{lmo}, które oblicza się zgodnie z (5-16) i (5-17), uzyskując ostateczną postać potencjałów (5-21). Superpozycja rozwiązań (5-10) i (5-21) daje przybliżone rozwiązanie zagadnienia 3-wymiarowego dla nagrzewnic płaskich ze wzbudnikami pętlowymi (rys.5.1c).

Tak więc, dla rozwiązania dowolnej nagrzewnicy płaskiej z rys.5.1 należy wyznaczyć potencjały, a następnie pola, w co najmniej dwóch modelach przedstawionych na rys.5.2. W celu obliczenia potencjałów wewnątrz uzwojeń wzbudników konieczny jest ich podział na pewną liczbę elementów w celu wyznaczenia rozkładu prądu w uzwojeniu (5-16), (5-17). Niech liczba ich w każdym zwoju wynosi "L'" w kierunku jednej osi oraz "O" w kierunku drugiej i niech liczba zwojów wzbudnika wynosi "M". Wtedy otrzyma się ($2N+2$) równań na stałe całkowania potencjałów w warstwach metalicznych (wsad, rdzenie) i szczelinach powietrznych, typu (5-12) - (5-14), ($2L'$) równań na stałe całkowania potencjałów wewnątrz uzwojeń, z których oblicza się wielkości typu (5-15) oraz ($L'*M*O$) równań całkowych typu (5-16) dla wyznaczenia rozkładu prądu w uzwojeniu. Pozostaje więc do rozwiązania po ($2N+2+2L'+L'*M*O$) równań algebraicznych i całkowych w każdym z dwu przypadków opisywanych modelami z rys.5.2a, b lub 5.2a, c. Należy jednak zaznaczyć, że otrzyma się w ten sposób rozwiązanie zagadnienia tylko dla jednego etapu nagrzewania i procedurę całą należy powtórzyć, co najmniej tyle razy, na ile etapów został podzielony cały proces.

Jeżeli głównym celem obliczeń jest wyznaczenie rozkładu pola i mocy we wsadzie lub określenie parametrów elektrycznego schematu zastępczego nagrzewnicy z pominięciem rezystancji własnej uzwojeń wzbudników, to wtedy jest możliwe uproszczenie przedstawionej metody obliczeniowej przez przyjęcie stałego rozkładu gęstości prądu wzdłuż każdego zwoju wzbudnika. Uzwojenie wzbudnika można w takim przypadku aproksymować cienkimi warstwami

prądowymi modelującymi każdy zwój, przy czym ich zastępcze wymiary dobiera się zgodnie z zasadami opisanymi w p.4. Wtedy do rozwiązania pozostaje tylko układ (2N-2) równań typu (5-12), w którym współczynniki (5-15) zależą już od znanych prądów I_i płynących w poszczególnych zwojach.

Dla ilustracji tej metody rozważy się przykładową nagrzewnicę płaską (rys.5.2) z uzwojeniami foliowymi, podzieloną na 13 obszarów obliczeniowych, ze wzbudnikiem o dowolnej liczbie (M) zwojów, podzielonym na dowolną liczbę sekcji, w których płyną dowolne, znane prądy (I_i). Postępując zgodnie z opisaną metodyką obliczeń uzyskuje się po rozwiązaniu układu równań (5-12) następujące wyrażenia na stałe całkowania potencjałów (5-10):

$$C_1=2p_1\mu_0\kappa_2^{-1}D_2e^{q(d_1+d_2+d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}e^{p_1(d_1+d_2+d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}$$

$$C_2=D_2\kappa_1\kappa_2^{-1}e^{2p_1(d_1+d_2+d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}$$

$$D_2=-2q\mu_1\kappa_2M_6^{-1}D_3e^{q(d_2+d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}e^{-p_1(d_2+d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}$$

$$C_3=-M_5M_6^{-1}D_3e^{2q(d_2+d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}$$

$$D_3=e^{-q(d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}\left(D_4e^{q(d_3+g_{w1}+l_1+l_2+l)}-\tilde{J}_c'\right)$$

$$C_4=-M_6^{-1}e^{q(d_3+l_1+l_2+l)}\left(D_4M_5e^{2qd_2}e^{q(d_3+l_1+l_2+l)}+\tilde{J}_c'(M_6-e^{2qd_2}M_5)\right)$$

$$D_4=M_{12}^{-1}e^{-q(l_1+l_2+l)}\left(2p_2\mu_0C_5M_6e^{-p_2(l_1+l_2+l)}+\tilde{J}_c'M_9\kappa_3e^{q(d_3+g_{w1})}\right)$$

$$C_5=M_{16}^{-1}e^{p_2(l_2+l)}\left(2p_3\mu_2C_6M_{12}e^{-p_3(l_2+l)}+\mu_0\mu_2\kappa_8\tilde{J}_cM_9e^{q(d_3+g_{w1})}e^{-p_2l_1}\right)$$

$$D_5=M_{12}^{-1}e^{-p_2(l_1+l_2+l)}\left(\mu_0\mu_2M_9\tilde{J}_ce^{q(d_3+g_{w1}}+C_5M_{11}e^{-p_2(l_1+l_2+l)}\right)$$

$$C_6=M_{20}^{-1}e^{p_3l}\left(2p_4\mu_3M_{16}e^{-p_4l}-2\mu_0\mu_2\mu_3\kappa_{12}p_2M_9\tilde{J}_ce^{qd_3}e^{-p_2l_1}e^{-p_3l_2}\right)$$

$$D_7=M_{20}^{-1}e^{-p_4l}\left(4\mu_0\mu_2\mu_3\mu_4p_2p_3M_9\tilde{J}_ce^{qd_3}e^{-p_2l_1}e^{-p_3l_2}+C_7M_{19}e^{-p_4l}\right)$$

$$C_7=4\mu_0\mu_4\tilde{J}_c M^{-1}\left(\mu_2\mu_3 p_2 p_3 M_9 M_{23} e^{q(d_3+g_{w1})} e^{-p_2 l_1} e^{-p_3 l_2} e^{-p_4 l} - \right.$$

$$\left. - \mu_5\mu_6 p_5 p_6 M_{10} M_{20} e^{-q(d_4+g_{w2})} e^{p_6 l_4} e^{p_5 l_3} e^{p_4 l}\right)$$

$$C_8=-M_{30}M^{-1} e^{-p_5 l}$$

$$D_8=M_{18}^{-1} e^{p_5(l+l_3)}\left(2\mu_0\mu_5\mu_6 p_6 M_{10}\tilde{J}_c e^{-qd_4} e^{p_6 l_4} + C_8 M_{17} e^{p_5(l+l_3)}\right)$$

$$C_9=M_{18}^{-1} e^{-p_6(l+l_3)}\left(2\mu_6 p_5 M_{14} C_8 e^{p_5(l+l_3)} + \mu_0\mu_6\kappa_{10} M_{10}\tilde{J}_c e^{-qd_4} e^{p_6 l_4}\right)$$

$$D_9=M_{14}^{-1} e^{p_6(l+l_3+l_4)}\left(M_{13} C_9 e^{p_6(l+l_3+l_4)} + \mu_0\mu_6 M_{10}\tilde{J}_c e^{-q(d_4+g_{w2})}\right)$$

$$C_{10}=M_8^{-1} e^{-q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2})}\left(\tilde{J}_c\left[M_8 - M_7 e^{-2qd_5}\right] - D_{10} M_7 e^{-2qd_5} * \right.$$

$$\left. * e^{-q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2})}\right)$$

$$D_{10}=M_{14}^{-1} e^{q(l+l_3+l_4)}\left(2\mu_0 p_6 M_8 C_9 e^{p_6(l+l_3+l_4)} + \tilde{J}_c\kappa_5 M_{10} e^{-q(d_4+g_{w2})}\right)$$

$$C_{11}=-D_{11} M_7 M_8^{-1} e^{-2q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2}+d_5)}$$

$$D_{11}=e^{q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2})}\left(D_{10} e^{-q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2})} - \tilde{J}_c\right)$$

$$C_{12}=D_{12}\kappa_2\kappa_1^{-1} e^{-2p_1(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2}+d_5+d_6)}$$

$$D_{12}=-2q\mu_1\kappa_1 M_8^{-1} D_{11} e^{-q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2}+d_5)} e^{p_1(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2}+d_5)}$$

$$D_{13}=2\mu_0 p_1\kappa_1^{-1} D_{12} e^{q(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2}+d_5+d_6)} e^{-p_1(l+l_3+l_4+d_4+g_{w2}+d_5+d_6)} \qquad (5\text{-}23)$$

gdzie:

$$q=\sqrt{k^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2} \quad ; \quad \tilde{J}_c=\mu_0\tilde{J}_c(2q)^{-1}$$

$$\kappa_1=p_1\mu_0+q\mu_1 \quad ; \quad \kappa_2=p_1\mu_0-q\mu_1 \quad ; \quad \kappa_3=p_2\mu_0+q\mu_2 \quad ; \quad \kappa_4=p_2\mu_0-q\mu_2$$

$\kappa_5=p_6\mu_0+q\mu_6$; $\kappa_6=p_6\mu_0-q\mu_6$; $\kappa_7=p_2\mu_3+p_3\mu_2$; $\kappa_8=p_2\mu_3-p_3\mu_2$

$\kappa_9=p_5\mu_6+p_6\mu_5$; $\kappa_{10}=p_6\mu_5-p_5\mu_6$; $\kappa_{11}=p_4\mu_3+p_3\mu_4$; $\kappa_{12}=p_4\mu_3-p_3\mu_4$

$\kappa_{13}=p_4\mu_5+p_5\mu_4$; $\kappa_{14}=p_4\mu_5-p_5\mu_4$; $M_1=\kappa_1 e^{2p_1 d_1}+\kappa_2$; $M_2=\kappa_2 e^{-2p_1 d_6}+\kappa_1$

$M_3=\kappa_1 e^{2p_1 d_1}\cdot\kappa_2$; $M_4=\kappa_2 e^{-2p_1 d_6}\cdot\kappa_1$; $M_5=p_1\mu_0 M_3+q\mu_1 M_1$; $M_6=p_1\mu_0 M_3-q\mu_1 M_1$

$M_7=p_1\mu_0 M_4+q\mu_1 M_2$; $M_8=p_1\mu_0 M_4-q\mu_1 M_2$; $M_9=M_6\cdot M_5 e^{2qd_2}$; $M_{10}=M_8-M_7 e^{-2qd_5}$

$M_{11}=\kappa_3 M_6\cdot\kappa_4 M_5 e^{2q(d_2+d_3+g_{w1})}$; $M_{12}=\kappa_4 M_6\cdot\kappa_3 M_5 e^{2q(d_2+d_3+g_{w1})}$

$M_{13}=\kappa_5 M_8\cdot\kappa_6 M_7 e^{-2q(d_4+g_{w2}+d_5)}$; $M_{14}=\kappa_6 M_8\cdot\kappa_5 M_7 e^{-2q(d_4+g_{w2}+d_5)}$

$M_{15}=\kappa_8 M_{12}\cdot\kappa_7 M_{11} e^{-2p_2 l_1}$; $M_{16}=\kappa_7 M_{12}\cdot\kappa_8 M_{11} e^{-2p_2 l_1}$

$M_{17}=\kappa_{10} M_{14}\cdot\kappa_9 M_{13} e^{2p_6 l_4}$; $M_{18}=\kappa_9 M_{14}\cdot\kappa_{10} M_{13} e^{2p_6 l_4}$

$M_{19}=\kappa_{12} M_{16}\cdot\kappa_{11} M_{15} e^{-2p_3 l_2}$; $M_{20}=\kappa_{11} M_{16}\cdot\kappa_{12} M_{15} e^{-2p_3 l_2}$

$M_{21}=\kappa_{14} M_{20} e^{2p_4 l}\cdot\kappa_{13} M_{19} e^{-2p_4 l}$; $M_{22}=\kappa_{13} M_{20} e^{2p_4 l}\cdot\kappa_{14} M_{19} e^{-2p_4 l}$

$M_{23}=\kappa_{13} M_{18}-\kappa_{14} M_{17} e^{2p_5 l_3}$; $M_{24}=\kappa_{14} M_{18}-\kappa_{13} M_{17} e^{2p_5 l_3}$

$$M_{30}=2\mu_0\mu_5\tilde{J}_c\Big(4\mu_2\mu_3\mu_4 p_2 p_3 p_4 M_9 M_{18} e^{q(d_3+g_{w1})} e^{-p_2 l_1} e^{-p_3 l_2} - \mu_6 p_6 M_{10} M_{22} \cdot e^{-q(d_4+g_{w2})} e^{p_6 l_4} e^{p_5 l_3}\Big)$$

$$M=M_{17} M_{22} e^{2p_5 l_3} - M_{21} M_{18} \tag{5-24}$$

$$\tilde{J}_c=\frac{i}{2\pi k}\sum_{m=1}^{M}\frac{I_m}{h_m} e^{sjkH_m} e^{-jkh_m}\sin(kh_m) \quad ; \quad s=\begin{cases}-1 & \text{dla } m\le m'\\ +1 & \text{dla } m>m'\end{cases}$$

Uzyskane rozwiązanie (5-23), (5-24) jest rozwiązaniem końcowym tylko dla jednej praktycznej realizacji nagrzewnicy płaskiej dwustronnej (rys.5.1d). W pozostałych przypadkach należy jeszcze uwzględnić, nie ujęte dotychczas w obliczeniach, "zagięte" części uzwojeń wzbudników, gdyż ich udział w całkowitej impedancji układu jest istotny. Modele obliczeniowe dla tych przypadków (pozostałe przekroje 2-wymiarowe rozważanych nagrzewnic) przedstawia rys.5.2b, c po zamianie rzeczywistych przewodów wzbudnika uzwojeniami foliowymi. Wyjściowe równania różniczkowe są postaci (5-18) i (5-20), a ich rozwiązania mają postać (5-19) i (5-21).

Wprowadzając np.(5-21) do (5-20) uzyskuje się formalnie identyczne układy równań, oczywiście z innymi wymiarami, parametrami elektromagnetycznymi wsadu i gęstościami prądu wzbudnika. Tak więc i rozwiązania (stałe całkowania) są formalnie identyczne z (5-23) po zastąpieniu w nich wymiarów l_i, d_i, H_i, h_i, g przez l'_i, d'_i, H'_i, h'_i, g' lub l''_i, d''_i, H''_i, h''_i, g'' i przenikalności i konduktywności μ_i, γ_i przez μ'_i, γ'_i lub μ''_i, γ''_i oraz gęstości prądu $\tilde{J}_c$ przez odpowiednie wielkości wynikające z konkretnego przypadku. Potencjał wektorowy w dowolnym punkcie przestrzeni (x_0, y_0, z_0, t_0) będzie więc sumą rozwiązań (5-10) i (5- 19) dla nagrzewnicy ze wzbudnikiem owalnym (rys.5.1a, b) lub (5-10) i (5-21) dla nagrzewnicy ze wzbudnikiem pętlowym (rys.5.1c).

Indukcję magnetyczną w poszczególnych obszarach obliczeniowych, gęstość prądów indukowanych, moc czynną wydzielaną w płycie, wektor Poyntinga, siły elektrodynamiczne działające na wsad oblicza się łatwo, korzystając z (5-6) i znanych zależności, np. [125].

Dla wyznaczenia całkowitej impedancji Z nagrzewnicy "widzianej" od strony zacisków wzbudnika można także wykorzystać obliczone potencjały wektorowe. Z uwagi na to, że w rozpatrywanym przypadku wsad nagrzewany jest przez zespół wzbudników znajdujących się w różnych odległościach, z których każdy ma "M" sekcji, impedancja całkowita będzie sumą impedancji (zespolonych) poszczególnych sekcji. Dla i-tej sekcji lewego lub prawego wzbudnika, na bazie II prawa Kirchhoffa, można napisać:

$$Z_i^{(L)} = \mathcal{R}_i - \frac{\mathcal{E}_i^{(L)}}{I_i} \qquad Z_i^{(P)} = \mathcal{R}_i - \frac{\mathcal{E}_i^{(P)}}{I_i} \tag{5-25}$$

gdzie $\mathcal{R}_i$ jest rezystancją własną i-tego uzwojenia, a $\mathcal{E}_i$ SEM indukowaną w nieskończenie cienkim przewodniku (modelującym i-te uzwojenie) umieszczonym w zewnętrznym polu elektromagnetycznym, którą można wyznaczyć:

$$\mathcal{E}_i^{(L)}=-\frac{j\omega G}{2h_i}\int_{sH_i}^{sH_i+2h_i} A_3(y=-d_3-g_{w1},z,t)dz \quad ; \quad \mathcal{E}_i^{(P)}=-\frac{j\omega G}{2h_i}\int_{sH_i}^{sH_i+2h_i} A_{N-2}(y=d_{N-3}+g_{w2},z,t)dz \tag{5-26}$$

gdzie G jest długością uzwojenia w kierunku osi "x". Wprowadzając do ostatniego (5-10), uzyskuje się:

$$Z_i^{(L)}=\mathcal{R}_i+\frac{j\omega G}{h_i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(C_i e^{-k(d_3+g_{w1})}+D_i e^{k(d_3+g_{w1})}\right) e^{jk(sH_i+h_i)}\sin(kh_i)\frac{dk}{k}e^{j\omega t}$$

$$Z_i^{(P)}=\mathcal{R}_i+\frac{j\omega G}{h_i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(C_{N-2} e^{k(d_{N-3}+g_{w2})}+D_{n-2} e^{-k(d_{N-3}+g_{w2})}\right) e^{jk(sH_i+h_i)}\cdot \sin(kh_i/2)\frac{dk}{k}e^{j\omega t} \tag{5-27}$$

Tak więc, impedancja całkowita nagrzewnicy przedstawionej modelem na rys.5.2a z uzwojeniami foliowymi wynosi:

$$Z=\sum_{m=1}^{M}\left(Z_m^{(L)}+Z_m^{(P)}\right) \tag{5-28}$$

Analogicznie jak w przypadku potencjału wektorowego, uzyskane rozwiązanie (5-25) - (5-28) jest słuszne tylko dla jednego wykonania nagrzewnicy płaskiej dwustronnej (rys.5.1d). Dla innych należy jeszcze uwzględnić, nie ujęte dotychczas w obliczeniach pozostałe części uzwojeń wzbudników (rys.5.2b, c). Zastępując w powyższych wyrażeniach odpowiednie wielkości przez ich analogi oznaczone na rysunku symbolami (') lub ('), łatwo uzyska się poszukiwane wyrażenia na impedancję dla modeli z rys. 5.2b,c. Impedancja całkowita będzie sumą odpowiednich wielkości.

Na podstawie uzyskanych wyrażeń (5-6) - (5-28) można stwierdzić, że znajomość potencjałów wektorowych $A_i(x,y,z,t)$ w poszczególnych obszarach obliczeniowych wystarcza dla określenia wszystkich wielkości elektromagnetycznych w analizowanym układzie. W związku z tym obliczenia dla następnych konfiguracji zostaną doprowadzone jedynie do postaci wyrażeń na potencjały.

5.3. Ogólny model obliczeniowy cylindrycznej nagrzewnicy indukcyjnej*)

Urządzenia indukcyjne o symetrii cylindrycznej są najbardziej rozpowszechnione w elektrotermii. Zalicza się bowiem do nich zarówno piece indukcyjne różnych typów, jak i nagrzewnice do nagrzewania wsadów walcowych i rur od zewnątrz i od wewnątrz, a także wiele typów urządzeń magnetohydrodynamicznych do przemieszczania i obróbki ciekłych metali. Skonstruowanie modelu obliczeniowego obejmującego wszystkie wymienione zastosowania jest możliwe, ale uzyskane wyrażenia końcowe byłyby bardzo skomplikowane i trudne do analizowania. Dlatego też rozważany tu ogólny model obliczeniowy (rys.5.5) dotyczy tylko nagrzewania zewnętrznego. Pozwala on na analizę (poprzez odpowiednie przejścia graniczne) rozwiązań spotykanych najczęściej. Przypadek nagrzewania indukcyjnego rur od wewnątrz zostanie omówiony oddzielnie.

Zjawiska elektromagnetyczne zachodzące w układzie z rys.5.5 są opisywane równaniem (5-7), które we współrzędnych cylindrycznych przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left[\frac{1}{r^2}+\mu_i\gamma_i\left(j\omega+v\frac{\partial}{\partial z}\right)-\varepsilon_i\mu_i\omega^2\right]\right)A=0$$

$$A=A_\varphi(r,z)\,e^{j\omega t}\,1_\varphi \tag{5-29}$$

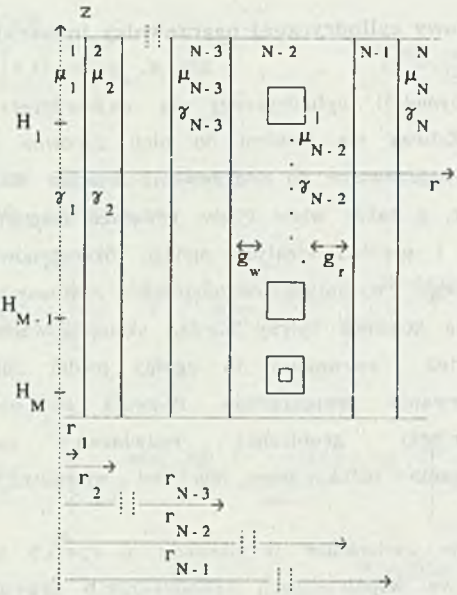
Rozwiązanie ogólne równania (5-29) w i-tym obszarze obliczeniowym można przedstawić jako:

$$A_i=\int_0^\infty\left((C_i(k)\,I_1(p_ir)+D_i(k)\,K_1(p_ir))\,e^{jkz}\,dk\,e^{j\omega t}\,1_\varphi\right. \tag{5-30}$$

gdzie $I_1(pr)$, $K_1(pr)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Besseła i McDonalda rzędu 1, a "p_i" dane jest przez (5-11). Rozwiązanie to jest słuszne we wszystkich obszarach obliczeniowych z rys.5.5, przy czym w poszczególnych obszarach należy przyjąć różne wartości "p". Potencjały wektorowe w poszczególnych obszarach (A_i) spełniają warunki brzegowe (5-8). Wprowadzając potencjały

---

*) *Zagadnienia związane z nagrzewaniem indukcyjnym wsadów cylindrycznych autor analizował w pracach [24-27,29,30,32-33,35,143].*



Rys. 5.5. Ogólny model obliczeniowy nagrzewnicy cylindrycznej zewnętrznej
Fig. 5.5. General calculating model of an external cylindrical heater

wektorowe (5-30) i dowolne gęstości prądowe do warunków brzegowych (5-8) uzyskuje się układ równań dla wyznaczenia stałych $C_i(k)$, $D_i(k)$ przy zadanej gęstości prądu wzbudników $J(r,z,t)$, typu (5-31), gdzie:

$$a_{2i-1}=I_1(p_i r_i) \qquad b_{2i-1}=K_1(p_i r_i) \qquad c_{2i-1}=-I_1(p_{i+1} r_i) \qquad d_{2i-1}=-K_1(p_{i+1} r_i)$$

$$a_{2i}=p_i\mu_{i+1} I_0(p_i r_i) \qquad b_{2i}=-p_i\mu_{i+1} K_0(p_i r_i) \qquad c_{2i}=-p_{i+1}\mu_i I_0(p_{i+1} r_i)$$

$$d_{2i}=p_{i+1}\mu_i K_0(p_{i+1} r_i) \qquad e_{2N-7}=I_1(kr_{N-3}) \qquad e_{2N-6}=k\mu_{N-3} I_0(kr_{N-3})$$

$$e_{2N-5}=-K_1(kr_{N-2}) \qquad e_{2N-4}=k\mu_{N-1} K_0(kr_{N-2}) \tag{5-31}$$

$$\mathcal{A}_l=\mu_0 \sum_{l=1}^{L} G_l K_1(kG_l) \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo}\, e^{-jkh(2o-1)}$$

$$G_l=r_{N-3}+g_w+(2l-1)g \tag{5-32}$$

$$\mathcal{A}_p=\mu_0 \sum_{l=1}^{L} G_l I_1(kG_l) \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo}\, e^{-jkh(2o-1)}$$

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & d_1 & 0 & \cdots & & & & & & & & 0 \\
a_2 & c_2 & d_2 & 0 & \cdots & & & & & & & & 0 \\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\
0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_7 & b_7 & c_7 & d_7 & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_8 & b_8 & c_8 & d_8 & 0 & \cdots & & & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2i-1} & b_{2i-1} & c_{2i-1} & d_{2i-1} & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2i} & b_{2i} & c_{2i} & d_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & \cdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2N-7} & b_{2N-7} & c_{2N-7} & d_{2N-7} & 0 \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2N-6} & b_{2N-6} & c_{2N-6} & d_{2N-6} & 0 \cdots 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2N-5} & b_{2N-5} & c_{2N-5} & d_{2N-5} \; 0 \; 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2N-4} & b_{2N-4} & c_{2N-4} \; d_{2N-4} \; 0 \; 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2N-3} & b_{2N-3} \; d_{2N-3} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2N-2} \; b_{2N-2} \; d_{2N-2}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
C_1 \\ C_2 \\ D_2 \\ C_3 \\ D_3 \\ C_4 \\ D_4 \\ C_5 \\ \cdots \\ C_i \\ D_i \\ \cdots \\ D_{N-3} \\ C_{N-2} \\ D_{N-2} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \\ D_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \mathcal{A}_1 e_{2N-7} \\ \mathcal{A}_1 e_{2N-6} \\ \mathcal{A}_p e_{2N-5} \\ \mathcal{A}_p e_{2N-4} \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\qquad (5\text{-}33)
$$

Wzór (5-33) jest liniowym układem równań rzędu (2N-2) na stałe C_i, D_i, którego rozwiązanie nie nastręcza żadnych trudności. Jednakże uzyskane w ten sposób stałe będą zależne od nieznanych prądów wzbudnika (I_{lmo}). Dla ich wyznaczenia rzeczywiste uzwojenie dzieli się na dowolną ilość małych obszarów (tak jak w przypadku nagrzewnicy płaskiej). Zakłada się, że w każdym z nich płynie pewien (nieznany) prąd I_{lmo} skupiony w znikomo małym przekroju (nitce prądowej), taki że suma wszystkich tych prądów daje całkowity prąd wzbudnika I. Postępując analogicznie jak dla nagrzewnicy płaskiej, oblicza się prądy I_{ijk} numerycznie z układu równań (5-16) - (5-17). Po ich obliczeniu łatwo już można znaleźć stałe całkowania (5-31), a tym samym potencjały wektorowe (5-30) w poszczególnych obszarach obliczeniowych. Wyznaczenie pozostałych wektorów pola oraz zależności energetycznych odbywa się na podstawie znanych zależności.

Znając gęstość mocy czynnej (p_v) we wszystkich elementach nagrzewnicy, w których następuje dyssypacja energii oraz rozkład wektora Poyntinga (S) w całej przestrzeni, można przejść na parametry skupione obwodu tworząc elektryczny schemat zastępczy nagrzewnicy indukcyjnej cylindrycznej analogiczny do przedstawionego na rys.5.4.

Tak więc dla rozwiązania dowolnej nagrzewnicy cylindrycznej zewnętrznej należy wyznaczyć potencjały, a następnie pola w modelu przedstawionym na

rys.5.5. Dla obliczenia potencjałów wewnątrz uzwojeń wzbudników konieczny jest ich podział na pewną ilość elementów w celu wyznaczenia rozkładu prądu w uzwojeniu (5-16), (5-17). Wtedy w ogólności otrzyma się $(2N-2)$ równań na stałe całkowania potencjałów w warstwach metalicznych (wsad, rdzenie) i szczelinach powietrznych, typu (5-31) - (5-32), $(2L)$ równań na stałe całkowania potencjałów wewnątrz uzwojeń, z których oblicza się wielkości typu (5-33) oraz $(L*M*O)$ równań całkowych typu (5-16) dla wyznaczenia rozkładu prądu w uzwojeniu. Pozostaje więc do rozwiazania po $(2N-2+2L+L*M*O)$ równań algebraicznych i całkowych. Należy jednak zaznaczyć, że otrzyma się w ten sposób rozwiązanie zagadnienia tylko dla jednego etapu nagrzewania i procedurę całą należy powtórzyć co najmniej tyle razy, na ile etapów został podzielony cały proces.

Jeżeli głównym celem obliczeń jest wyznaczenie rozkładu pola i mocy we wsadzie lub skonstruowanie elektrycznego schematu zastępczego nagrzewnicy z pominięciem rezystancji własnej uzwojeń wzbudników, wtedy możliwe jest uproszczenie przedstawionej metody obliczeniowej przez przyjęcie stałego rozkładu gęstości prądu wzdłuż każdego zwoju wzbudnika, podobnie jak to zrobiono dla nagrzewnicy płaskiej. Wtedy do rozwiązania pozostaje tylko układ $(2N-2)$ równań typu (5-31), w którym współczynniki (5-32) zależą już od znanych prądów I_i płynących w poszczególnych zwojach.

Dla ilustracji tej metody rozważy się przykładową nagrzewnice cylindryczną (rys.5.5) z uzwojeniami foliowymi, podzieloną na 7 obszarów obliczeniowych, ze wzbudnikiem o dowolnej liczbie (M) zwojów, podzielonym na dowolną liczbę sekcji, w których płyną dowolne, znane prądy (I_i). Postępując zgodnie z opisaną metodyką obliczeń uzyskuje się po rozwiązaniu układu równań (5-12), następujące wyrażenia na stałe całkowania potencjałów (5-30):

$$C_1=\mu_1 r_1^{-1} M_2^{-1} C_2 \quad ; \quad C_2=-M_2 M_1^{-1} D_2 \quad ; \quad D_3=-M_7 M_8^{-1} C_3$$

$$D_2=\mu_0 \mu_2 r_4 r_2^{-1} \tilde{J}_c M_1 (M_{11} K_1(qr_4)-M_{12} I_1(qr_4)) M^{-1}$$

$$C_3=\mu_3 r_1 r_2 r_3^{-1} \mu_1^{-1} \mu_2^{-1} M_8 C_1 \quad ; \quad C_4=-M_{16} M_{15}^{-1} D_4 \quad ; \quad D_4=r_2 \mu_2^{-1} M_{15} M_1^{-1} D_2$$

$$D_5=-r_5 r_6^{-1} \mu_0^{-1} \mu_4^{-1} M_{11} D_7 \quad ; \quad C_5=-M_{12} M_{11}^{-1} D_5 \quad ; \quad C_6=M_4 M_3^{-1} D_6$$

$$D_6=-\mu_0 \mu_4 r_4 r_5^{-1} \tilde{J}_c M_3 (M_{15} K_1(qr_4)-M_{16} I_1(qr_4)) M^{-1} \qquad (5\text{-}34)$$

$$D_7=-\mu_0^2 \mu_4 r_4 r_5^{-1} r_6^{-1} \tilde{J}_c (M_{15} K_1(qr_4)-M_{16} I_1(qr_4)) M^{-1}$$

gdzie:

$$M_1=p_1\mu_2\, I_0(p_1r_1)\, I_1(p_2r_1) - p_2\mu_1\, I_0(p_2r_1)\, I_1(p_1r_1)$$

$$M_2=p_1\mu_2\, I_0(p_1r_1)\, K_1(p_2r_1) + p_2\mu_1\, K_0(p_2r_1)\, I_1(p_1r_1)$$

$$M_3=p_4\mu_0\, I_0(p_4r_6)\, K_1(qr_6) + q\mu_1\, K_0(qr_6)\, I_1(p_4r_6)$$

$$M_4=p_4\mu_0\, K_0(p_4r_6)\, K_1(qr_6) - q\mu_4\, K_0(qr_6)\, K_1(p_4r_6)$$

$$M_5=M_2\, I_0(p_2r_2) + M_1\, K_0(p_2r_2) \quad ; \quad M_6=M_1\, K_1(p_2r_2) - M_2\, I_1(p_2r_2)$$

$$M_7=p_2\mu_3\, M_5\, I_1(p_3r_2) + p_3\mu_2\, M_6\, I_0(p_3r_2)$$

$$M_8=p_2\mu_3\, M_5\, K_1(p_3r_2) - p_3\mu_2\, M_6\, K_0(p_3r_2) \qquad (5\text{-}35)$$

$$M_9=M_5\, I_0(p_4r_5) - M_3\, K_0(p_4r_5) \quad ; \quad M_{10}=M_4\, I_1(p_4r_5) + M_3\, K_1(p_4r_5)$$

$$M_{11}=p_4\mu_0\, M_9\, I_1(qr_5) - q\mu_4\, M_{10}\, I_0(qr_5)$$

$$M_{12}=p_4\mu_0\, M_9\, K_1(qr_5) + q\mu_4\, M_{10}\, K_0(qr_5)$$

$$M_{13}=M_7\, K_1(p_3r_3) - M_8\, I_1(p_3r_3) \quad ; \quad M_{14}=M_8\, I_0(p_3r_3) + M_7\, K_0(p_3r_3)$$

$$M_{15}=p_3\mu_0\, M_{14}\, I_1(qr_3) + q\mu_3\, M_{13}\, I_0(qr_3)$$

$$M_{16}=p_3\mu_0\, M_{14}\, K_1(qr_3) - q\mu_3\, M_{13}\, K_0(qr_3)$$

$$M_{17}=M_{11}\, K_1(qr_4) - M_{12}\, I_1(qr_4) \quad ; \quad M_{18}=M_{15}\, K_1(qr_4) - M_{16}\, I_1(qr_4)$$

$$M=M_{12}\, M_{15} - M_{11}\, M_{16}$$

gdzie $\tilde{J}_c$ dane jest przez (5-24). Pozostałe wielkości elektromagnetyczne oblicza się, podobnie jak w przypadku nagrzewnic płaskich, na podstawie (5-6), a impedancję wzbudnika cylindrycznego zgodnie z (5-25) - (5-28).

5.4. Nagrzewanie wewnętrzne wsadów rurowych

Nagrzewanie wewnętrzne rur stosowane jest w niektórych procesach przeróbki plastycznej, szczególnie wtedy, gdy przeróbce poddawany jest koniec wsadu (np. kalibrowanie, spęczanie, kielichowanie) lub przy hartowaniu powierzchni wewnętrznych rur. Metoda ta zezwala na nagrzewanie cienkościen-

nych rur (o grubości ścianki znacznie mniejszej od głębokości wnikania) wzbudnikiem częstotliwości sieciowej. Pod względem matematycznym zagadnienie jest podobne do omówionych poprzednio. Równaniem wyjściowym jest także (5-29), a jego rozwiązanie ogólne jest postaci (5-30). Różnice występują tylko w warunkach brzegowych i okładzie prądowym wzbudnika (rys.5.6). Po wprowadzeniu rozwiązań do warunków brzegowych uzyskuje się następujący układu równań na stałe całkowania potencjałów wektorowych:

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & d_1 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & & 0 \\
a_2 & c_2 & d_2 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & & 0 \\
0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & \cdots & & & & & & & & 0 \\
0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 & \cdots & & & & & & & & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\
0 & \cdots & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\
0 & \cdots & & 0 & a_7 & b_7 & c_7 & d_7 & 0 & \cdots & & & & & & 0 \\
0 & \cdots & & 0 & a_8 & b_8 & c_8 & d_8 & 0 & \cdots & & & & & & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & 0 & a_{2i-1} & b_{2i-1} & c_{2i-1} & d_{2i-1} & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & \cdots & & & & 0 & a_{2i} & b_{2i} & c_{2i} & d_{2i} & 0 & \cdots & & & & 0 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & a_{2N-7} & b_{2N-7} & c_{2N-7} & d_{2N-7} & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & 0 & a_{2N-6} & b_{2N-6} & c_{2N-6} & d_{2N-6} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & 0 & a_{2N-5} & b_{2N-5} & c_{2N-5} & d_{2N-5} & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & 0 & a_{2N-4} & b_{2N-4} & c_{2N-4} & d_{2N-4} & 0 \; 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & 0 & a_{2N-3} & b_{2N-3} & d_{2N-3} & \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & 0 & a_{2N-2} & b_{2N-2} & d_{2N-2}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
C_1 \\ C_2 \\ D_2 \\ C_3 \\ D_3 \\ C_4 \\ D_4 \\ C_5 \\ \cdots \\ C_i \\ D_i \\ \cdots \\ D_{N-3} \\ C_{N-2} \\ D_{N-2} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \\ D_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathcal{A}_1 e_1 \\ \mathcal{A}_1 e_2 \\ \mathcal{A}_p e_3 \\ \mathcal{A}_p e_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{bmatrix}
\tag{5-36}
$$

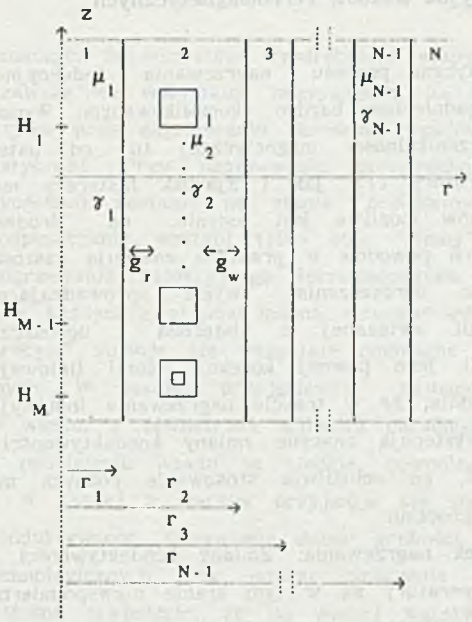
gdzie współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i dane są przez (5-31), natomiast:

$$
e_1 = I_1(kr_1) \quad ; \quad e_2 = k\mu_1 I_0(kr_1) \quad ; \quad e_3 = -K_1(kr_2) \quad ; \quad e_4 = k\mu_3 K_0(kr_2)
$$

$$
\mathcal{A}_1 = \mu_0 \sum_{l=1}^{L} G_l K_1(kG_l) \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} e^{-jkh(2_o-1)}
$$

$$
\mathcal{A}_p = \mu_0 \sum_{l=1}^{L} G_l I_1(kG_l) \sum_{m=1}^{M} e^{-jkH_m} \sum_{o=1}^{O} I_{lmo} e^{-jkh(2_o-1)} \tag{5-37}
$$

$$
G_l = r_l + g_r + g(2l-1)
$$



Rys. 5.6. Ogólny model obliczeniowy nagrzewnicy cylindrycznej wewnętrznej

Fig. 5.6. General calculating model of an internal cylindrical heater

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, (5-36) - (5-37) jest liniowym układem równań rzędu (2N-2) na stałe C_i, D_i, którego rozwiązanie nie nastręcza wielkich trudności. Jednakże uzyskane w ten sposób stałe będą zależne od nieznanych prądów wzbudnika (I_{lmo}). Dla ich wyznaczenia należy postępować zgodnie z opisaną metodyką.

Znając gęstość mocy czynnej (p_v) we wszystkich elementach nagrzewnicy, w których następuje dyssypacja energii oraz rozkład wektora Poyntinga (S) w całej przestrzeni, można przejść na parametry skupione obwodu tworząc elektryczny schemat zastępczy cylindrycznej wewnętrznej nagrzewnicy indukcyjnej, analogiczny do przedstawionego na rys.5.4.

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, możliwe jest uproszczenie przedstawionej metody obliczeniowej przez przyjęcie stałego rozkładu gęstości prądu wzdłuż każdego zwoju wzbudnika, co zezwala na zamodelowanie rzeczywistego wzbudnika uzwojeniem foliowym. Wtedy do rozwiązania pozostaje tylko układ (2N-2) równań typu (5-36), w którym współczynniki (5-37) zależą już od znanych prądów I płynących w poszczególnych zwojach.

5.5. Nagrzewanie indukcyjne wsadów ferromagnetycznych

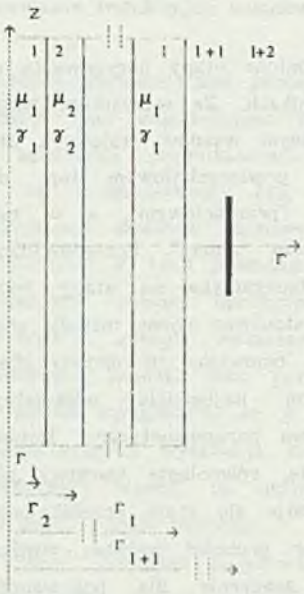
Dokładna analiza matematyczna procesu nagrzewania indukcyjnego wsadów ferromagnetycznych jest zagadnieniem bardzo skomplikowanym. Wymaga bowiem uwzględnienia zależności przenikalności magnetycznej (μ) od natężenia pola magnetycznego (H) i temperatury (T), jak i zjawisk histerezy magnetycznej. Uzyskanie konkretnych wyników możliwe jest jedynie na drodze złożonych obliczeń numerycznych. Z tych powodów w praktyce znajdują zastosowanie metody wprowadzające pewne uproszczenia, zwykle sprowadzające się do pominięcia dyssypacji energii związanej z histerezą i uproszczenia silnie nieliniowej zależności $\mu=\mu(H)$ jako pewnej korekcji teorii liniowej. Proponowana tutaj metoda uwzględnia, że w trakcie nagrzewania indukcyjnego materiałów ferromagnetycznych występują znaczne zmiany konduktywności i przenikalności magnetycznej wsadu, co umożliwia stosowanie różnych modeli obliczeniowych w różnych fazach procesu:

- stan "zimny", początek nagrzewania. Zmiany konduktywności materiału wskutek wzrostu temperatury są w tym stanie niewspółmiernie małe w stosunku do zmian μ. Dlatego przyjmuje się zwykle $\gamma=\gamma_{sr}$=const. Przenikalność magnetyczna w dowolnym punkcie wsadu określona jest krzywą magnesowania. Ponieważ natężenie pola magnetycznego $H=H(r,t)$, więc i przenikalność $\mu=\mu(r,t)$. Na skutek nieliniowego związku między **B** i **H**, także zależności **E**, **H**, **B** od czasu nie są sinusoidalne;
- stan "przejściowy". Temperatura na powierzchni wsadu i w warstwie przypowierzchniowej o pewnej grubości g jest wyższa od temperatury Curie. W tym stanie konduktywność jest funkcją punktu przestrzeni. Wyraźna zmiana konduktywności występuje jednak tylko w warstwie ok. dwóch głębokości wnikania prądu i nie zmniejsza się zwykle więcej niż dwukrotnie. Jest to mało w porównaniu ze zmianami przenikalności, która może wzrastać w głąb dziesiątki razy. Dlatego w praktyce przyjmuje się stałą konduktywność w poszczególnych warstwach, równą wartości średniej. Przenikalność przyjmuje natomiast wartości: $\mu=\mu_0$ w obrębie warstwy o grubości g oraz $\mu=\mu(r,t)$ dla $|r|<g$. Wsad można więc uważać za warstwowy o różnych parametrach μ, γ w poszczególnych warstwach;
- stan "gorący", końcowy etap nagrzewania. Następuje skrośne nagrzanie wsadu, w przybliżeniu do jednakowej temperatury $T>T_c$ i wtedy przyjmuje się model wsadu jednorodnego, izotropowego o parametrach $\mu=\mu_0$ i γ=const.

Należy zaznaczyć, że wszystkie wyodrębnione etapy nagrzewania nie muszą występować zawsze we wszystkich przypadkach. Ze wszystkimi będziemy mieli do czynienia tylko przy nagrzewaniu skrośnym wsadów stalowych dla celów przeróbki plastycznej. Przy nagrzewaniu powierzchniowym (np. do hartowania) proces zakończony zostanie na stanie "przejściowym", a w takich procesach jak np. odpuszczanie wystąpi tylko stan "zimny". Przeprowadzony tu podział procesu nagrzewania indukcyjnego ferromagnetyka na etapy jest dlatego wygodny, że w każdym z etapów można stosować różne metody analizy. I tak w stanie "gorącym" stosuje się wszystkie omówione tu metody dla wsadów niemagnetycznych. W stanie "przejściowym" najbardziej adekwatny jest model warstwowy wsadu, z zewnętrzną warstwą paramagnetyczną. Metoda obliczeniowa polega na podzieleniu wsadu na cienkie, równoległe warstwy płaskie lub cylindryczne. W każdej z warstw przyjmuje się stałą przenikalność magnetyczną i stałą konduktywność. Oczywiście dobór grubości warstw, wynikający z przesłanek technologicznych, ma istotne znaczenie dla poprawności uzyskanych wyników. Można stwierdzić, że im więcej warstw o mniejszej grubości, tym wyniki są dokładniejsze. Z drugiej jednak strony każda dodatkowa warstwa powoduje większą komplikację wzorów końcowych. Z tych względów w konkretnym przypadku należy podzielić wsad na taką ilość warstw, aby uzyskać żądaną dokładność, a równocześnie nie skomplikować zbytnio procesu obliczeniowego. Osobny problem stanowi dobór wartości przenikalności magnetycznej i konduktywności w każdej warstwie. Zagadnienia te omówiono w p.4.3.1. Metoda analizy wsadów ferromagnetycznych na podstawie ich modelu warstwowego może być stosowana zarówno dla układów o symetrii płaskiej, jak i cylindrycznej ze wzbudnikami jednofazowymi. W pracy przedstawiono ogólny model walcowego wsadu stalowego o dowolnej ilości warstw (rys.5.7). Układ składa się z l-warstwowego walca i jednofazowego wzbudnika bezrdzeniowego o wysokości 2h. Potencjały wektorowe w każdym z l obszarów wsadu są postaci:

$$A_i = \int_0^\infty (C_i(k)\, I_1(p_i r) + D_i(k)\, K_1(p_i r)) \cos(kz)\, dk\, e^{j\omega t}\, 1_\varphi \qquad (5\text{-}38)$$

gdzie wielkości p_i wyznaczane są dla średnich wartości konduktywności i przenikalności magnetycznej w obszarze i-tym (i=1,2,..,l). Potencjały wektorowe w szczelinach powietrznych są postaci:



Rys. 5.7. Ogólny model warstwowy wsadu stalowego

Fig. 5.7. The general laminar model of a ferromagnetic charge

$$A_i = \int_0^\infty (C_i(k)\, I_1(kr) + D_i(k)\, K_1(kr)) \cos(kz)\, dk\, e^{j\omega t}\, I_\varphi \qquad (5\text{-}39)$$

$$i = l+1, l+2$$

przy czym należy pamiętać, że stała D_l jest równa zeru (obszar ten zawiera punkt r=0) oraz stała C_{l+2} jest także równa zeru (obszar ten zawiera punkt r=∞). Potencjały (5-38) - (5-39) spełniają następujące warunki brzegowe:

$$A_i = A_{i+1}\Big|_{r=r_i} \quad ; \qquad i=1,2,\ldots,l+1$$

$$\frac{1}{\mu_i}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rA_i)}{\partial r}\right]_{r=r_i} = \frac{1}{\mu_{i+1}}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rA_{i+1})}{\partial r}\right]_{r=r_i} \qquad (5\text{-}40)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rA_{l+1})}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial(rA_{l+2})}{\partial r}\right]_{r=r_{l+1}} = J(r=r_{l+1}, z, t)$$

gdzie gęstość prądu wzbudnika J wynika z konkretnej konstrukcji. Po wprowadzeniu potencjałów (5-38)-(5-39) do warunków brzegowych (5-40) uzyskuje się układ 2l+2 liniowych równań algebraicznych, z których wyznaczenie stałych całkowania nie nastręcza żadnych trudności. Obliczone stałe wprowadza się ponownie do wyrażeń na potencjały wektorowe i wyznacza się rozkład pola magnetycznego we wsadzie. Jeśli obliczony rozkład nie jest zgodny z wstępnie przyjętym dla określenia wartości μ_i w poszczególnych warstwach, to cały tok obliczeń prowadzi się z nowymi wartościami μ_i. Obliczenia iteracyjne kontynuuje się tak długo, aż wyznaczony rozkład pola pokryje się z wstępnie przyjętym do obliczeń. Pozostałe wielkości elektromagnetyczne oblicza się analogicznie jak w poprzednich przypadkach.

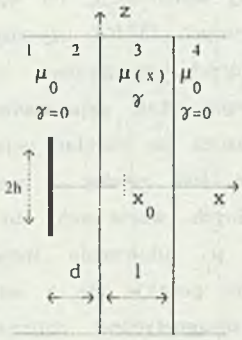
Metoda wsadu warstwowego może dawać, szczególnie w początkowej fazie nagrzewania (tzw. stanie "zimnym", gdy nieznane jest jeszcze pole temperatury we wsadzie), znaczne błędy.Tak więc, dla analizy zagadnienia w stanie "zimnym" proponuje się uogólnioną na zagadnienia dwuwymiarowe metodę Nejmana, polegającą na analitycznej aproksymacji zależności przenikalności magnetycznej od natężenia pola magnetycznego. W swoich już klasycznych pracach z lat 50 [85,86] Nejman rozważał nagrzewanie indukcyjne ferromagnetycznej półprzestrzeni nieskończenie długim wzbudnikiem płaskim. Uzyskał on wiele ciekawych rezultatów teoretycznych, które znalazły potwierdzenie doświadczalne. Jednakże przyjęty przez niego model jednowymiarowy tylko w niewielu przypadkach zbliża się do układu nagrzewnicy rzeczywistej. Autorzy stosujący później jego metodę ograniczali się jedynie do powielania uzyskanych wyników [66,123]. W tej pracy proponuje się uogólnienie metody na zagadnienia dwuwymiarowe [140].

Metoda zostanie przedstawiona na przykładzie płaskiej nagrzewnicy jednostronnej (rys.5.8). Przyjmując za Nejmanem, że przenikalność magnetyczna we wsadzie zmienia się zgodnie z zależnością:

$$\mu_r = \mu_{rs}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-2} \tag{5-41}$$

gdzie μ_r i μ_{rs} są przenikalnościami względnymi we wsadzie i na jego powierzchni, natomiast x_0 jest pewną odległością od powierzchni wsadu, na której pole magnetyczne osiąga tak zwaną wartość krytyczną.

W rozważanym układzie można wyróżnić 4 obszary obliczeniowe, trzy powietrzne oraz wsad. W obszarach powietrznych przyjmuje się oczywiście $\mu_r=1$ i $\gamma=0$, tak jak zakładano dotychczas. Tak więc, potencjał wektorowy w obsza-



Rys. 5.8. Przykładowy model obliczeniowy dla analizy ferromagnetyka w stanie "zimnym"

Fig. 5.8. Examplary calculating model for the analysis of ferromagnetic materials in the "cold state"

rach powietrznych (1, 2, 4) opisywany jest równaniem Laplace'a:

$$\nabla^2 A(x,z,t) = 0 \tag{5-42}$$

którego rozwiązanie można przedstawić w postaci:

$$A(x,z,t) = \int_0^\infty \left[C(k)\, e^{kx} + D(k)\, e^{-kx} \right] \cos(kz)\, dk\, e^{j\omega t}\, \mathbf{1}_y \tag{5-43}$$

Potencjał wektorowy we wsadzie nie jest już opisywany równaniem (5-7), spełnia on bowiem równanie Helmholtza o zmiennych współczynnikach typu:

$$\left(\nabla^2 - m^2(x)\right) A_3(x,z,t) = 0 \tag{5-44}$$

gdzie:

$$m^2(x) = j\omega\gamma\mu_0\mu_{rs}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-2} = j2\delta_s^{-2}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-2} \tag{5-45}$$

przy czym przez δ_s oznaczono głębokość wnikania w warstwie przypowierzchniowej (ze średnimi wartościami konduktywności i przenikalności magnetycznej na powierzchni wsadu). Rozwiązanie ogólne równania (5-44) będzie poszukiwane w postaci analogicznej do (5-43), tzn.:

$$A_3(x,z,t) = \int_0^{\infty} X(x)\cos(kz)\,dk\, e^{j\omega t} I_y \tag{5-46}$$

gdzie część X-owa rozwiązania spełnia równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - (m^2(x)+k^2)X(x) = 0 \tag{5-47}$$

Jest to szczególny przypadek równania różniczkowego liniowego, zwanego równaniem Bôchera [83] lub Kleina-Bôchera [138]. Punkty osobliwe równania (5-47) znajdują się w $x=x_0$ oraz $x=\infty$. Obydwa punkty osobliwe są tzw. punktami regularnymi (nazwa pochodzi od Thomy'ego [83,138]). Niektóre równania Bôchera są całkowalne przez funkcje elementarne lub specjalne, dla innych rozwiązania można uzyskać tylko przez szeregi potęgowe. Równanie (5-47) da się sprowadzić do postaci Bessela i jego rozwiązanie ogólne można przedstawić w postaci [2]:

$$X(x)=\sqrt{x-x_0}\left(C'(k)\, I_\nu(k|x-x_0|) + D'(k)\, K_\nu(k|x-x_0|)\right) \tag{5-48}$$

gdzie

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{1+2j\delta_s^{-2}x_0^2} \tag{5-49}$$

Jednakże występujące w (5-48) zmodyfikowane funkcje Bessela są rzędu zespolonego (5-49), co bardzo komlikuje ich obliczanie numeryczne.

Potencjały wektorowe (5-43) i (5-46) spełniają warunki brzegowe typu:

$$A_1=A_2\Big|_{x=-d} \quad ; \quad A_2=A_3\Big|_{x=0} \quad ; \quad A_3=A_4\Big|_{x=1}$$

$$\left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x}\right]_{x=-d} = \mu_0\, J(x=-d,z,t) \tag{5-50}$$

$$\mu_{rs}\frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial A_3}{\partial x}\Big|_{x=0} \quad ; \quad \frac{(1-x_0)^2}{\mu_0\mu_{rs}}\frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{x_0^2}{\mu_0}\frac{\partial A_4}{\partial x}\Big|_{x=1}$$

gdzie postać gęstości prądu wzbudnika zależy od jego konkretnej konstrukcji.Po obliczeniu stałych całkowania uzyskuje się potencjały wektorowe:

$$A_1 = \frac{2NI\mu_0\mu_{rs}}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin(kh)}{k}\left(e^{kd}(X_{10}(X'_{21}+\mu_{rs}kX_{21}) - (X'_{11}+\mu_{rs}kX_{11})X_{20})M^{-1} + \right.$$

$$\left. + (k\mu_{rs})^{-1}\sinh(kd)\right) e^{kx}\cos(kz)\,dk\, e^{j\omega t}\, 1_y$$

$$A_2 = \frac{NI\mu_0\mu_{rs}}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin(kh)}{k}\left(e^{kx}(X_{10}(X'_{21}+\mu_{rs}kX_{21}) - (X'_{11}+\mu_{rs}kX_{11})X_{20})M^{-1} + \right.$$

$$\left. + (k\mu_{rs})^{-1}\sinh(kx)\right) e^{kd}\cos(kz)\,dk\, e^{j\omega t}\, 1_y \tag{5-51}$$

$$A_3 = \frac{NI\mu_0\mu_{rs}}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin(kh)}{k} e^{kd}\left(X_1(x)(X'_{21}+\mu_{rs}kX_{21}) - (X'_{11}+\mu_{rs}kX_{11})X_2(x)\right)\cdot$$

$$M^{-1}\cos(kz)\,dk\, e^{j\omega t}\, 1_y$$

$$A_4 = \frac{NI\mu_0\mu_{rs}}{\pi h}\int_0^\infty \frac{\sin(kh)}{k} e^{-k(x-d-l)}(X'_{21}X_{11}-X'_{11}X_{21})M^{-1}\cos(kz)\,dk\, e^{j\omega t}\, 1_y$$

gdzie:

$$X_1(x)=\sqrt{x-x_0}\; I_\nu(k|x-x_0|) \quad ; \quad X_2(x)=\sqrt{x-x_0}\; K_\nu(k|x-x_0|)$$

$$M = (\mu_{rs}kX_{20}-X'_{20})(X'_{11}+\mu_{rs}kX_{11}) - (X'_{21}+\mu_{rs}kX_{21})(\mu_{rs}kX_{10}-X'_{10}) \tag{5-52}$$

$$X_{10}=X_1(x=0) \quad ; \quad X_{20}=X_2(x=0) \quad ; \quad X_{11}=X_1(x=l) \quad ; \quad X_{21}=X_2(x=l)$$

$$X'_{10}=\left.\frac{dX_1}{dx}\right|_{x=0} \quad ; \quad X'_{20}=\left.\frac{dX_2}{dx}\right|_{x=0} \quad ; \quad X'_{11}=\left.\frac{dX_1}{dx}\right|_{x=l} \quad ; \quad X'_{21}=\left.\frac{dX_2}{dx}\right|_{x=l}$$

Znając potencjały wektorowe (5-51) we wszystkich obszarach obliczeniowych można już łatwo, analogicznie do poprzednich przypadków obliczyć pozostałe wiekości elektromagnetyczne.

Na podstawie przeprowadzonej analizy zjawisk elektromagnetycznych zachodzących w indukcyjnych układach grzejnych można dokonać następującego podsumowania:

- uzyskano podstawowe zależności dla pola elektromagnetycznego i pola ciepła Joule'a w materiałach przewodzących znajdujących się w przemiennym polu magnetycznym,
- przeanalizowano ogólne modele płaskie i cylindryczne słuszne dla większości stosowanych w praktyce nagrzewnic indukcyjnych z wsadami warstwowymi o dowolnej strukturze i wzbudnikami o dowolnych okładach prądowych,
- przedstawiono przybliżoną metodę analizy modeli trójwymiarowych na przykładach nagrzewnic płaskich ze wzbudnikami owalnymi i pętlowymi,
- opracowano elektryczny schemat zastępczy nagrzewnicy indukcyjnej, w szczególności rozszerzając znane z literatury metody (np. transformatora powietrznego, SEM indukowanych, oporów wnoszonych) o numeryczne wyznaczanie impedancji wzbudnika z uwzględnieniem oddziaływania wsadu i rdzeni magnetycznych,
- przeanalizowano proces nagrzewania indukcyjnego wsadów ferromagnetycznych stosując znane z literatury metody do zagadnienia dwuwymiarowego.

6. ZAGADNIENIA CIEPLNE

Celem analizy cieplnej indukcyjnego układu grzejnego jest przede wszystkim:

- obliczenie czasowo-przestrzennego rozkładu temperatury w nagrzewanym wsadzie,
- obliczenie mocy strat cieplnych oddawanych przez wsad do otoczenia lub innych elementów układu indukcyjnego,
- wyznaczenie sprawności cieplnej nagrzewnicy,
- określenie minimalnego czasu nagrzewania wsadu; minimalnego w tym sensie, aby nie zostały przekroczone dopuszczalne gradienty temperatury oraz została osiągnięta założona równomierność nagrzewania.

Zakres analizy oraz jej dokładność uwarunkowane są założeniami wyjściowymi i wymaganiami stawianymi przez proces technologiczny. Punktem wyjścia jest sporządzenie bilansu energetycznego. W przypadku nagrzewnic indukcyjnych bilansuje się następujące składniki:

- moc dostarczaną do wsadu (P) równą mocy prądów wirowych

$$P = \int_V p_v(r,t)\, dV \tag{6-1}$$

- moc użyteczną (P_u), czyli część mocy dostarczanej zużytkowaną na podniesienie temperatury wsadu

$$P_u = c_T \int_V \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}\, dV \tag{6-2}$$

gdzie c_T jest pojemnością cieplną wsadu, a T polem temperatury;

- moc strat cieplnych (P_T), którą przy założeniu oddawania ciepła wg prawa Newtona można obliczyć z zależności:

$$P_T = \sum_i \int_{\Omega_i} \alpha_i (T(r,t) - T_{oi}(r,t))\, d\Omega_i \tag{6-3}$$

gdzie Ω_i są poszczególnymi powierzchniami wsadu oddającymi ciepło z uogólnionymi współczynnikami wymiany przez konwekcję i promieniowanie α_i do elementów o temperaturach T_{oi}. Tak więc, bilans cieplny wsadu nagrzewanego

indukcyjnie przyjmie postać:

$$P = P_u + P_T \tag{6-4}$$

a sprawność cieplną nagrzewania wsadu określa zależność:

$$\eta_T = 1 - \frac{P_T}{P} \tag{6-5}$$

Pole temperatury we wsadzie nagrzewanym indukcyjnie oblicza się korzystając z równania przewodnictwa cieplnego, które przy założeniu stałych wartości pojemności cieplnej i przewodności cieplnej (λ) przyjmuje postać [18]:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{p_v}{\lambda} \tag{6-6}$$

$$T=T(r,t) \quad ; \quad p_v=p_v(r)$$

gdzie "a" jest tzw. współczynnikiem wyrównywania temperatury (wielkość ta przez Kelvina nazywana była "diffusity of the substance", a przez Maxwella "thermometric conductivity"). Rozwiązanie równania (6-6) określa zmienną w czasie temperaturę wsadu z wewnętrznymi źródłami ciepła o wydajności p_v. W pewnych szczególnych przypadkach równanie (6-6) można uprościć, np. dla pól stacjonarnych bezźródłowych przechodzi ono w równanie Laplace'a, a dla pól stacjonarnych źródłowych w równanie Poissona. Jednakże w zagadnieniach nagrzewania indukcyjnego uproszczenia te nie są możliwe, gdyż występujące pola temperatury są niestacjonarne i źródłowe. Rozwiązaniami równania (6-6) mogą być różne funkcje w zależności od kształtu wsadu, sposobu wymiany ciepła z otoczeniem oraz stanu początkowego. Różne też są sposoby rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego. Do najczęściej stosowanych należą: metoda Fouriera, przekształceń całkowych, odwzorowań konforemnych i metody numeryczne. W pracy zastosowano, podobnie jak w przypadku obliczeń elektromagnetycznych, połączenie metod analitycznych (Fouriera) i numerycznych. Rozważania zostaną ograniczone (tak jak i poprzednio) do płaskich i cylindrycznych konfiguracji wsadu.

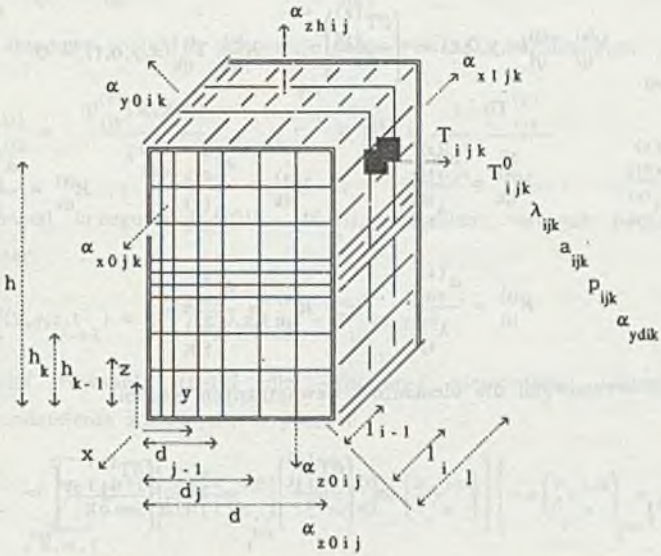
6.1. Pole temperatury przy nagrzewaniu indukcyjnym wsadów płaskich

Ogólny model obliczeniowy dla konfiguracji płaskich przedstawiono na rys.6.1. Jest to metalowa płyta o grubości d, wysokości h i długości l. Na rysunku celowo nie zaznaczono ani wzbudnika, ani innych elementów nagrzewnicy indukcyjnej. Wynika to z faktu, że do obliczeń cieplnych potrzebna jest tylko znajomość gęstości mocy czynnej wydzielanej we wsadzie $p_v(x,y,z)$, natomiast nie jest istotne, w jakiej konfiguracji elektrotermicznej (nagrzewanie jedno- czy dwustronnne, wzbudnikiem jedno- czy wielosekcyjnym, z rdzeniem czy bez rdzenia magnetycznego) nastąpiło nagrzanie. To, jaki był układ grzejny w rzeczywistości, znajduje odbicie w analizie pola temperatury poprzez postać funkcji p_v, kształt warunków brzegowych oraz wartości współczynników oddawania ciepła. Funkcje źródeł dla różnych przypadków nagrzewania indukcyjnego wsadów płaskich zostały obliczone w rozdz.5 na podstawie równań Maxwella. Tak więc, przedstawiona tu metoda jest ogólna dla wszystich płaskich, trójwymiarowych konfiguracji wsad-wzbudnik, a konkretny przypadek otrzymuje się wprowadzając odpowiednią funkcję p_v i wynikające z rozważanego zagadnienia technologicznego warunki początkowe i brzegowe. Dodatkowo przyjmuje się pełną niesymetrię cieplną układu, co tworzy możliwie najogólniejszy model obliczeniowy.

Dla uzyskania rozwiązania proces nagrzewania indukcyjnego wsadu płaskiego dzieli się na etapy (co jest istotą całej stosowanej w rozprawie metody obliczeniowej). W chwili t = 0 (zimny wsad o temperaturze średniej T_0) następuje załączenie wzbudnika i we wsadzie pojawiają się prądy indukowane (wewnętrzne źródła ciepła) powodujące jego nagrzewanie. Nagrzewanie to jest oczywiście nierównomierne i wzrost temperatury w każdym punkcie wsadu jest inny. Załóżmy, że w pewnym wąskim przedziale czasu (np.t_{s-1},t_s) i pewnym małym otoczeniu dowolnego punktu (x_i,y_j,z_k) (prostopadłościanie zbudowanym wokół tego punktu) zmiana temperatury jest liniowa i na tyle niewielka, że można uśrednić (z dobrym przybliżeniem) wartości stałych materiałowych (λ, a) i współczynniki oddawania ciepła (α). Wtedy w otoczeniu tego punktu można sformułować równanie różniczkowe (Kirchhoffa - Fouriera) o stałych współczynnikach, typu (6-6), postaci:

$$\frac{1}{a^{(s)}_{ijk}} \frac{\partial T^{(s)}_{ijk}}{\partial t} = \nabla^2 T^{(s)}_{ijk} + \frac{p^{(s)}_{ijk}}{\lambda^{(s)}_{ijk}} \qquad (6\text{-}7)$$

gdzie: $i=1,2,\ldots,I$; $j=1,2,\ldots,J$; $k=1,2,\ldots,K$; $s=1,2,\ldots,S$



Rys. 6.1. Ogólny model dla obliczania pola temperatury we wsadach płaskich nagrzewanych indukcyjnie

Fig. 6.1. General model for calculations of the temperature field in flat bodies heated inductively

$$T^{(s)}_{ijk} = T^{(s)}_{ijk}(x,y,z,t)$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i \; ; \; y_{j-1} \le y \le y_j \; ; \; z_{k-1} \le z \le z_k \; ; \; t_{s-1} \le t \le t_s \tag{6-8}$$

z warunkiem początkowym:

$$T^{(s)}_{ijk}(x,y,z,t_{s-1}) = T^{(s-1)}_{ijk}(x,y,z,t_{s-1}) \tag{6-9}$$

oraz warunkami brzegowymi dla elementów na powierzchniach wsadu:

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{1jk}}{\partial x}\right)_{x=0} - \mathcal{H}^{(s)}_{1jk}\, T^{(s)}_{1jk}(0,y,z,t) = \left(\frac{\partial T^{(s)}_{1jk}}{\partial x}\right)_{x=l} + \mathcal{H}^{(s)}_{Ijk}\, T^{(s)}_{Ijk}(l,y,z,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{i1k}}{\partial y}\right)_{y=0} - \mathcal{H}^{(s)}_{i1k}\, T^{(s)}_{i1k}(x,0,z,t) = \left(\frac{\partial T^{(s)}_{iJk}}{\partial y}\right)_{y=d} + \mathcal{H}^{(s)}_{iJk}\, T^{(s)}_{iJk}(x,d,z,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ijl}}{\partial z}\right)_{z=0} - \mathcal{H}^{(s)}_{ijl}\, T^{(s)}_{ijl}(x,y,0,t) = \left(\frac{\partial T^{(s)}_{ijK}}{\partial z}\right)_{z=h} + \mathcal{H}^{(s)}_{ijK}\, T^{(s)}_{ijK}(x,y,h,t) = 0$$

$$\mathcal{H}^{(s)}_{ljk} = \frac{\alpha^{(s)}_{x0jk}}{\lambda^{(s)}_{ljk}} \quad ; \quad \mathcal{H}^{(s)}_{ljk} = \frac{\alpha^{(s)}_{xljk}}{\lambda^{(s)}_{ljk}} \quad ; \quad \mathcal{H}^{(s)}_{ilk} = \frac{\alpha^{(s)}_{y0ik}}{\lambda^{(s)}_{ilk}} \quad ; \quad \mathcal{H}^{(s)}_{iJk} = \frac{\alpha^{(s)}_{ydik}}{\lambda^{(s)}_{iJk}}$$

$$\mathcal{H}^{(s)}_{ijl} = \frac{\alpha^{(s)}_{z0ij}}{\lambda^{(s)}_{ijl}} \quad ; \quad \mathcal{H}^{(s)}_{ijK} = \frac{\alpha^{(s)}_{zhij}}{\lambda^{(s)}_{ijK}} \qquad (6\text{-}10)$$

oraz warunkami brzegowymi dla elementów wewnętrznych wsadu:

$$T^{(s)}_{ijk}\Big|_{x=l_i} = T^{(s)}_{i+1,jk}\Big|_{x=l_i} \quad ; \quad \lambda^{(s)}_{ijk}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ijk}}{\partial x}\right)_{x=l_i} = \lambda^{(s)}_{i+1,jk}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{i+1,jk}}{\partial x}\right)_{x=l_i}$$

$$T^{(s)}_{ijk}\Big|_{y=d_j} = T^{(s)}_{ij+1,k}\Big|_{y=d_j} \quad ; \quad \lambda^{(s)}_{ijk}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ijk}}{\partial y}\right)_{y=d_j} = \lambda^{(s)}_{ij+1,k}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ij+1,k}}{\partial y}\right)_{y=d_j}$$

$$T^{(s)}_{ijk}\Big|_{z=h_k} = T^{(s)}_{ij,k+1}\Big|_{z=h_k} \quad ; \quad \lambda^{(s)}_{ijk}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ijk}}{\partial z}\right)_{z=h_k} = \lambda^{(s)}_{ij,k+1}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ij,k+1}}{\partial z}\right)_{z=h_k}$$

$i=1,2,\ldots,I-1$; $j=1,2,\ldots,J-1$; $k=1,2,\ldots,K-1$ (6-11)

gdzie $\alpha^{(s)}_{opqr}$ są uśrednionymi współczynnikami oddawania ciepła przez konwekcję i promieniowanie, przez poszczególne elementy powierzchniowe wsadu (sposoby ich obliczania omówiono np. w [43,65])

Dla rozwiązania równania (6-7) z warunkami (6-9) - (6-11) zastosuje się metodę (pochodzącą od Duhamela [18]) polegającą na rozdzieleniu poszukiwanego rozwiązania na dwie części, z których pierwsza ($T^{(1)}$) opisuje pole temperatury dla stanu ustalonego, a druga ($T^{(2)}$) dla stanu nieustalonego [18,36,51]. Tak więc:

$$T^{(s)}_{ijk}(x,y,z,t) = T^{(1)}_{ijk}(x,y,z) + T^{(2)}_{ijk}(x,y,z,t) \qquad (6\text{-}12)$$

przy czym,

$$\lim_{t\to\infty} T^{(s)}_{ijk} = T^{(1)}_{ijk} \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} T^{(2)}_{ijk} = 0$$

Obydwie składowe spełniają oczywiście różne równania różniczkowe:

$$\nabla^2 T^{(1)}_{ijk} = -\frac{p^{(s)}_{ijk}(x,y,z)}{\lambda^{(s)}_{ijk}} \quad ; \quad \nabla^2 T^{(2)}_{ijk} = \frac{1}{a^{(s)}_{ijk}} \frac{\partial T^{(2)}_{ijk}}{\partial t} \tag{6-13}$$

oraz warunki brzegowe (6-10) - (6-11), natomiast warunek początkowy przyjmuje postać:

$$T^{(2)}_{ijk}(x,y,z,t_{s-1}) = T^{(s-1)}_{ijk}(x,y,z,t_{s-1}) - T^{(1)}_{ijk}(x,y,z) \tag{6-14}$$

Rozwiązanie równania (6-13) dla składowej nieustalonej uzyskuje się łatwo metodą rozdzielenia zmiennych, w postaci:

$$T^{(2)}_{ijk} = \sum_{n,m,k} C^{sijk}_{nmq2}\left[\cos\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right) + D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right) + \right.$$

$$\left. + D^{sijk}_{ym}\sin\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right) + D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-\left(\frac{(\chi^{sijk}_n)^2}{l_i^2} + \frac{(\kappa^{sijk}_m)^2}{d_j^2} + \frac{(\zeta^{sijk}_q)^2}{h_k^2}\right)a^{(s)}_{ijk}\, t\right] \tag{6-15}$$

Wprowadzając (6-15) do (6-10):

$$D^{sijk}_{xn} = \frac{Bi^{(s)}_{xijk}}{\chi^{sijk}_n} \quad ; \quad D^{sijk}_{ym} = \frac{Bi^{(s)}_{yijk}}{\kappa^{sijk}_m} \quad ; \quad D^{sijl}_{zq} = \frac{Bi^{(s)}_{zijl}}{\zeta^{sijl}_q}$$

$$D^{sijk}_{xn} = \frac{\chi^{sijk}_n \sin(\chi^{sijk}_n) - Bi^{(s)}_{xijk}\cos(\chi^{sijk}_n)}{\chi^{sijk}_n \cos(\chi^{sijk}_n) + Bi^{(s)}_{xijk}\sin(\chi^{sijk}_n)}$$

$$D^{sijk}_{ym} = \frac{\kappa^{sijk}_m \sin(\kappa^{sijk}_m) - Bi^{(s)}_{yijk}\cos(\kappa^{sijk}_m)}{\kappa^{sijk}_m \cos(\kappa^{sijk}_m) + Bi^{(s)}_{yijk}\sin(\kappa^{sijk}_m)} \tag{6-16}$$

$$D^{sijk}_{zq} = \frac{\zeta^{sijk}_q \sin(\zeta^{sijk}_q) - Bi^{(s)}_{zijk}\cos(\zeta^{sijk}_q)}{\zeta^{sijk}_q \cos(\zeta^{sijk}_q) + Bi^{(s)}_{zijk}\sin(\zeta^{sijk}_q)}$$

gdzie przyjęto następujące kryteria Biota:

$$Bi^{(s)}_{xljk} = l\,\mathcal{H}^{(s)}_{ljk} \quad ; \quad Bi^{(s)}_{xlik} = l\,\mathcal{H}^{(s)}_{ljk} \quad ; \quad Bi^{(s)}_{yilk} = d\,\mathcal{H}^{(s)}_{ilk} \quad ; \quad Bi^{(s)}_{yijk} = d\,\mathcal{H}^{(s)}_{ijk}$$

$$Bi^{(s)}_{zijl} = h\,\mathcal{H}^{(s)}_{ijl} \quad ; \quad Bi^{(s)}_{zijK} = h\,\mathcal{H}^{(s)}_{ijK} \tag{6-17}$$

Tak więc, na podstawie warunków typu (6-10) można obliczyć ciągi stałych D_n, D_m, D_q dla wszystkich elementów brzegowych wsadu, przy czym na powierzchni (0,0,0) stałe te wyrażają się prostymi zależnościami algebraicznymi, natomiast na powierzchni (l,d,h) równaniami transcendentnymi (przestępnymi), możliwymi do rozwiązania tylko numerycznie. Należy zaznaczyć, że wszystkie stałe D uzależnione są od niewiadomych ciągów wartości własnych χ_n, κ_m, ζ_q. Ciąg stałych C^{sijk}_{nmq2} określi się z warunku początkowego po wyznaczeniu składowej ustalonej temperatury.

Funkcję $T^{(1)}_{ijk}$ spełniającą jednorodne równanie różniczkowe Laplace'a (6-13) i warunki brzegowe (6-10) oblicza się łatwo metodą rozdzielenia zmiennych:

$$T^{(1)}_{ijk} = \sum_{n,m,q} C^{sijk}_{nmq1}\left[\cos\left(\frac{x}{l}_i \chi^{sijk}_n\right) + D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{x}{l}_i \chi^{sijk}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{y}{d}_j \kappa^{sijk}_m\right) + \right.$$

$$\left. + D^{sijk}_{ym}\sin\left(\frac{y}{d}_j \kappa^{sijk}_m\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h}_k \zeta^{sijk}_q\right) + D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{z}{h}_k \zeta^{sijk}_q\right)\right] \tag{6-18}$$

gdzie ciągi stałych całkowania D mają postać (6-16) - (6-17). Ciąg stałych C^{sijk}_{nmq1} należy dobrać tak, aby funkcja (6-18) spełniała równanie różniczkowe Poissona (6-13). Wprowadzając (6-18) do (6-13) uzyskuje się $I*J*K$ równań typu:

$$\sum_{n,m,q} C^{sijk}_{nmq1}\left[\cos\left(\frac{x}{l}_i \chi^{sijk}_n\right) + D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{x}{l}_i \chi^{sijk}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{y}{d}_j \kappa^{sijk}_m\right) + D^{sijk}_{ym} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sin\left(\frac{y}{d}_j \kappa^{sijk}_m\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h}_k \zeta^{sijk}_q\right) + D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{z}{h}_k \zeta^{sijk}_q\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{(\chi^{sijk}_n)^2}{l_i^2} + \frac{(\kappa^{sijk}_m)^2}{d_j^2} + \frac{(\zeta^{sijk}_q)^2}{h_k^2}\right) = \frac{p^{(s)}_{ijk}}{\lambda^{(s)}_{ijk}} \tag{6-19}$$

które można potraktować jako rozwinięcie pewnej znanej (z obliczeń elektromagnetycznych) funkcji p/λ na potrójny, uogólniony szereg Fouriera względem ortogonalnych ciągów funkcji własnych (6-18), w obszarze $\{l_{i-1} \le x \le l_i,\ d_{j-1} \le y \le d_j,\ h_{k-1} \le z \le h_k\}$. Stosując transformację odwrotną uzyskuje się poszukiwany ciąg stałych całkowania postaci:

$$C^{sijk}_{nmql} = 8\left[\left(\frac{(\chi^{sijk}_n)^2}{l_i^2} + \frac{(\kappa^{sijk}_m)^2}{d_j^2} + \frac{(\zeta^{sijk}_q)^2}{h_k^2}\right)\lambda^{(s)}_{ijk}\, M^{sijk}_{nmq}\right]^{-1} N^{sijk}_{nmql}$$

$$N^{sijk}_{nmql} = \iiint\limits_V p^{(s)}_{ijk}\left[\cos\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right) + D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right) + \right.$$

$$\left. + D^{sijk}_{ym}\sin\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right) + D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)\right] dxdydz$$

$$M^{sijk}_{nmq} = \left[(l_i - l_{i-1})\left(1+(D^{sijk}_{xn})^2\right) + \frac{l_i}{\chi^{sijk}_n}\left(\left(1-(D^{sijk}_{xn})^2\right)\cos\left(\frac{l_i+l_{i-1}}{l_i}\chi^{sijk}_n\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{l_i+l_{i-1}}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)\right)\sin\left(\frac{l_i-l_{i-1}}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\left[(d_j - d_{j-1})\left(1+(D^{sijk}_{ym})^2\right) + \frac{d_j}{\kappa^{sijk}_m}\left(\left(1-(D^{sijk}_{ym})^2\right)\cos\left(\frac{d_j+d_{j-1}}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right) + \right.\right. \tag{6-20}$$

$$\left.\left. + 2D^{sijk}_{ym}\sin\left(\frac{d_j+d_{j-1}}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)\right)\sin\left(\frac{d_j-d_{j-1}}{l_i}\kappa^{sijk}_m\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\left[(h_k - h_{k-1})\left(1+(D^{sijk}_{zq})^2\right) + \frac{h_k}{\zeta^{sijk}_q}\left(\left(1-(D^{sijk}_{zq})^2\right)\cos\left(\frac{h_k+h_{k-1}}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{h_k+h_{k-1}}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)\right)\sin\left(\frac{h_k-h_{k-1}}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)\right]$$

Tak więc, znając rozkład źródeł ciepła (p) w całym wsadzie można obliczyć wszystkie stałe C^{sijk}_{nmql}. Korzystając z (6-14) i obliczonych pól temperatury

wyznacza się ciąg stałych C^{sijk}_{nmq2} :

$$C^{sijk}_{nmq2}=\left[(M^{sijk}_{nmq})^{-1}N^{s-1,ijk}_{nmq2}-C^{sijk}_{nmq1}\right]\exp\left[\left(\frac{(\chi^{sijk}_n)^2}{l_i^2}+\frac{(\kappa^{sijk}_m)^2}{d_j^2}+\frac{(\zeta^{sijk}_q)^2}{h_k^2}\right)a^{(s)}_{ijk}t_{s-1}\right] \tag{6-21}$$

$$N^{s-1,ijk}_{nmq2} = \iiint_V T^{(s-1)}_{ijk}\left[\cos\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)+D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)+\right.$$

$$\left.+D^{sijk}_{ym}\sin\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)+D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)\right]dxdydz$$

Pole temperatury w dowolnym (i,j,k) elemencie wsadu, w dowolnym (s) etapie nagrzewania, zgodnie z (6-12) jest postaci:

$$T^{(c)}_{ijk}(x,y,z,t) = \sum_{n,m,q}\left\{C^{sijk}_{nmq1}\left[1\cdot\exp\left[-\left(\frac{(\chi^{sijk}_n)^2}{l_i^2}+\frac{(\kappa^{sijk}_m)^2}{d_j^2}+\frac{(\zeta^{sijk}_q)^2}{h_k^2}\right)\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\cdot\, a^{(s)}_{ijk}(t-t_{s-1})\right]\Bigg]+(M^{sijk}_{nmq})^{-1}N^{s-1,ijk}_{nmq2}\exp\left[-\left(\frac{(\chi^{sijk}_n)^2}{l_i^2}+\frac{(\kappa^{sijk}_m)^2}{d_j^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{(\zeta^{sijk}_q)^2}{h_k^2}\right)a^{(s)}_{ijk}(t-t_{s-1})\right]\right\}\left[\cos\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)+D^{sijk}_{xn}\sin\left(\frac{x}{l_i}\chi^{sijk}_n\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)+D^{sijk}_{ym}\sin\left(\frac{y}{d_j}\kappa^{sijk}_m\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)+D^{sijk}_{zq}\sin\left(\frac{z}{h_k}\zeta^{sijk}_q\right)\right] \tag{6-22}$$

co kończy tok obliczeń analitycznych, jednak należy pamiętać, że występujące w (6-22) wartości własne (ξ,κ,ζ) nie są znane. Wyznaczyć je można tylko metodą numeryczną jako rozwiązania układów równań nieliniowych wynikających z warunków (6-11). Tak więc, tok postępowania jest następujący: po obliczeniu z (6-11) wartości własnych (oczywiście są one różne dla każdego elementu i każdego etapu nagrzewania) i po wprowadzeniu ich do (6-22) określa się pole temperatury we wszystkich elementach dla 1 etapu nagrzewania. Znalezione pole temperatury w chwili $t=t_1$ zezwala na sformułowanie nowego warun-

ku początkowego, typu (6-9), dla 2 etapu nagrzewania. Uzyskany rozkład temperatury na powierzchni wsadu pozwala na obliczenie nowych współczynników oddawania ciepła ($\alpha^{(2)}_{ijk}$) oraz skonstruowanie nowych warunków brzegowych typu (6-10) w 2 etapie nagrzewania. Na tej podstawie, korzystając z otrzymanych zależności ogólnych, można już obliczyć pole temperatury w 2 etapie, itd.

6.2. Pole temperatury przy nagrzewaniu indukcyjnym wsadów walcowych

Ogólny model obliczeniowy w rozważanym przypadku pokazano na rys.6.2. Jest to walec o promieniu ρ i wysokości h, posiadający symetrię osiową. Oczywiście, nie ma żadnych przeszkód formalnych dla rozważenia zagadnienia 3-wymiarowego (ze wzbudnikiem umieszczonym niecentrycznie w stosunku do osi walca), jednakże z przypadkiem takim mamy niezwykle rzadko do czynienia w praktyce grzejnictwa. Podobnie jak dla wsadów płaskich, na rysunku zaznaczono jedynie istotną w obliczeniach cieplnych funcję gęstości mocy czynnej we wsadzie (p_v), w ogólności niesymetryczną oraz schematycznie różne strumienie cieplne przekazywane przez pobocznicę i denka wsadu. Równanie przewodnictwa cieplnego (6-7) we współrzędnych walcowych przyjmuje postać:

$$\frac{1}{a^{(s)}_{ij}}\frac{\partial T^{(s)}_{ij}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T^{(s)}_{ij} + \frac{p^{(s)}_{ij}(r,z)}{\lambda^{(s)}_{ij}} \tag{6-23}$$

$$T^{(s)}_{ij} = T^{(s)}_{ij}(r,z,t)$$

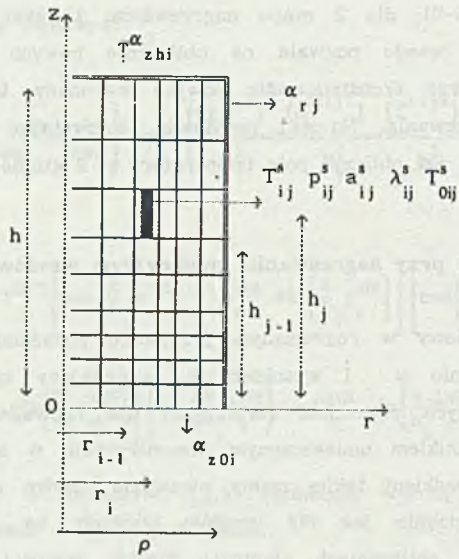
Rozwiązanie tego równania spełnia następujące warunki początkowe i brzegowe [8,18,42,51]:

$$T^{(s)}_{ij}(r,z,t_{s-1}) = T^{(s-1)}_{ij}(r,z,t_{s-1})$$

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ij}}{\partial r}\right)_{r=\rho} + \mathcal{H}^{(s)}_{ij}\, T^{(s)}_{ij}(\rho,z,t) = 0 \tag{6-24}$$

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{i1}}{\partial z}\right)_{z=0} - \mathcal{H}^{(s)}_{i1}\, T^{(s)}_{i1}(r,0,t) = \left(\frac{\partial T^{(s)}_{iJ}}{\partial z}\right)_{z=h} + \mathcal{H}^{(s)}_{iJ}\, T^{(s)}_{iJ}(r,h,t) = 0$$

$$T^{(s)}_{ij}\Big|_{r=r_i} = T^{(s)}_{i+1,j}\Big|_{r=r_i} \quad ; \quad \lambda^{(s)}_{ij}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ij}}{\partial r}\right)_{r=r_i} = \lambda^{(s)}_{i+1,j}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{i+1,j}}{\partial r}\right)_{r=r_i}$$



Rys. 6.2. Ogólny model dla obliczania pola temperatury we wsadach walcowych nagrzewanych indukcyjnie

Fig. 6.2. General model for calculations of the temperature field in cylindrical bodies heated inductively

$$T^{(s)}_{ij}\Big|_{z=h_j} = T^{(s)}_{i,j+1}\Big|_{z=h_j} \quad ; \quad \lambda^{(s)}_{ij}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{ij}}{\partial z}\right)_{z=h_j} = \lambda^{(s)}_{i,j+1}\left(\frac{\partial T^{(s)}_{i,j+1}}{\partial z}\right)_{z=h_j}$$

Zakładając rozwiązanie w postaci:

$$T^{(s)}_{ij}(r,z,t) = T^{(1)}_{ij}(r,z) + T^{(2)}_{ij}(r,z,t) \tag{6-25}$$

gdzie składowe temperatury spełniają równania:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T^{(1)}_{ij} = -\frac{p^{(s)}_{ij}(r,z)}{\lambda^{(s)}_{ij}}$$

$$\frac{1}{a^{(s)}_{ij}}\frac{\partial T^{(2)}_{ij}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T^{(2)}_{ij} \tag{6-26}$$

$$T^{(2)}_{ij}(r,z,t_{s-1}) = T^{(s-1)}_{ij}(r,z,t_{s-1}) - T^{(1)}_{ij}(r,z)$$

uzyskuje się rozwiązanie dla składowej nieustalonej w postaci:

$$T^{(2)}_{ij} = \sum_{n,m} C^{sij}_{nm2} \left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right) + D^{sij}_{rm} Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right] \left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) + \right.$$

$$\left. + D^{sij}_{zm} \sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\right] \exp\left[-\left(\frac{(\tau^{sij}_n)^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta^{sij}_m)^2}{h_j^2}\right) a^{(s)}_{ij}\, t\right] \tag{6-27}$$

Wprowadzając (6-27) do warunków brzegowych, otrzymuje się:

$$D^{slj}_{rm} = \frac{\tau^{slj}_n J_1(\tau^{slj}_n) - Bi^{(s)}_{rj} J_0(\tau^{slj}_n)}{Bi^{(s)}_{rj} Y_0(\tau^{slj}_n) - \tau^{slj}_n Y_1(\tau^{slj}_n)}$$

$$D^{sil}_{zm} = \frac{Bi^{(s)}_{z0i}}{\zeta^{sil}_m} \quad ; \quad D^{siJ}_{zm} = \frac{\zeta^{siJ}_m \sin(\zeta^{siJ}_m) - Bi^{(s)}_{zhi}\cos(\zeta^{siJ}_m)}{\zeta^{siJ}_m \cos(\zeta^{siJ}_m) + Bi^{(s)}_{zhi}\sin(\zeta^{siJ}_m)} \tag{6-28}$$

$$Bi^{(s)}_{rj} = \rho\, \mathcal{H}^{(s)}_{lj} \quad ; \quad Bi^{(s)}_{z0i} = h_l\, \mathcal{H}^{(s)}_{il} \quad ; \quad Bi^{(s)}_{zhi} = h\, \mathcal{H}^{(s)}_{iJ} \quad ;$$

gdzie J_0 i J_1 są funkcjami Bessela pierwszego rodzaju, rzędu 0 i 1, a Y_0 i Y_1 funkcjami Kelvina rzędu 0 i 1. Korzystając z wyznaczonych funkcji własnych, rozwiązanie dla składowej ustalonej można przedstawić jako:

$$T^{(1)}_{ij} = \sum_{n,m} C^{sij}_{nm1} \left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right) + D^{sij}_{rm} Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right] \left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) + \right.$$

$$\left. + D^{sij}_{m} \sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\right] \tag{6-29}$$

Ciąg stałych dowolnych C^{sij}_{nm1} dobiera się tak, aby (6-29) spełniało równanie (6-26). Wtedy:

$$C^{sij}_{nm1} = 4\left[\left(\frac{(\tau^{sij}_n)^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta^{sij}_m)^2}{h_j^2}\right)\lambda^{(s)}_{ij} M^{sij}_{nm}\right]^{-1} N^{sij}_{nm1}$$

$$N^{sij}_{nm1} = \iint_{\Omega} p^{(s)}_{ij} \left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right) + D^{sij}_{rm} Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right] \left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) + \right.$$

$$+ D^{sij}_{zm} \sin\left(\frac{z}{h_j} \zeta^{sij}_m\right)\Bigg] \, rdrdz \tag{6-30}$$

$$M^{sij}_{nm} = \Bigg[(h_j - h_{j-1})\left(1+(D^{sij}_{zm})^2\right) + \frac{h_j}{\zeta^{sij}_m}\left(\left(1-(D^{sij}_{zm})^2\right)\cos\left(\frac{h_j+h_{j-1}}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) +$$

$$+ 2D^{sij}_{zm} \sin\left(\frac{h_j+h_{j-1}}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\right) \sin\left(\frac{h_j-h_{j-1}}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\Bigg] \cdot$$

$$\cdot \left[J_0(\tau^{sij}_n) + J_1\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\tau^{sij}_n\right) - D^{sij}_{rm}\left(Y_0(\tau^{sij}_n) + Y_1\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right)\right]$$

Korzystając z warunku początkowego, uzyskuje się:

$$C^{sij}_{nm2} = \left[(M^{sij}_{nm})^{-1} N^{s-1,ij}_{nm2} - C^{sij}_{nm1}\right] \exp\left[\left(\frac{(\tau^{sij}_n)^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta^{sij}_m)^2}{h_j^2}\right) a^{(s)}_{ij} \, t_{s-1}\right]$$

$$N^{s-1,ij}_{nm2} = \iint_{\Omega} T^{(s-1)}_{ij}\left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right) + D^{sij}_{rm} Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) +\right.$$

$$\left. + D^{sij}_{zm} \sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\right] rdrdz \tag{6-30}$$

Tak więc pole temperatury we wsadzie walcowym o skończonych wymiarach, nagrzewanym indukcyjnie w sposób niesymetryczny, jest postaci:

$$T^{(s)}_{ij}(r,z,t) = \sum_{n,m}\Bigg\{C^{sij}_{nm1}\left(1 - \exp\left[-\left(\frac{(\tau^{sij}_n)^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta^{sij}_m)^2}{h_j^2}\right) a^{(s)}_{ij}\,(t-t_{s-1})\right]\right) +$$

$$+ (M^{sij}_{nm})^{-1} N^{s-1,ij}_{nm2} \exp\left[-\left(\frac{(\tau^{sij}_n)^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta^{sij}_m)^2}{h_j^2}\right) a^{(s)}_{ij}\,(t-t_{s-1})\right]\Bigg\}\left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right) +\right.$$

$$\left. + D^{sij}_{rm} Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) + D^{sij}_{zm} \sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\right] \tag{6-32}$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, należy pamiętać, że tylko część ciągów stałych całkowania i wartości własnych jest znana, resztę trzeba obliczyć numerycznie z warunków brzegowych (6-24).

6.3. Pole temperatury przy nagrzewaniu indukcyjnym wsadów rurowych

Model obliczeniowy przedstawiono na rys.6.3. Pole temperatury we wsadzie jest w tym przypadku opisywane także przez równanie (6-23), którego rozwiązania będzie się poszukiwać w postaci (6-25). Pole to spełnia następujące warunki brzegowe:

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{il}}{\partial z}\right)_{z=0} - \mathcal{H}^{(s)}_{il}\, T^{(s)}_{il}(r,0,t) = \left(\frac{\partial T^{(s)}_{ij}}{\partial z}\right)_{z=h} + \mathcal{H}^{(s)}_{ij}\, T^{(s)}_{ij}(r,h,t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial T^{(s)}_{1j}}{\partial r}\right)_{r=\rho_1} - \mathcal{H}^{(s)}_{1j}\, T^{(s)}_{1j}(\rho_1,z,t) = \left(\frac{\partial T^{(s)}_{1j}}{\partial r}\right)_{r=\rho_2} + \mathcal{H}^{(s)}_{1j}\, T^{(s)}_{1j}(\rho_2,z,t) = 0 \qquad (6\text{-}33)$$

oraz analogiczne do przypadku walca pełnego warunki dla elementów wewnętrznych. Rozwiązanie nieustalone ma postać:

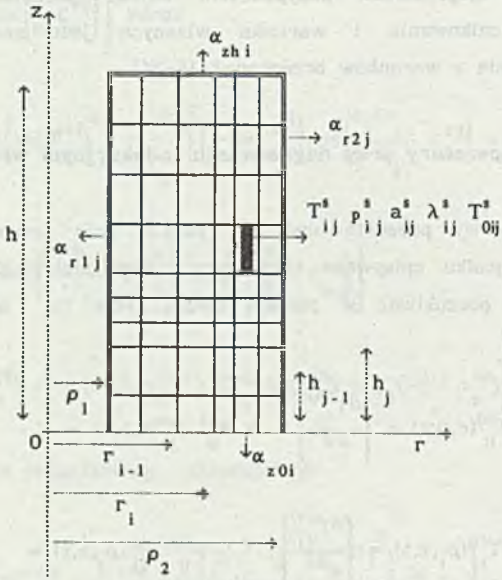
$$T^{(2)}_{ij} = \sum_{n,m} C^{sij}_{nm2}\left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right) + D^{sij}_m\, Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right]\left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) + D^{sij}_{zm}\sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\right]\exp\left[-\left(\frac{(\tau^{sij}_n)^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta^{sij}_m)^2}{h_j^2}\right)a^{(s)}_{ij}\, t\right] \qquad (6\text{-}34)$$

Wprowadzając (6-34) do warunków brzegowych uzyskuje się część ciągów stałych całkowania i wartości własnych:

$$D^{sil}_{zm} = \frac{Bi^{(s)}_{z0i}}{\zeta^{sil}_m} \quad ; \quad D^{siJ}_{zm} = \frac{\zeta^{siJ}_m \sin(\zeta^{siJ}_m) - Bi^{(s)}_{zhi}\cos(\zeta^{siJ}_m)}{\zeta^{siJ}_m \cos(\zeta^{siJ}_m) + Bi^{(s)}_{zhi}\sin(\zeta^{siJ}_m)}$$

$$D^{slj}_n = -\frac{\tau^{slj}_n\, J_1\left(\frac{\rho_1}{r_1}\tau^{slj}_n\right) + Bi^{(s)}_{r1j}\, J_0\left(\frac{\rho_1}{r_1}\tau^{slj}_n\right)}{\tau^{slj}_n\, Y_0\left(\frac{\rho_1}{r_1}\tau^{slj}_n\right) + Bi^{(s)}_{r1j}\, Y_0\left(\frac{\rho_1}{r_1}\tau^{slj}_n\right)} \qquad (6\text{-}35)$$

$$D^{slj}_n = \frac{\tau^{slj}_n\, J_1(\tau^{slj}_n) - Bi^{(s)}_{r2j}\, J_0(\tau^{slj}_n)}{Bi^{(s)}_{r2j}\, Y_0(\tau^{slj}_n) - \tau^{slj}_n\, Y_1(\tau^{slj}_n)}$$



Rys. 6.3. Ogólny model dla obliczania pola temperatury we wsadach rurowych nagrzewanych indukcyjnie

Fig. 6.3. General model for calculations of the temperature field in tubular bodies heated inductively

Rozwiązania ustalonego poszukiwać się będzie w postaci:

$$T_{ij}^{(1)} = \sum_{n,m} C_{nml}^{sij} \left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau_n^{sij}\right) + D_{rm}^{sij}\, Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau_n^{sij}\right)\right] \left[\cos\left(\frac{z}{h_j}\zeta_m^{sij}\right) + D_{zm}^{sij}\sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta_m^{sij}\right)\right] \tag{6-36}$$

gdzie:

$$C_{nml}^{sij} = 4\left[\left(\frac{(\tau_n^{sij})^2}{r_i^2} + \frac{(\zeta_m^{sij})^2}{h_j^2}\right)\lambda_{ij}^{(s)} M_{nm}^{sij}\right]^{-1} N_{nml}^{sij}$$

$$N_{nml}^{sij} = \iint_{\Omega} p_{ij}^{(s)} \left[J_0\left(\frac{r}{r_i}\tau_n^{sij}\right) + D_{rm}^{sij}\, Y_0\left(\frac{r}{r_i}\tau_n^{sij}\right)\right] \left[\cos\left(\frac{z}{h}\zeta_m^{sij}\right) +\right.$$

$$+ D^{sij}_{zm} \sin\left(\frac{z}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\Bigg) \, rdrdz \tag{6-37}$$

$$M^{sij}_{nm} = \Bigg[(h_j - h_{j-1})\left(1+(D^{sij}_{zm})^2\right) + \frac{h_j}{\zeta^{sij}_m}\Bigg(\left(1-(D^{sij}_{zm})^2\right)\cos\left(\frac{h_j+h_{j-1}}{h_j}\zeta^{sij}_m\right) +$$

$$+ 2D^{sij}_{zm}\sin\left(\frac{h_j+h_{j-1}}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\Bigg)\sin\left(\frac{h_j-h_{j-1}}{h_j}\zeta^{sij}_m\right)\Bigg] \cdot$$

$$\cdot \left[J_0(\tau^{sij}_n) + J_1\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\tau^{sij}_n\right) - D^{sij}_{rm}\left(Y_0(\tau^{sij}_n) + Y_1\left(\frac{r_{i-1}}{r_i}\tau^{sij}_n\right)\right)\right]$$

Ciąg stałych dla składowej nieustalonej wyznacza się podobnie jak w poprzednich przypadkach. Ostatecznie pole temperatury w nagrzewanym indukcyjnie wsadzie rurowym jest postaci analogicznej do (6-32) tylko z funkcjami własnymi (6-35).

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że opracowana metoda pozwala na obliczanie rozkładów temperatury we wsadach płaskich i cylindrycznych nagrzewanych indukcyjnie, przy dowolnych (całkowalnych) funkcjach wydajności źródeł cieplnych oraz niesymetrycznych warunkach wymiany ciepła z otoczeniem. Stanowi ona poszerzenie i uogólnienie znanych z literatury metod analizy pól temperatury na złożone zagadnienia 3-wymiarowe, niestacjonarne i źródłowe. Pozwala przy tym na ścisłe połączenie zjawisk elektromagnetycznych i cieplnych, gdyż obliczone na podstawie równań Maxwella rozkłady gęstości mocy czynnej wydzielanej we wsadzie są wprowadzane do równań termokinetyki.

7. ZAGADNIENIA TERMOSPRĘŻYSTE

Rozdział ten oparty został na pracach [56,88,89,91,96] i stanowi jedynie przegląd znanych z literatury rozwiązań, przy czym wprowadzono do nich uzyskane przez autora w poprzednim rozdziale pola temperatur. Obliczenia zagadnień naprężno-deformacyjnych są tylko wykorzystywane do sprawdzenia, czy zadany przez technologa dopuszczalny poziom naprężeń nie został przekroczony.

W ostatnich latach nastąpił znaczny rozwój teorii termosprężystości w związku z wieloma zagadnieniami praktycznymi dotyczącymi nowych technologii i konstrukcji w metalurgii, energetyce, lotnictwie. Powstające konstrukcje pracują często w warunkach nagrzewania niestacjonarnego i nierównomiernego, co wywołuje różną rozszerzalność cieplną poszczególnych części układu. Zjawisko to nie może przebiegać swobodnie i jego konsekwencją jest powstawanie naprężeń cieplnych (termicznych, temperaturowych) w materiale. Określenie wielkości i charakteru tych naprężeń jest konieczne dla wyznaczenia parametrów użytkowych wyrobu. Naprężenia cieplne, same lub wspólnie z siłami zewnętrznymi (mechanicznymi, elektrodynamicznymi), mogą powodować silne deformacje plastyczne, czy nawet pęknięcia wyrobu.

Obecnie twierdzi się, że w ogólnym przypadku zmiana temperatury ciała zachodzi nie tylko na skutek doprowadzenia ciepła ze źródeł zewnętrznych czy wewnętrznych, ale także przez sam proces deformacji. Pojawia się więc tzw. efekt sprzężenia wywołany wzajemnym oddziaływaniem pól deformacji i temperatury. Wyraża się on w tworzeniu i ruchu strumieni cieplnych wewnątrz materiału, powstawaniu sprzężonych, sprężystych i cieplnych fal oraz termosprężystej dyssypacji energii. Istotny udział efektu sprzężenia występuje jednak tylko dla silnie niestacjonarnych pól, nie występujących w powszechnie stosowanym nagrzewaniu indukcyjnym.

W teorii sprężystości zwykle nakłada się ograniczenia na wielkość zaburzenia cieplnego, a przyrosty temperatury przyjmuje się jako małe w porównaniu z temperaturą początkową. Największe znaczenie dla rozważanych w pracy zagadnień ma quasi-statyczna teoria termosprężystości, w której dodatkowo pomija się siły inercji i efekt sprzężenia pól. Człony te mogą zostać pominięte, gdyż w zwykłych warunkach wymiany ciepła efekty dynamiczne (wy-

wołane nagrzewaniem niestacjonarnym) i strumienie cieplne (wywołane przez deformacje) są bardzo małe [56,88,89,91]. Wtedy układ równań opisujących zagadnienie rozdziela się na klasyczne równania niestacjonarnego przewodnictwa cieplnego i równania dla wyznaczenia naprężeń cieplnych przy zadanym polu temperatury.

7.1. Naprężenia cieplne przy nagrzewaniu indukcyjnym

Po wprowadzeniu omówionych uproszczeń oraz dodatkowym pominięciu wpływu sił objętościowych (w przypadku nagrzewania indukcyjnego rolę tę spełniają siły elektrodynamiczne), a także ograniczeniu do ciał jednorodnych i izotropowych uzyska się układ równań zwany uproszczonym układem równań naprężeń cieplnych [88] lub quasi-statycznym, niesprzężonym układem równań termosprężystości [56] postaci:

- równania równowagi

$$\mathrm{div}(\sigma) = 0 \tag{7-1}$$

- równanie przewodnictwa cieplnego

$$\nabla T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{P_v}{\lambda} \tag{7-2}$$

- związki Duhamela-Neumanna

$$\sigma_{ij} = 2\psi\, e_{ij} + (\xi\, \mathrm{Tr}(e) - (3\xi+2\psi)\alpha_T(T-T_0))\delta_{ij}$$

$$\mathrm{Tr}(e) = \frac{\mathrm{Tr}(\sigma)}{3\xi+2\psi} + 3\alpha_T(T-T_0) \tag{7-3}$$

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E_Y}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E_Y}\mathrm{Tr}(\sigma)\,\delta_{ij} + \alpha_T(T-T_0)\delta_{ij}$$

- równania przemieszczeniowe

$$\nabla u + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}(u)) - \frac{2\alpha_T(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}(T-T_0) = 0 \tag{7-4}$$

- warunki nierozdzielności deformacji w naprężeniach

$$(1+\nu)\nabla\sigma + \frac{\partial^2(\mathrm{Tr}(\sigma))}{\partial x_i\,\partial x_j} + E_Y\alpha_T\left(\frac{\partial^2(T-T_0)}{\partial x_i\,\partial x_j} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla(T-T_0)\right)\delta_{ij} = 0 \tag{7-5}$$

- związek dla naprężeń normalnych

$$\nabla(\mathrm{Tr}(\sigma)) + \frac{2E_Y\alpha_T}{1-\nu}\nabla(T-T_0) = 0 \tag{7-6}$$

gdzie σ, e, u są tensorami naprężeń, deformacji i wektorem przemieszczeń, ξ, ψ - izotermicznymi współczynnikami Lamego, ν - liczbą Poissona, E_Y - modułem sprężystości, α_T - współczynnikiem rozszerzalności cieplnej materiału, natomiast przez Tr oznaczono ślad tensora. Dodatkowo symetryczny tensor deformacji e musi spełniać warunki nierozdzielności, a przemieszczenia i naprężenia spełniają następujące warunki początkowe i brzegowe:

$$u_i(t=0) = g_i(x_k) \quad ; \quad \sigma_{ij}(t=0)\cdot l_j = h_i(x_k)$$

$$\sigma_{ij} l_j = f_i(x_k) \tag{7-7}$$

$$\left(2\psi\, e_{ij} + (\xi\, \mathrm{div}(u) - (3\xi+2\psi)\alpha_T(T-T_0))\delta_{ij}\right) l_j = f_i(x_k)$$

$$(i,j,k = 1,2,3)$$

gdzie g, h, f są dowolnymi, zadanymi funkcjami wektorowymi współrzędnych przestrzennych x_k. Pole temperatury spełnia warunki omówione w rozdz.6.

7.2. Naprężenia cieplne we wsadach płaskich

Niech przykładowym modelem dla tego zagadnienia będzie wsad w postaci płyty metalowej o powierzchniach $z=\mp h/2$ (h - grubość płyty). Zakłada się, że temperatura zmienia się tylko wzdłuż grubości płyty, tzn. $T=T(z,t)$. Model taki odpowiada w przybliżeniu np. nagrzewaniu skrośnemu elementów płaskich podawanych w ciągu bez końca do wzbudnika owalnego lub nagrzewaniu blach w polu poprzecznym itp. Wtedy we wsadzie powstaje płaski stan naprężenia [56,88] charakteryzujący się następującymi wielkościami naprężeń: $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma(z)\neq 0$ oraz $\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{xy}=0$. Korzystając z (7-5) uzyskuje się równanie:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\sigma(z) + \frac{E_Y\alpha_T}{1-\nu}(T-T_0)\right) = 0 \tag{7-8}$$

którego rozwiązaniem jest:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy} = -\frac{E_Y\alpha_T}{1-\nu}(T-T_0) + C_1 z + C_2 \tag{7-9}$$

Stałe dowolne C_1, C_2 określa się z warunków brzegowych, które przy wykorzystaniu zasady Saint-Venanta przyjmuje się w postaci zerowania się na powierzchni płyty równoważnej siły i momentu:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma(z)\, dz = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(z)\, zdz = 0 \tag{7-10}$$

Wprowadzając do (7-10) uzyskane rozwiązanie (7-9) otrzymuje się:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E_Y \alpha_T}{1-\nu} \left(\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)\, dz + \frac{12z}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)\, zdz - (T-T_0) \right) \tag{7-11}$$

Występujące w (7-11) pole temperatury $(T-T_0)$ jest znane na podstawie obliczeń cieplnych (vide p.6.1), tak więc odpowiednie całki można obliczyć numerycznie. Uzyskane wyrażenia na pole naprężeń we wsadach płaskich (7-11) jest słuszne dla różnych praktycznych realizacji indukcyjnych nagrzewnic płaskich (gdyż można wprowadzić różne pola temperatur T), jednakże przy założeniu, że zmiany temperatury wzdłuż długości wsadu można z dobrym przybliżeniem uśrednić. Jak widać z (7-11), rozkład naprężeń w trakcie procesu nagrzewania indukcyjnego będzie ulegał zmianom, gdyż pole temperatury zależy od czasu.

Znając pole naprężeń cieplnych można już łatwo wyznaczyć pole deformacji, korzystając ze związku między deformacjami a naprężeniami [89,91]:

$$e_{ij} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij}}{E_Y} - \frac{Tr(\sigma)}{E_Y} \delta_{ij} + \alpha_T (T-T_0) \delta_{ij} \tag{7-12}$$

Wprowadzając (7-11) do (7-12) uzyskuje się:

$$e_{xx} = e_{yy} = \frac{\alpha_T}{h} \left(\int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)\, dz + \frac{12z}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)\, zdz \right) \tag{7-13}$$

$$e_{zz} = -\frac{2\alpha_T \nu}{h(1-\nu)} \left(\int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)\, dz + \frac{12z}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} (T-T_0)\, zdz \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T-T_0)$$

w których, analogicznie do przypadku naprężeń, wielkość i rozkład deformacji zależą od konkretnej postaci obliczonego w p.6.1 pola temperatury.

7.3. Naprężenia cieplne we wsadach cylindrycznych

Niech przykładowym modelem dla tego zagadnienia będzie długi wsad rurowy o promieniu wewnętrznym r_1 i zewnętrznym r_2. Niech we wsadzie tym określone jest (na podstawie obliczeń cieplnych) pole temperatury $T(r,t)$. Wtedy we wsadzie powstaje płaski stan odkształcenia o symetrii osiowej. Różne od zera będą wtedy tylko naprężenia σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ i σ_{zz}. Korzystając z (7-5) we współrzędnych walcowych uzyskuje się:

$$\sigma_{rr} = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} - \frac{E_Y \alpha_T}{1-\nu} \frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} (T-T_0)\, \rho d\rho \tag{7-14}$$

gdzie wprowadzono współrzędne względne: $\rho=r/r_2$ i $\rho_1=r_1/r_2$, a $(T-T_0)$ jest znanym z obliczeń cieplnych niestacjonarnym, źródłowym polem temperatury w rurze. Dla obliczenia stałych całkowania C_1 i C_2 skorzysta się z warunku, że na pobocznicach wsadu brak sił powierzchniowych. Wtedy:

$$\sigma_{rr} = 0 \qquad \text{dla} \qquad \rho=\rho_1 \text{ i } \rho=1$$

skąd wyznacza się stałe całkowania:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_Y \alpha_T}{(1-\nu)\rho^2} \left(\frac{\rho^2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^{1} (T-T_0)\, \rho d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho} (T-T_0)\, \rho d\rho \right) \tag{7-15}$$

Pozostałe naprężenia, deformacje i przemieszczenia oblicza się, zgodnie z podanymi zależnościami, uzyskując:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E_Y \alpha_T}{(1-\nu)\rho^2} \left(\frac{\rho^2+\rho_1^2}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^{1} (T-T_0)\rho d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho} (T-T_0)\rho d\rho - (T-T_0)\rho^2 \right)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu E_Y \alpha_T}{(1-\nu)(1-\rho_1^2)} \int_{\rho_1}^{1} (T-T_0)\rho d\rho - \frac{E_Y \alpha_T}{1-\nu} (T-T_0) \tag{7-16}$$

$$e_{rr} = \frac{(1+\nu)\alpha_T}{(1-\nu)\rho^2} \left(\frac{(1-2\nu)(\rho^2-\rho_1^2)}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^{1} (T-T_0)\rho d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho} (T-T_0)\rho d\rho + (T-T_0)\rho^2 \right)$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{(1+\nu)\alpha_T}{(1-\nu)\rho^2} \left(\frac{(1-2\nu)(\rho^2+\rho_1^2)}{1-\rho_1^2} \int_{\rho_1}^{1} (T-T_0)\rho d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho} (T-T_0)\rho d\rho \right)$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)r_2\alpha_T}{(1-\nu)\rho}\left(\int_{\rho_1}^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho + \frac{(1-2\nu)(\rho^2+\rho_1^2)}{1-\rho_1^2}\int_{\rho_1}^{1}(T-T_0)\rho d\rho\right)$$

Wyrażenia (7-15) - (7-16) w pełni określają zagadnienie termosprężyste związane z płaskim stanem deformacji w długim wsadzie rurowym nagrzewanym indukcyjnie. O występujących w nich całkach należy oczywiście założyć, że istnieją. Zauważyć trzeba przy tym, że otrzymane wyrażenia są słuszne zarówno dla nagrzewania zewnętrznego, jak i wewnętrznego rur. Należy tylko wprowadzić do nich odpowiednie pole temperatury. Wzory te pozwalają również na obliczenie rozkładu naprężeń we wsadzie walcowym pełnym. Wykonując przejście graniczne $\rho_1 \to 0$, otrzymuje się:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_Y\alpha_T}{1-\nu}\left(\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho - \frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho\right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E_Y\alpha_T}{1-\nu}\left(\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho + \frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho - (T-T_0)\right)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu E_Y\alpha_T}{1-\nu}\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho - \frac{E_Y\alpha_T}{1-\nu}(T-T_0) \qquad (7\text{-}17)$$

$$e_{rr} = \frac{(1+\nu)\alpha_T}{1-\nu}\left((1-2\nu)\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho - \frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho + (T-T_0)\right)$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{(1+\nu)\alpha_T}{1-\nu}\left((1-2\nu)\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho + \frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho\right)$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)r_2\alpha_T}{1-\nu}\left(\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho + (1-2\nu)\rho\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho\right)$$

Występujące w wyrażeniach (7-17) nieoznaczoności naprężeń, deformacji i przemieszczeń w osi walca (ρ=0) oblicza się stosując regułę de l'Hospitale'a, uzyskując:

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho\right] = \frac{1}{2}\left(T(\rho=0)-T_0\right) \quad ; \quad \lim_{\rho\to 0}\left[\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho}(T-T_0)\rho d\rho\right] = 0$$

a więc w środku walca otrzymuje się:

$$u_r(0) = 0$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\left[\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho - \frac{1}{2}\left(T(\rho=0) - T_0\right)\right] \tag{7-18}$$

$$e_{rr} = e_{\varphi\varphi} = \frac{(1+\nu)\alpha_T}{1-\nu}\left[(1-2\nu)\int_0^1(T-T_0)\rho d\rho + \frac{1}{2}\left(T(\rho=0) - T_0\right)\right]$$

Na podstawie uzyskanych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- dla otrzymania utylitarnych rozwiązań zagadnień naprężno - deformacyjnych związanych z nagrzewaniem indukcyjnym metali konieczne jest uproszczenie dynamicznych, nieliniowych i sprzężonych równań termosprężystości, sprowadzając je do quasi-statycznego modelu liniowego. Pominięcie członów nieliniowych oraz sprzężenia pól deformacji i temperatury, zgodnie z [56,90,91,93], w najczęściej spotykanych warunkach wymiany ciepła nie ma większego wpływu na rozkłady temperatury i naprężeń,
- w przyjętym modelu możliwe jest rozłączne rozwiązanie równań przewodnictwa cieplnego, a następnie dla obliczonego pola temperatury we wsadzie - zagadnienia naprężno-deformacyjnego.

7.4. Badanie procesu nagrzewania indukcyjnego ze względu na wielkość naprężeń cieplnych

Praktyka pokazuje, że powstające w trakcie nagrzewania indukcyjnego naprężenia cieplne mogą przyjmować różne wartości w zależności od sposobu nagrzewania, częstotliwości i amplitudy prądu wzbudnika, warunków wymiany ciepła oraz sposobu zamocowania wsadu. Dlatego jednym z istotnych problemów staje się dobór takiej metody obróbki cieplnej, aby poziom naprężeń cieplnych był optymalnie niski i nie przewyższał zadanego. Oczywiście przez poziom zadany rozumie się znane założenie wyjściowe (żądanie technologiczne),

że wartość naprężeń normalnych (σ_{kk})*) we wsadzie nie może przekraczać pewnych ustalonych wartości σ^0_{kk}, czyli:

$$|\sigma_{kk}| < \sigma^0_{kk} \tag{7-19}$$

Zagadnienie to należy sprowadzić do doboru (tzn. zadania algorytmu wprowadzania zmian) prądu lub napięcia wzbudnika, gdyż tylko te wielkości można reguiować w trakcie nagrzewania. Wektorem zawierającym natężenie prądu wzbudnika jest używana dotychczas do obliczeń liniowa gęstość prądu wzbudnika, przyjmowana w postaci:

$$J = J_0 e^{j\omega t} 1_\alpha \quad ; \quad J_0 = \frac{NI}{h_w} \tag{7-20}$$

J_0 należy rozumieć jako wartość ustalonej amplitudy, którą wstępnie dobrano dla projektowanej nagrzewnicy, na podstawie elektrycznego schematu zastępczego układu (źródło energii elektrycznej, impedancję zastępczą i parametry zespołów dodatkowych - transformatory, kondensatory, itp.). Amplitudę tę należy rozumieć jako pewną wartość maksymalną, którą można osiągnąć w rozważanym konkretnym wzbudniku. Zwykle tak dobrana amplituda prądu nie będzie optymalna, np. mogą występować zbyt duże straty mocy w uzwojeniu lub następować przekroczenie dopuszczalnej mocy powierzchniowej prowadzące do miejscowego nadtapiania powierzchni, lub pojawiać się zbyt duże gradienty temperatury we wsadzie, itp. Załóżmy jednak dalej, że w dotychczasowym procesie projektowania nagrzewnicy (tzn. po obliczeniach elektromagnetycznych i cieplnych) uwzględniono wszystkie wymienione czynniki ograniczające i dobrano pewną amplitudę optymalną J_{opt}. Wtedy, bez uwzględnienia zagadnień naprężno - deformacyjnych:

$$|J_{opt}| < J_0 \tag{7-21}$$

przy czym wartość $|J_{opt}|$ ulegnie zmianie wskutek nałożenia ograniczeń (7-19). Formalnie zapisać to można w postaci:

$$J = \Phi(t) J_{Opt} e^{j\omega t} 1_\alpha \quad ; \quad 0 \le \Phi(t) \le 1 \tag{7-22}$$

gdzie $\Phi(t)$ nosi nazwę funkcji regulacji prądu wzbudnika. Ograniczenie war-

---

*) *Optymalizację ograniczy się tylko do naprężeń normalnych, gdyż zwykle zadanie ich wystarcza.*

tości $\Phi(t)$ do ułamków właściwych wynika z przeprowadzonego rozumowania, gdyż nie można zwiększyć prądu ponad optymalny, ustalony na podstawie analizy elektromagnetycznej i cieplnej, jak również nie ma sensu wprowadzać wartości ujemnych. Przebieg funkcji $\Phi(t)$ może być skokowy (załącz - 1, wyłącz - 0) lub ciągły, zależnie od posiadanych możliwości regulacji.

Powstające we wsadzie prądy wirowe powodują wydzielanie się ciepła, którego gęstość mocy można zapisać jako:

$$p_v(r,t) = \Psi(t)p_v(r) \tag{7-23}$$

gdzie $\Psi(t)$ nazywa się funkcją regulacji mocy we wsadzie, a $p_v(r)$ jest gęstością mocy czynnej wydzielanej we wsadzie, uzyskaną przy prądzie J_{opt} (proporcjaonalną do J^2_{opt}). Korzystając z definicji mocy czynnej, można napisać, że:

$$\Psi(t) = \Phi^2(t) \tag{7-24}$$

$P_v(r)$ przedstawia przestrzenny rozkład źródeł ciepła we wsadzie wywołujących nierównomierne pole temperatury $T(r,t)$. Taki rozkład temperatury prowadzi do uzyskania w żądanym czasie nagrzewanie (t_g), żądanej temperatury końcowej powierzchni T_k:

$$\max\{T(r,t)\} \le T_K \tag{7-25}$$

Analizując wyrażenia dla pól temperaturowych uzyskane w rozdz.6, można stwierdzić, że:

$$T(r,t) = J_0^2\, T'(r,t) \tag{7-26}$$

Wprowadzając do powyższego (7-20) i (7-22) uzyskuje się:

$$T(r,t) = \Phi^2(t)\, J^2_{opt}\, T'(r,t) = \Psi(t)\, J^2_{opt}\, T'(r,t) = \Psi(t)T_{opt}(r,t) \tag{7-27}$$

przy czym nierówność (7-25) będzie oczywiście spełniona także dla pola $T_{opt}(r,t)$.

Rozkład temperatury (7-27) wywołuje powstanie pola naprężeń σ_{ij}. Analiza zależności dla naprężeń cieplnych uzyskanych w p.7.2 i p.7.3 pozwala na zapisanie ich w postaci ogólnej:

$$|\sigma_{kk}| = \sigma_0 |g(r)T'(r,t)| = \Psi(t)\sigma_0 |f(r)T_{opt}(r,t)| \tag{7-28}$$

$$\sigma_0 = \frac{E_Y \alpha_T}{1-\nu}$$

gdzie g, f są pewnymi funkcjami współrzędnych przestrzennych zależnymi od rozważanego zagadnienia. Na podstawie (7-28) i (7-25), (7-22), (7-19) można na funkcję regulacji mocy we wsadzie $\Psi(t)$, a tym samym na funkcję regulacji prądu wzbudnika $\Phi(t)$ nałożyć ograniczenia umożliwiające optymalizację procesu nagrzewania indukcyjnego ze względu na naprężenia cieplne postaci:

$$0 \le \Phi(t) \le 1 \quad ; \quad \Psi(t) = \Phi^2(t) \quad ; \quad 0 \le t \le t_g \qquad \text{(a)}$$

$$\Psi(t) T_{opt}(r,t) \le T_k \qquad \text{(b)} \qquad (7\text{-}29)$$

$$\Psi(t) T_{opt}(r,t) \le \frac{\sigma^0_{kk}}{\sigma_0 |f(r)|} \qquad \text{(c)}$$

Zespół warunków (7-29) jest możliwy do rozwiązania analitycznego tylko w prostych przypadkach jednowymiarowych. W ogólności lepiej jednak traktować je jako pewne ograniczenia, które wyznacza się metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu nagrzewanie należy zaplanować w reżimie $\Phi^{(1)} = \Phi(t) = 1$, czyli przy prądzie wzbudnika (7-22). Wtedy warunki (7-29a, b) spełnione są automamatycznie. Jeżeli dla $t=t_g$ spełniony jest także warunek (7-29c), to poszukiwany reżim jest optymalny. Jeśli natomiast w jakiejś chwili $t_1 < t_g$ warunek (7-29c) przestaje obowiązywać, to w chwili $t = t_1$ należy przejść na reżim nagrzewania indukcyjnego określony równaniem:

$$\Psi^{(2)}(t) T_{opt}(r,t) = \frac{\sigma^0_{kk}}{\sigma_0 |f(r)|} \qquad (7\text{-}30)$$

i utrzymywać go aż do chwili t_2 $(t_1 < t_2 \le t_g)$, w której przestaje obowiązywać warunek (7-30), itd.

8. METODYKA OBLICZEŃ NAGRZEWNIC INDUKCYJNYCH STOSOWANYCH W PROCESACH OBRÓBKI CIEPLNEJ I PLASTYCZNEJ METALI - ALGORYTMY OBLICZENIOWE

Przeprowadzona w rozdz. 5, 6, 7 analiza teoretyczna zagadnień związanych z nagrzewaniem indukcyjnym metali w procesach obróbki cieplnej i plastycznej pozwala na opracowanie metodyki oraz na skonstruowanie algorytmów obliczeniowych i programów komputerowych.

Opracowana metodyka oparta jest na założeniu, że rzeczywistą nagrzewnicę (będącą w ogólności układem nieliniowym) można w pewnym wąskim przedziale czasu sprowadzić do modelu liniowego. Długość tego przedziału nie może być jednoznacznie określona, gdyż zależy ona od konkretnego procesu technologicznego (np. odpuszczanie, czy odprężanie indukcyjne trwa zwykle godziny, natomiast hartowanie powierzchniowe, szczególnie wysokiej częstotliwości - sekundy), dlatego zamiast operować czasem lepiej oprzeć podział na przyrostach temperatury w poszczególnych elementach. Przyrosty te nie mogą być zbyt duże, gdyż przyjmowane do obliczeń wartości stałych materiałowych i współczynników nie byłyby prawdziwe. W obliczeniach praktycznych autor zwykle przyjmował jako granicę etapu przyrost średniej temperatury w danym elemencie równy 50^0C, przy czym dla pewnych gatunków stali stopowych, gdzie zmiany przewodności cieplnej są szczególnie gwałtowne, lub w okolicy temperatury Curie, zaleca się zmniejszenie tego przyrostu, co zwiększa liczbę etapów.

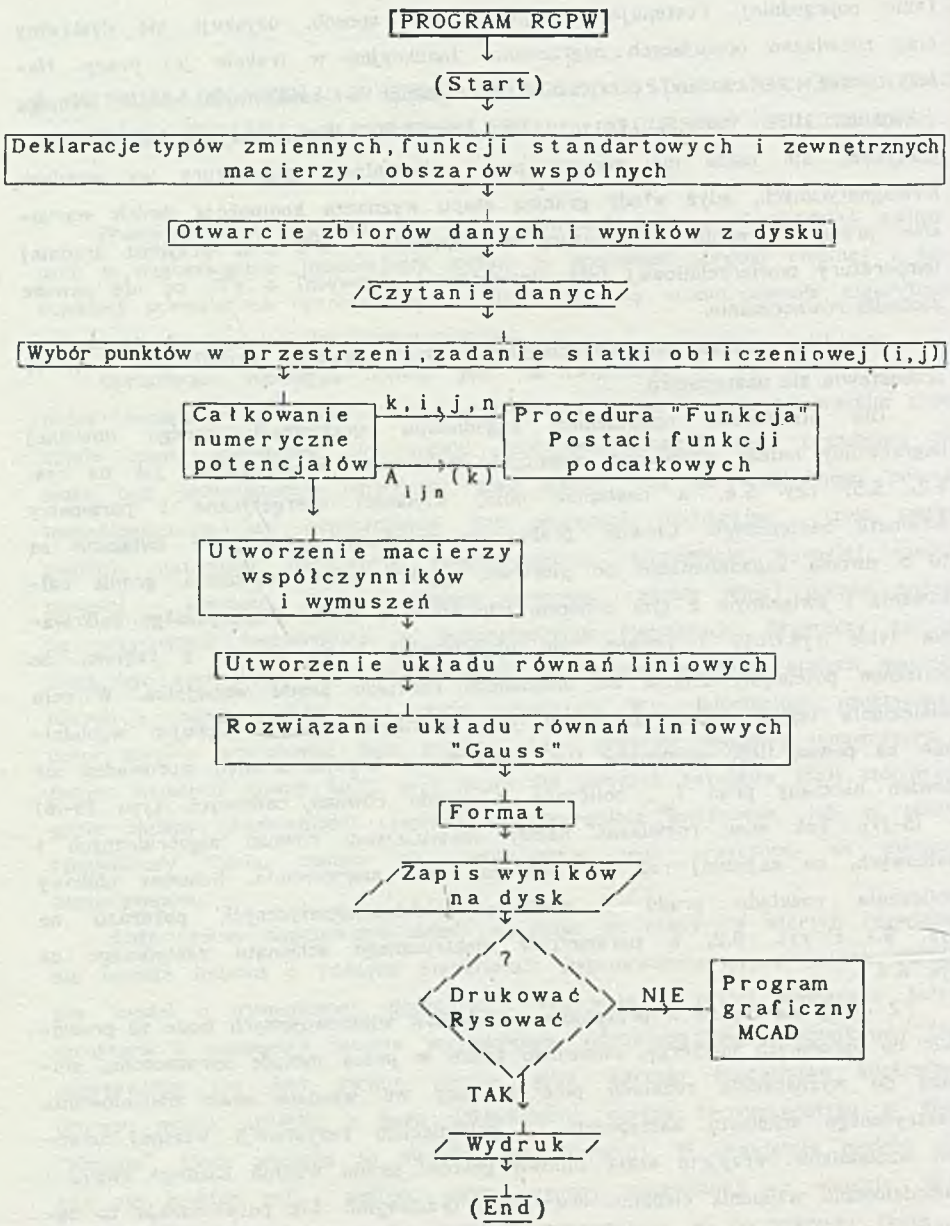
Cały proces nagrzewania dzieli się więc na etapy, w których rozwiązuje się modele liniowe o różnych strukturach (wprowadzone przez autora określenie "model o dynamicznej strukturze"). Przyjęcia a priori wymagają jedynie struktura i parametry modelu wyjściowego, odpowiadającego początkowej fazie nagrzewania (co jest zwykle proste, gdyż warunki początkowe konkretnego procesu można określić z dużą dokładnością, oprócz ferromagnetyka w stanie "zimnym", kiedy wymaga to zwykle kilku iteracji). W przyjętym modelu oblicza się rozkład pól i gęstości mocy czynnej wydzielanej we wsadzie. Wtedy staje się możliwe wyznaczenie rozkładu temperatury w początkowej fazie nagrzewania, a następnie naprężeń cieplnych. Uzyskane wyniki stanowią warunki początkowe dla kolejnego etapu. Struktura i parametry modelu obliczeniowego w następnej fazie nagrzewania są inne, gdyż zależą od wyników otrzymanych w

fazie poprzedniej. Postępując kolejno w ten sposób, uzyskuje się dyskretny ciąg rozwiązań opisujących nagrzewnicę indukcyjną w trakcie jej pracy. Należy dodać, że czasami otrzymanie rozwiązania w konkretnym etapie wymaga dokonania kilku iteracji. Dotyczy to oczywiście wspomnianych już ferromagnetyków, ale także ma miejsce przy obliczeniach temperatury we wsadach niemagnetycznych, gdyż wtedy granicę etapu wyznacza koniunkcja dwóch warunków: przyrost średniej temperatury w elemencie o x^0C oraz przyrost średniej temperatury powierzchniowej (dla elementów brzegowych) o y^0C, co nie zawsze zachodzi równocześnie.

Metodyka obliczeń dla poszczególnych grup zagadnień omawianych w pracy przedstawia się następująco.

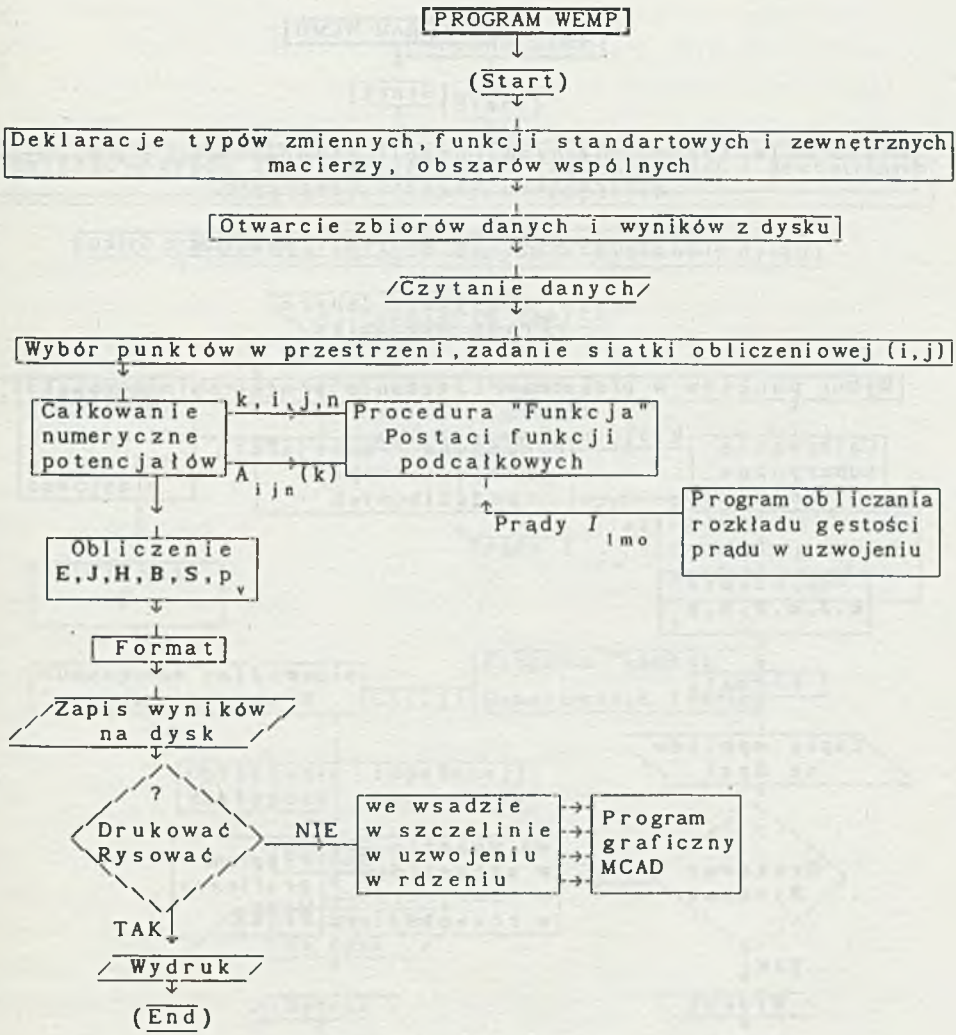
Dla otrzymania rozwiązania zagadnienia elektromagnetycznego dowolnej nagrzewnicy należy wyznaczyć potencjały wektorowe w układach jak na rys. 5.2, 5.5, czy 5.6, a następnie pola, wielkości energetyczne i parametry schematu zastępczego. Główne, praktyczne problemy obliczeniowe związane są tu z dwoma zagadnieniami: po pierwsze z określeniem zbieżności, granic całkowania i związanym z tym doborem odpowiednich metod numerycznego całkowania (vide rys.DI.19 i podane tam objaśnienia) i po drugie z faktem, że obliczone potencjały zależą od nieznanego rozkładu prądu wzbudnika. W celu znalezienia tego rozkładu konieczny jest dodatkowy podział uzwojeń wzbudników na pewną ilość elementów (np. rys.5.3); w każdym z nich wprowadza się pewien nieznany prąd I_{ijk}, obliczany z układu równań całkowych typu (5-16) - (5-17). Tak więc rozwiązać należy $(2N-2+2L+L\cdot M\cdot O)$ równań algebraicznych i całkowych, co najmniej raz dla każdego etapu nagrzewania. Schemat blokowy obliczania rozkładu prądu i wielkości elektromagnetycznych pokazano na rys. 8.1 i rys. 8.2, a parametrów elektrycznego schematu zastępczego na rys. 8.4.

Z uwagi na to, że w przypadku wzbudników wielozwojowych może to prowadzić do ogromnych macierzy, omówiono także w pracy metodę uproszczoną, służącą do wyznaczania rozkładu pola i mocy we wsadzie oraz zdefiniowania elektrycznego schematu zastępczego z pominięciem rezystancji własnej uzwojeń wzbudników. Przyjęto stałą liniową gęstość prądu wzdłuż każdego zwoju i zamodelowano wzbudnik cienkimi warstwami prądowymi. Jak potwierdzają to badania autora, a także doniesienia literaturowe, uzyskiwana niedokładność obliczenia omawianych parametrów nie przekracza ok. 10%. Blokowy schemat obliczeń w przypadku metody uproszczonej pokazano na rys.8.3 i rys.8.5.



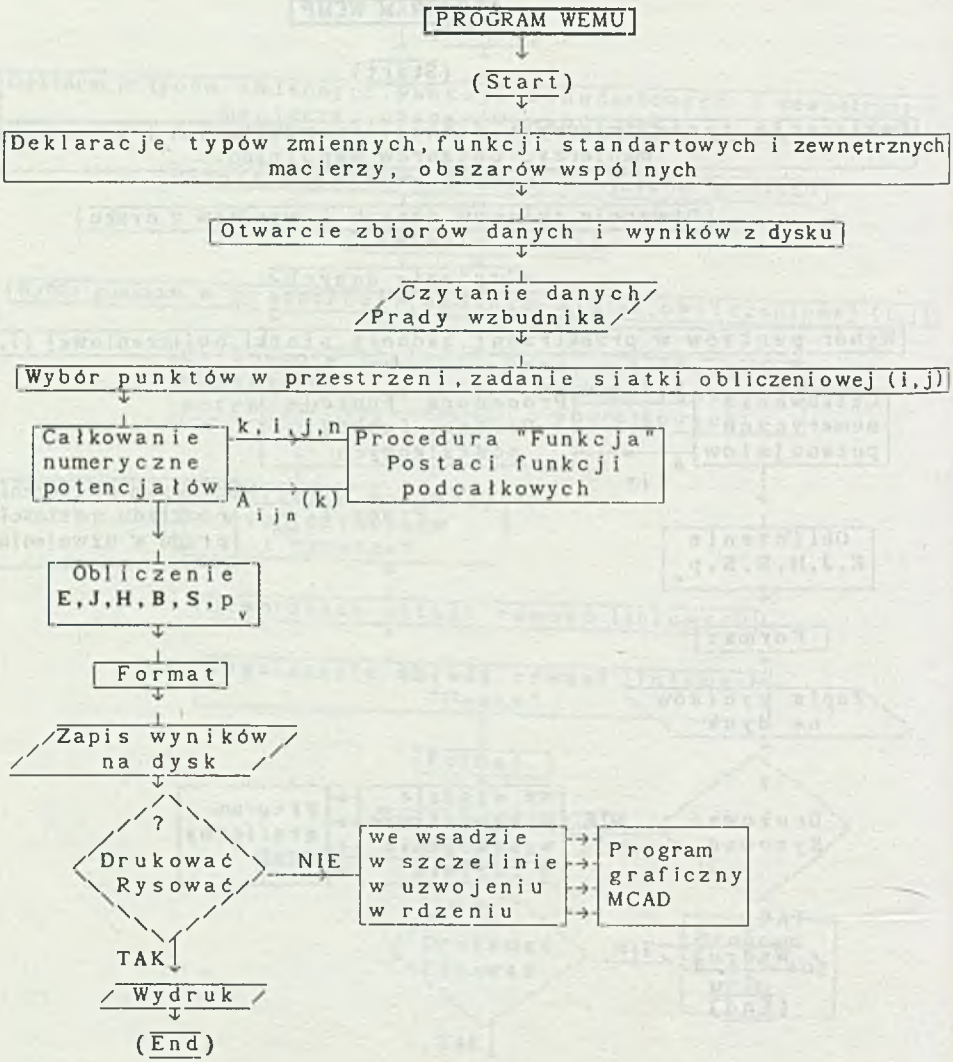
Rys. 8.1. Algorytm obliczania rozkładu gęstości prądu w uzwojeniu

Fig. 8.1. Block diagram for computations of the current density distribution in coils



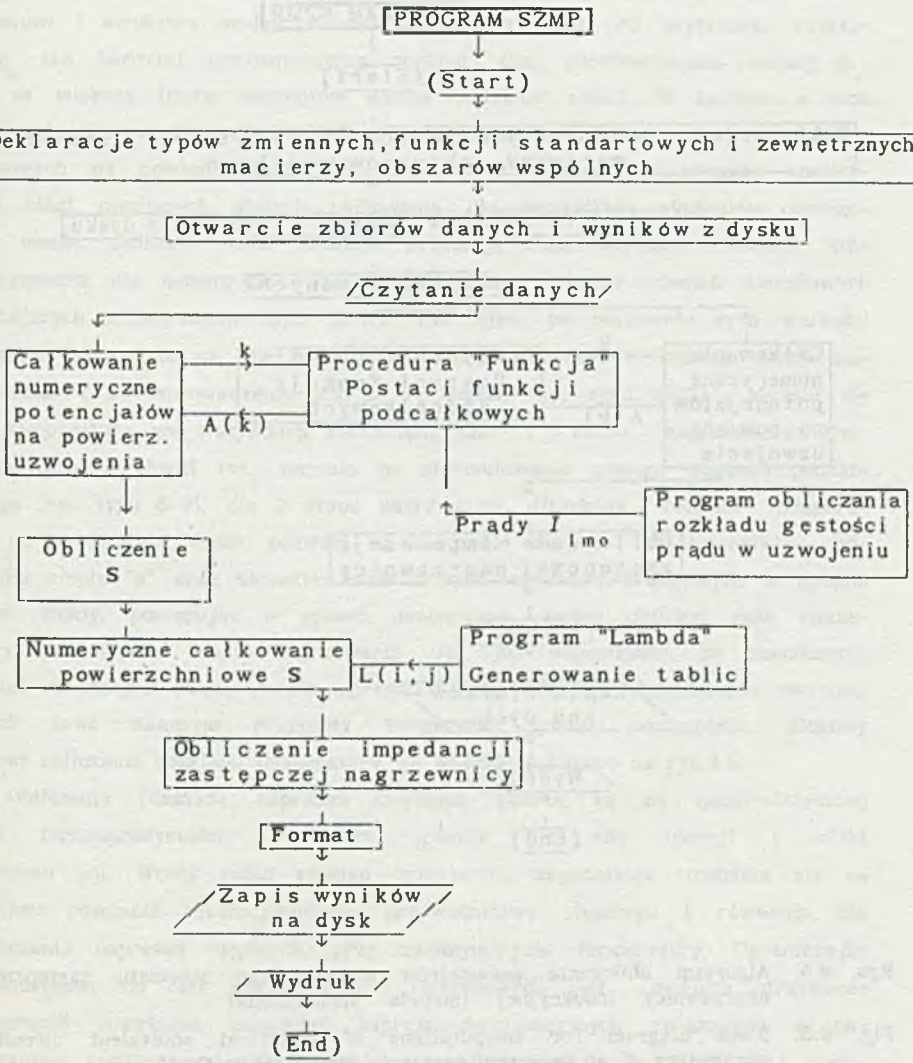
Rys. 8.2. Algorytm obliczania wielkości elektromagnetycznych nagrzewnic indukcyjnych (z uwzględnieniem rzeczywistego rozkładu prądu w uzwojeniu)

Fig. 8.2. Block diagram for computations of electromagnetic values of induction heaters (including the true current distribution in a coil)



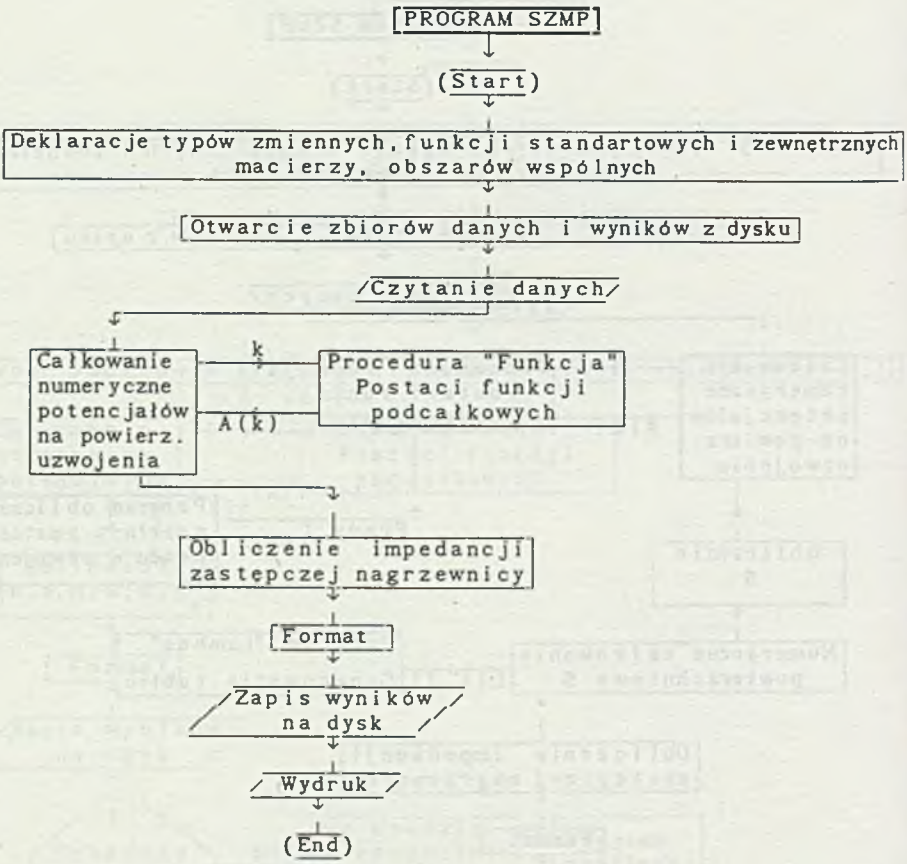
Rys. 8.3. Algorytm obliczania wielkości elektromagnetycznych nagrzewnic indukcyjnych (metoda uproszczona)

Fig. 8.3. Block diagram for computations of electromagnetic values of induction heaters (a simplified method)



Rys. 8.4. Algorytm obliczania parametrów elektrycznego schematu zastępczego nagrzewnicy indukcyjnej (z uwzględnieniem rzeczywistego rozkładu prądu w uzwojeniu).

Fig. 8.4. Block diagram for computations of electrical equivalent circuit parameters of an induction heater (including the true current distribution in a coil).

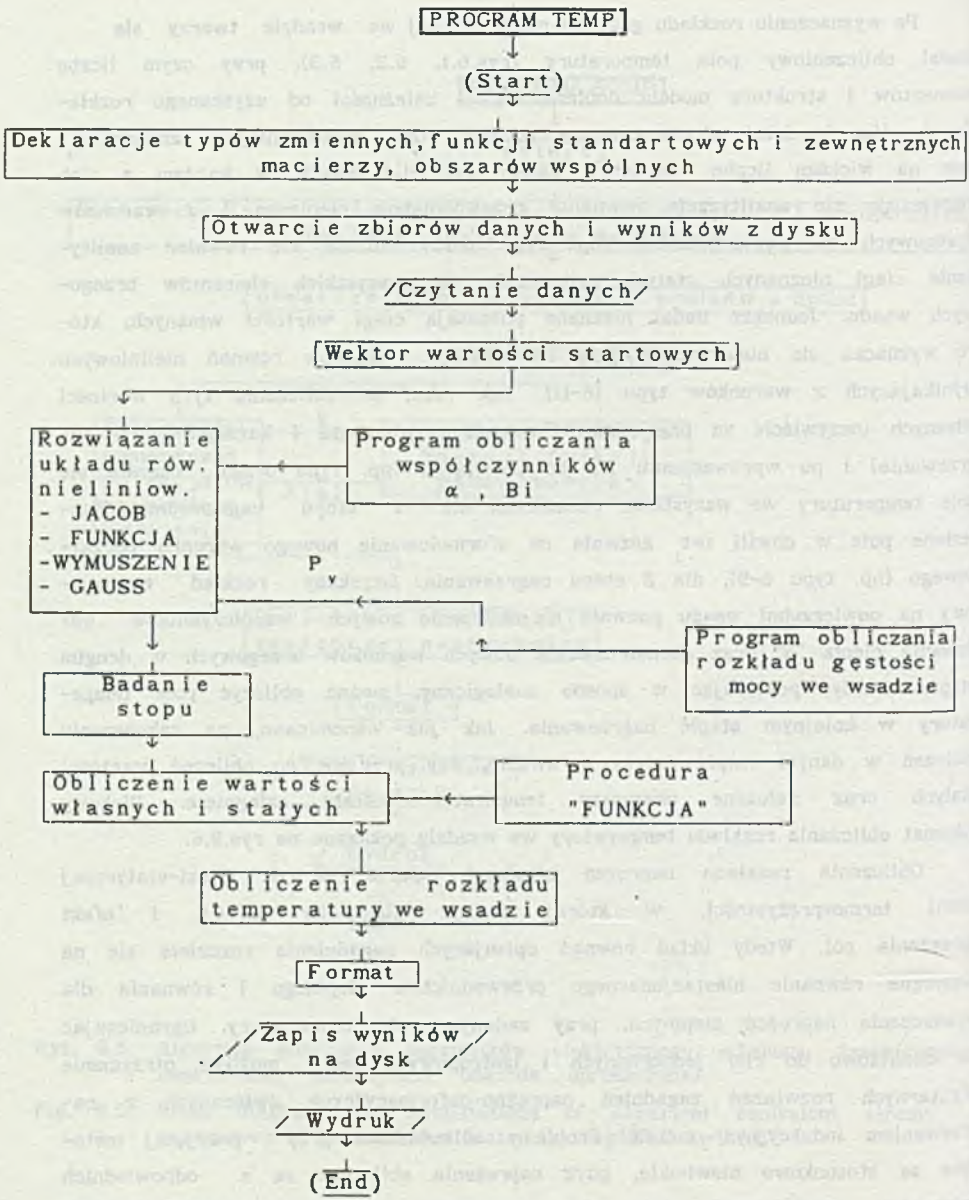


Rys. 8.5. Algorytm obliczania parametrów elektrycznego schematu zastępczego nagrzewnicy indukcyjnej (metoda uproszczona)

Fig. 8.5. Block diagram for computations of electrical equivalent circuit parameters of an induction heater (a simplified method)

Po wyznaczeniu rozkładu gęstości mocy czynnej we wsadzie tworzy się model obliczeniowy pola temperatury (rys.6.1, 6.2, 6.3), przy czym liczbę elementów i strukturę modelu dobiera się w zależności od uzyskanego rozkładu p_v (im bardziej nierównomierny rozkład, tzn. gwałtowniejsze zmiany p_v, tym na większą liczbę elementów należy podzielić wsad). W każdym z nich rozwiązuje się analitycznie równanie przewodnictwa cieplnego i z warunków brzegowych na powierzchniach (np. typu 6-10) oblicza się również analitycznie ciągi nieznanych stałych całkowania dla wszystkich elementów brzegowych wsadu. Jednakże nadal nieznane pozostają ciągi wartości własnych, które wyznacza się numerycznie jako rozwiązania układów równań nieliniowych wynikających z warunków typu (6-11). Tak więc, po obliczeniu tych wartości własnych (oczywiście są one różne dla każdego elementu i każdego etapu nagrzewania) i po wprowadzeniu ich do rozwiązań (np. typu 6-22) określa się pole temperatury we wszystkich elementach dla 1 etapu nagrzewania. Znalezione pole w chwili $t=t_1$ zezwala na sformułowanie nowego warunku początkowego (np. typu 6-9), dla 2 etapu nagrzewania. Uzyskany rozkład temperatury na powierzchni wsadu pozwala na obliczenie nowych współczynników oddawania ciepła "α" oraz skonstruowanie nowych warunków brzegowych w drugim etapie. Wtedy, postępując w sposób analogiczny, można obliczyć pole temperatury w kolejnym etapie nagrzewania. Jak już wspominano, po zakończeniu obliczeń w danym etapie należy sprawdzić, czy przyjęte do obliczeń wartości stałych oraz założone przyrosty temperatur zostały osiągnięte. Blokowy schemat obliczania rozkładu temperatury we wsadzie pokazano na rys.8.6.

Obliczenia rozkładu naprężeń cieplnych oparte są na quasi-statycznej teorii termosprężystości, w której pomija się siły inercji i efekt sprzężenia pól. Wtedy układ równań opisujących zagadnienie rozdziela się na klasyczne równanie niestacjonarnego przewodnictwa cieplnego i równania dla wyznaczenia naprężeń cieplnych, przy zadanym polu temperatury. Ograniczając się dodatkowo do ciał jednorodnych i izotropowych jest możliwe otrzymanie utylitarnych rozwiazań zagadnień naprężno-deformacyjnych związanych z nagrzewaniem indukcyjnym metali. Problemy obliczeniowe przy przyjętej metodyce są stosunkowo niewielkie, gdyż naprężenia obliczane są z odpowiednich zależności, przy znanym już polu temperatury. Osobnym problemem (p.7.4) jest optymalizacja poziomu naprężeń w nagrzewanym wyrobie, która wymaga dalszych badań.



Rys. 8.6. Algorytm obliczania pola temperatury we wsadach stałych nagrzewanych indukcyjnie

Fig. 8.6. Block diagram for computations of the temperature field in solids heated inductively

9. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy rozpatrzono klasę nagrzewnic indukcyjnych płaskich i cylindrycznych. Należą do nich najczęściej stosowane w praktyce: płaskie nagrzewnice jedno- i dwustronne, a także nagrzewnice wsadów walcowych i rurowych. Analizę teoretyczną zjawisk elektromagnetycznych, cieplnych i termosprężystych oparto na uniwersalnych modelach obliczeniowych, dla których rozwiązania równań różniczkowych elektrodynamiki i przewodnictwa cieplnego uzyskano częściowo na drodze analitycznej (wykorzystując przekształcenia Fouriera), a częściowo metodami numerycznymi. Pozwoliło to na stworzenie uniwersalnej, a jednocześnie efektywnej metody obliczeniowej.

Do najważniejszych zagadnień przedstawionych w pracy należą:

- opracowanie lub rozwinięcie ogólnych modeli obliczeniowych nagrzewnic indukcyjnych płaskich i cylindrycznych z uwzględnieniem zjawisk elektromagnetycznych cieplnych i termosprężystych wraz z odpowiadadającymi im programami na EMC;
- opracowanie analityczno - numerycznej metody analizy zjawisk związanych z nagrzewaniem indukcyjnym wsadów płaskich i cylindrycznych;
- rozwinięcie i uzupełnienie znanych metod obliczania impedancji zastępczej nagrzewnic indukcyjnych;
- opracowanie metod rozwiązania pól sprzężonych przez podział procesu nagrzewania indukcyjnego na etapy, rozdzielenie i linearyzację zagadnień i zastosowanie modeli o dynamicznej strukturze, znacznie upraszczających obliczenia;
- ckreślenie metod. rozwiązania 3-wymiarowego, źródłowego i niestacjonarnego zagadnienia przewodniictwa cieplnego we wsadach płaskich i cylindrycznych;
- skonstruowanie modelu opisującego niesymetryczne nagrzewanie wsadów płaskich;
- opracowanie uproszczonej metody rozwiązania 3-wymiarowego zagadnienia elektromagnetycznego dla wsadów płaskich przez superpozycję dwóch modeli 2-wymiarowych;
- zastosowanie metody Nejmana do zagadnień 2-wymiarowych.

W rozdziałach 5,6,7 przeanalizowano zagadnienia elektromagnetyczne, cieplne i naprężno - deformacyjne dla najczęściej spotykanych w praktyce

nagrzewnic indukcyjnych: jedno- i wielosekcyjnych płaskich i cylindrycznych, ze wsadami niemagnetycznymi i ferromagnetycznymi. Na podstawie równań Maxwella obliczono rozkłady pól elektrycznych i magnetycznych, mocy, impedancji i sił elektrodynamicznych. Zezwala to na ścisłe połączenie zagadnień elektromagnetycznych i cieplnych, gdyż obliczone rozkłady gęstości mocy czynnej wydzielanej we wsadzie są wprowadzane do równań termokinetyki. Możliwe staje się wtedy wyznaczenie pól temperatury dla złożonych, 3-wymiarowych, niestacjonarnych i źródłowych zagadnień, przy dowolnych (całkowalnych) funkcjach wydajności źródeł cieplnych oraz niesymetrycznych warunkach wymiany ciepła z otoczeniem. Otrzymano rozkłady pól naprężeń cieplnych we wsadach nagrzewanych indukcyjnie, upraszczając dynamiczne, nieliniowe i sprzężone równania termosprężystości i sprowadzając je do quasi-statycznego układu liniowego. Pozwoliło to na rozłączne rozwiązanie równań przewodnictwa cieplnego, a następnie dla obliczonego pola temperatury we wsadzie - zagadnienia naprężno - deformacyjnego.

W rozdziale 8 zaproponowano metodykę obliczania omawianych urządzeń opracowaną dla potrzeb projektowania. Opracowano programy komputerowe oraz omówiono możliwości zmniejszenia pracochłonności obliczeń przez wykorzystanie metod uproszczonych.

W rozdziale D.1 przedstawiono przykładowo wybrane wyniki obliczeń pól elektrycznych i magnetycznych, mocy, impedancji, współczynnika mocy i sprawności oraz rozkładów temperatury, przeprowadzone na podstawie opracowanych metod i programów komputerowych.

Wyniki weryfikaacji doświadczalnej przeprowadzonej na przykładzie impedancji kilku wybranych typów nagrzewnic indukcyjnych zarówno w stanie jałowym, jak i obciążenia podano w rozdziale D.2.

Na podstawie przeprowadzonych w rozprawie analiz i uzyskanych wyników można wyciągnąć następujące wnioski o charakterze ogólnym:

- tylko współzależne ujęcie trzech głównych grup zjawisk związanych z nagrzewaniem indukcyjnym w obróbce cieplnej i plastycznej metali, a to: elektromagnetycznych, cieplnych i termosprężystych może zezwolić na projektowanie efektywniejszych, energooszczędnych i nowocześniejszych urządzeń i technologii elektrotermicznych,

- dla uzyskania utylitarnych rozwiązań tych złożonych zagadnień należy skonstruować model obliczeniowy, w którym wpływ pola elektromagnetycznego na procesy przewodnictwa cieplnego i deformacji będzie się wiązać jedynie z ciepłem Joule'a, gdyż wtedy zadanie sprowadzi

się do kolejnego rozwiązania równań elektrodynamiki, przewodnictwa cieplnego i quasi-statycznej termosprężystości,

- opracowane metody obliczeniowe pozwalają na kompleksowe rozwiązanie problemu nagrzewania indukcyjego w procesach obróbki cieplnej i plastycznej metali, przy zachowaniu wysokiej dokładności i znacznej uniwersalności

oraz szereg wniosków szczegółowych:

- opracowane metody zezwalają również na przybliżoną analizę trójwymiarową zjawisk elektromagnetycznych w nagrzewnicach płaskich ze wzbudnikami owalnymi i pętlowymi,
- poszerzono i uogólniono znane z literatury metody obliczania rozkładu pól i mocy we wsadach nagrzewanych indukcyjnie przez uwzględnienie rzeczywistego rozkładu prądu wzbudnika,
- poszerzono i uogólniono znane z literatury metody obliczania impedancji zastępczej nagrzewnic indukcyjnych, przez numeryczną metodę wyznaczania rezystancji własnej uzwojenia wzbudnika oraz uwzględnienie oddziaływania wsadu i rdzeni,
- opracowano uniwersalną, iteracyjną metodę analizy procesu nagrzewania indukcyjnego ferromagnetyka, uogólniając metodę Nejmana na zagadnienia 2-wymiarowe,
- stwierdzono, że uproszczenie obliczeń przez zamodelowanie wzbudnika cienką warstwą prądową jest dopuszczalne w przypadku obliczania rozkładu pól we wsadzie lub impedancji zastępczej wnoszonej przez wsad,
- sformułowane kryteria badania procesu nagrzewania indukcyjnego metali ze względu na naprężenia cieplne pozwalają na konstrukcję algorytmu sterowania prądem wzbudnika,

Opracowane w rozprawie metodyka obliczeń, algorytmy, programy oraz wykonane obliczenia i sformułowane wnioski są przydatne do celów projektowania płaskich i cylindrycznych nagrzewnic indukcyjnych stosowanych w procesach obróbki cieplnej i plastycznej metali. Mogą być również wykorzystywane do uściślania obliczeń w stosowanych obecnie metodach przybliżonych lub testowania i określania zakresu stosowalności metod numerycznych.

Rozszerzenie problematyki poruszanej w rozprawie oraz rezultaty obliczeń innych wielkości oraz typów urządzeń zawierają prace autora [24 - 33, 139 - 147].

DODATKI

D.1. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

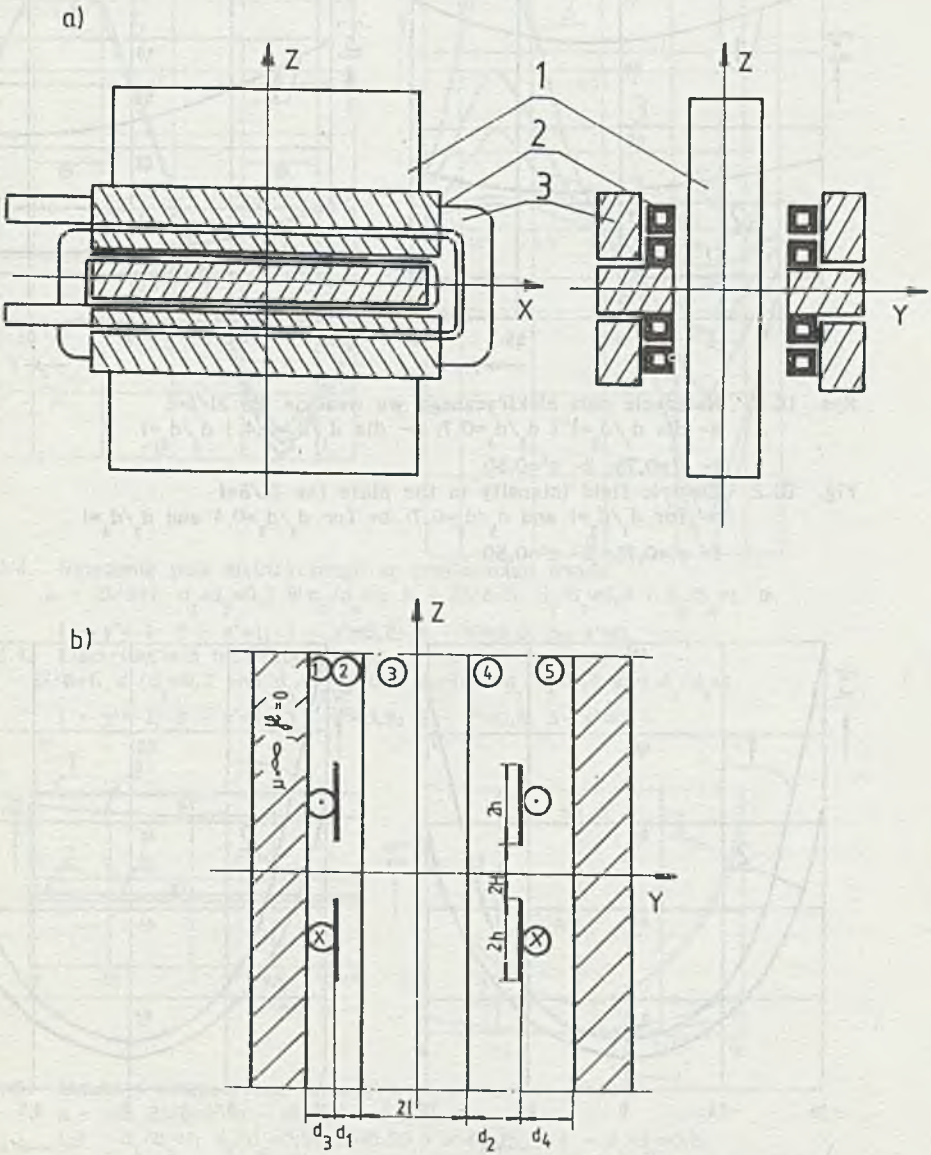
W celu bliższego zobrazowania otrzymanych zależności teoretycznych przedstawiono kilka przykładowych obliczeń różnych typów analizowanych nagrzewnic.

Rozważmy nagrzewnicę płaską dwustronną ze wzbudnikami pętlowymi (rys. D1.1), w której nagrzewana taśma metalowa nie została umieszczona centrycznie między wzbudnikami. Zagadnienie takie jest ciekawe zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia, gdyż często zdarza się, że z przyczyn technicznych niemożliwe jest idealnie współśrodkowe wprowadzenie wsadu (brak prostoliniowości, tolerancje wykonania, niedokładności urządzeń podających itp.). Dodatkowo przeanalizowany ogólny model obliczeniowy (rys.5.2) pozwala również na uchwycenie wpływu niedokładności wykonania wzbudnika (odległości rdzeni od uzwojenia). Tak więc na przykładzie tym można prześledzić wpływ niesymetrii usytuowania poszczególnych elementów nagrzewnicy na wektory pola elektromagnetycznego. Uzyskane zależności wykreślono w wielkościach względnych, tzn. amplitudy wektorów pola w stosunku do ich wartości maksymalnych oznaczono przez E'_x, B'_y, B'_z, natomiast wymiary geometryczne układu w stosunku do grubości wsadu (y') i długości wzbudnika (z'). We wszystkich obliczeniach założono, że szczeliny w ujemnej części osi y są mniejsze niż w części dodatniej. Dla uogólnienia wyników obliczenia prowadzono w dwóch praktycznie możliwych przypadkach, tzn. nagrzewania skrośnego (tu np. przyjęto stosunek grubości do głębokości wnikania ok. 1) i nagrzewania powierzchniowego (grubość do głebokości wnikania ok. 5).

Na rys.D1.2 - rys.D1.4 pokazano uzyskane rozkłady natężenia pola elektrycznego, na rys.D1.2 - rys.D1.3 w przekroju poprzecznym wsadu, a na rys. D1.4 wzdłuż długości wzbudnika. Rysunki D1.2 i D1.4a dotyczą nagrzewania skrośnego, a rys.D1.3 i D1.4b powierzchniowego*). Na podstawie rys.D1.2a i D1.3a można stwierdzić, że wpływ niesymetrii rdzeni magnetycznych na natężenie pola elektrycznego jest niewielki (kilkuprocentowy), przy czym jest

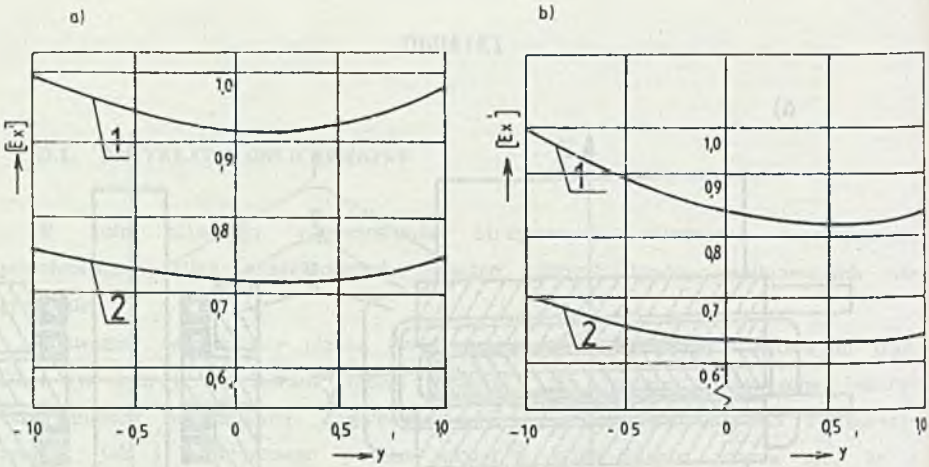
---

*) *Jest to ciekawy wynik teoretyczny. Badana nagrzewnica jest przecież w swej konstrukcji nagrzewnicą pola poprzecznego (rys. D1.1b), a jednak przy dużej względnej grubości wsadu efekty grzejne zbliżone są do pola podłużnego.*



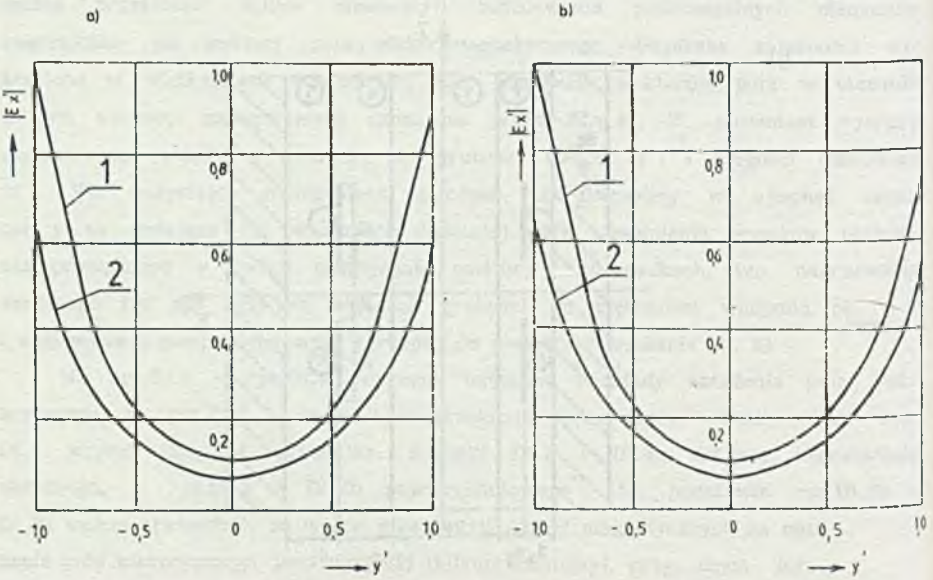
Rys. D1.1. Płaska nagrzewnica dwustronna ze wzbudnikami pętlowymi i niesymetrycznie nagrzewanym wsadem
a- szkic, b- model obliczeniowy

Fig. D1.1. The two-sided flat heater with lap windings and an unsymmetrical heated plate
a- sketch, b- calculating model



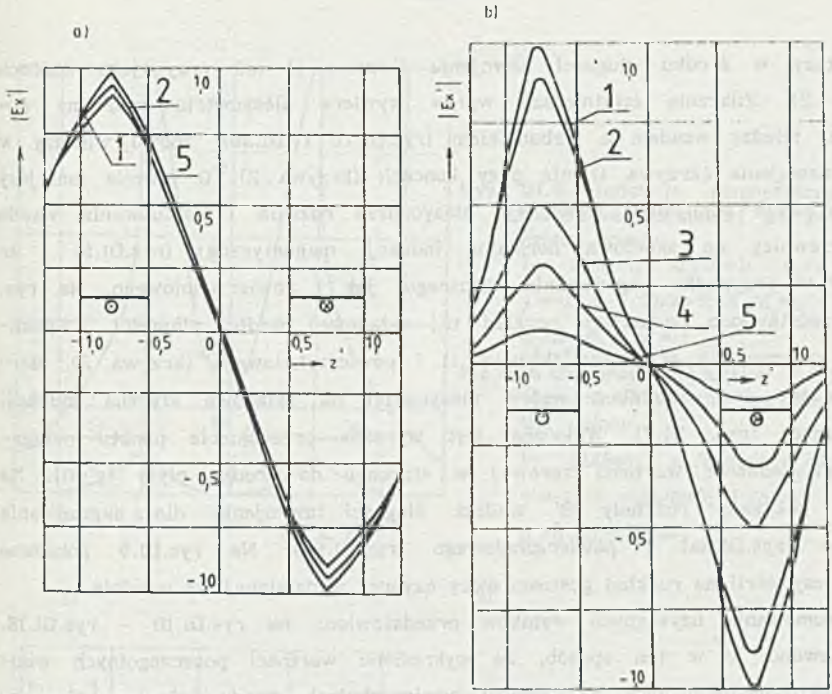
Rys. D1.2. Natężenie pola elektrycznego we wsadzie dla $2l/\delta=1$
a- dla $d_1/d_2=1$ i $d_3/d_4=0,7$; b- dla $d_1/d_2=0,4$ i $d_3/d_4=1$
1- $z'=0,75$; 2- $z'=0,50$

Fig. D1.2. Electric field intensity in the plate for $2l/\delta=1$
a- for $d_1/d_2=1$ and $d_3/d_4=0,7$; b- for $d_1/d_2=0,4$ and $d_3/d_4=1$
1- $z'=0,75$; 2- $z'=0,50$



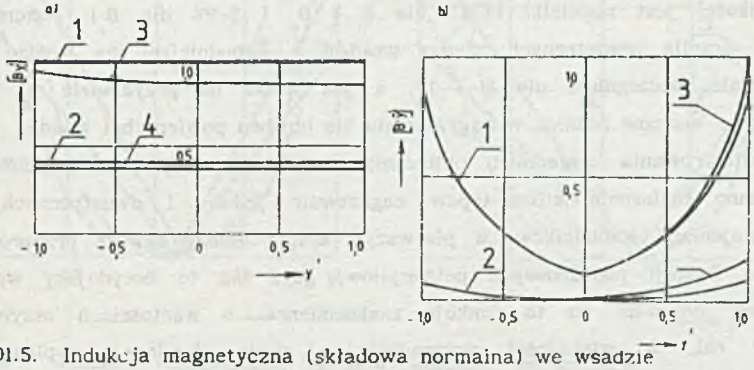
Rys. D1.3. Natężenie pola elektrycznego we wsadzie dla $2l/\delta=5$
a- dla $d_1/d_2=0,7$ i $d_3/d_4=1$; b- dla $d_1/d_2=0,5$ i $d_3/d_4=1$
1- $z'=0,75$; 2- $z'=0,50$

Fig. D1.3. Electric field intensity in the plate for $2l/\delta=5$
a- for $d_1/d_2=0,7$ and $d_3/d_4=1$; b- for $d_1/d_2=0,5$ and $d_3/d_4=1$
1- $z'=0,75$; 2- $z'=0,50$



Rys. D1.4. Natężenie pola elektrycznego na powierzchni wsadu
a - $2l/\delta=1$; $d_1/d_2=0,7$ i $d_3/d_4=1$; b - $2l/\delta=5$; $d_1/d_2=0,7$ i $d_3/d_4=1$
1 - $y'=-1$; 2 - $y'=1$; 3 - $y'=0,8$; 4 - $y'=0,6$; 5- $y'=0$

Fig. D1.4. Electric field intensity on the surface of the plate
a - $2l/\delta=1$; $d_1/d_2=0,7$ and $d_3/d_4=1$; b - $2l/\delta=5$; $d_1/d_2=0,7$ and $d_3/d_4=1$
1 - $y'=-1$; 2 - $y'=1$; 3 - $y'=0,8$; 4 - $y'=0,6$; 5- $y'=0$



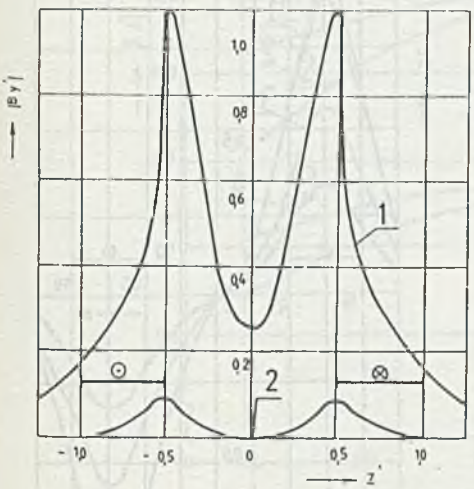
Rys. D1.5. Indukcja magnetyczna (składowa normaina) we wsadzie
a - dla $2l/\delta=1$; b - dla $2l/\delta=5$
1,2 - $d_1/d_2=1$; $d_3/d_4=0,9$; $z'=0,50$ i $z'=0,75$; 3,4 - $d_1/d_2=0,5$;
$d_3/d_4=0,9$; $z'=0,50$ i $z'=0,75$

Fig. D1.5. Magnetic induction (normal component) in the plate
a - for $2l/\delta=1$; b - for $2l/\delta=5$
1,2 - $d_1/d_2=1$; $d_3/d_4=0,9$; $z'=0,50$ and $z'=0,75$; 3,4 - $d_1/d_2=0,5$;
$d_3/d_4=0,9$; $z'=0,50$ and $z'=0,75$

on większy w środku długości uzwojenia (krzywe 1) niż przy jego końcach (krzywe 2). Znacznie istotniejszy wpływ wywiera niesymetria szczeliny powietrznej między wsadem a wzbudnikiem (rys.D1.2b i D1.3b), znowu większy w środku uzwojenia (krzywa 1) niż przy końcach (krzywa 2). O wiele mniejszy wpływ (prawie pomijalny) wywierają niesymetria rdzenia i usytuowania wsadu w nagrzewnicy na składową normalną indukcji magnetycznej (rys.D1.5) i to zarówno w przypadku nagrzewania skrośnego, jak i powierzchniowego. Na rys. D1.6 przedstawiono dodatkowo rozkład tej składowej wzdłuż długości wzbudnika dla nagrzewania skrośnego (krzywa 1) i powierzchniowego (krzywa 2). Bardzo wyraźny jest natomiast wpływ niesymetrii na składową styczną indukcji magnetycznej (rys. D1.7). Widoczne jest wyraźne przesunięcie punktu osiągania przez indukcję wartości zerowej w stosunku do środka płyty (y'=0). Na rys.D1.8 pokazano rozkłady B'_z wzdłuż długości uzwojenia dla nagrzewania skrośnego (rys.D1.8a) i powierzchniowego (rys.D1.8b). Na rys.D1.9 pokazano wpływ niesymetrii na rozkład gęstości mocy czynnej wydzielanej we wsadzie.

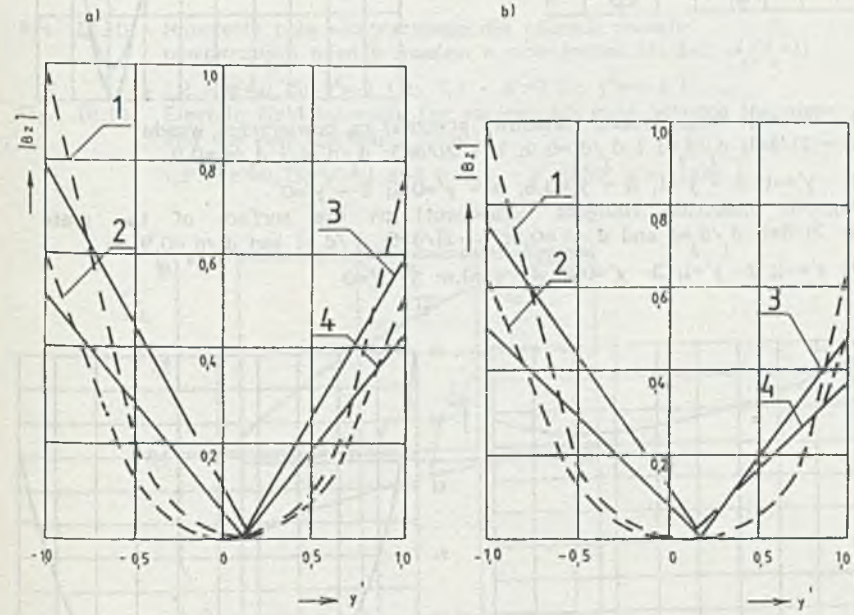
Podsumowanie uzyskanych wyników przedstawiono na rys.D1.10 - rys.D1.18. Skonstruowano je w ten sposób, że wykreślono wartości poszczególnych wielkości elektromagnetycznych na obydwu powierzchniach wsadu (y'=-1 i y'=1) w zależności od względnej niesymetrii szczelin powietrznych (d_3/d_4 lub d_2/d_5 rys.D1.1), począwszy od usytuowania symetrycznego (d_3/d_4 ; d_2/d_5=1) aż do możliwych w praktyce maksymalnych niesymetrii (d_3/d_4=0,4 i d_2/d_5=0,6). Jak widać, wpływ nawet znacznych (do 60%) niesymetrii usytuowania rdzenia na badane wielkości jest niewielki (4-5% dla E i B_y i 5-9% dla B_z). Natomiast niesymetria szczelin powietrznych między wsadem a wzbudnikiem ma bardzo istotne znaczenie, szczególnie dla E i B_z, a jak widać na przykładzie p_v, będzie wywoływać znaczne różnice w nagrzewaniu się obydwu powierzchni wsadu.

Dla zilustrowania zagadnień obliczania impedancji nagrzewnic indukcyjnych wykonano obliczenia kilku typów nagrzewnic jedno- i dwustronnych, z różnymi uzwojeniami wzbudników. W pierwszym etapie należy zawsze przeprowadzić badanie funkcji podcałkowych potencjałów, gdyż ma to decydujący wpływ na dokładność obliczeń. Są to funkcje znakozmienne, o wartościach oscylujących wokół osi, w większości przypadków o silnie tłumionej amplitudzie. Przykładowy kształt kilku funkcji podcałkowych różnych typów nagrzewnic pokazuje rys.D1.19. Widać, że decydujący wkład w wartość całki wnosi pierwsza oscylacja. Jej amplituda jest zwykle kilka lub kilkananaście razy większa od następnej i szybko zmierza do zera. Szczególnie jest to widoczne dla funkcji podcałkowych opisujących nagrzewnice w stanie obciążenia (krzy-



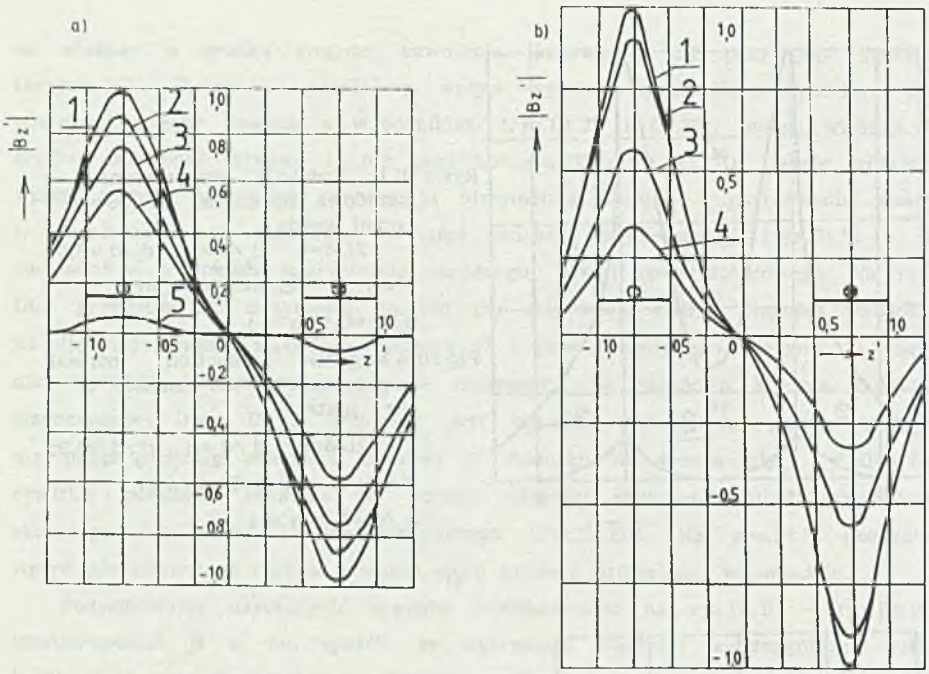
Rys. D1.6. Indukcja magnetyczna (składowa normalna) na powierzchni wsadu
1- $2l/\delta=1$; $d_1/d_2=1$; $d_3/d_4=0,9$; $y'=-1$; 2 - $2l/\delta=5$; $d_1/d_2=1$; $d_3/d_4=0,9$; $y'=-1$

Fig.D1.6.Magnetic induction (normal component) on the surface of the plate
1- $2l/\delta=1$; $d_1/d_2=1$; $d_3/d_4=0,9$; $y'=-1$; 2 - $2l/\delta=5$; $d_1/d_2=1$; $d_3/d_4=0,9$; $y'=-1$



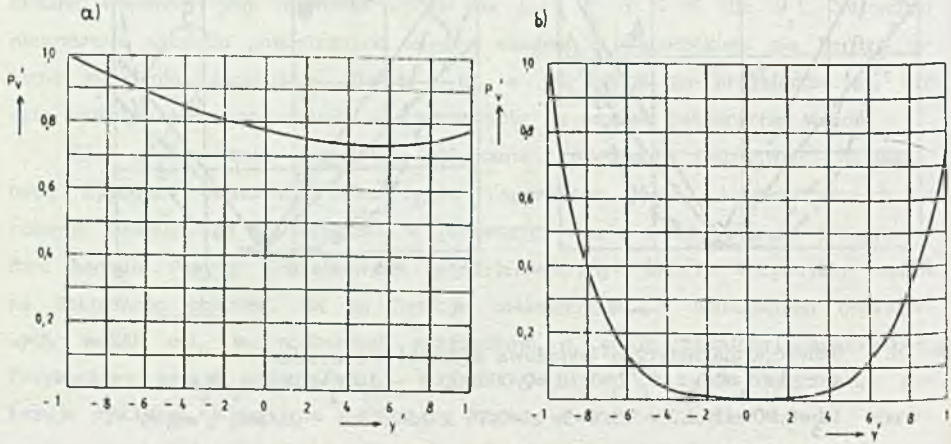
Rys. D1.7. Indukcja magnetyczna (składowa styczna) we wsadzie
a - $d_1/d_2=0,5$ i $d_3/d_4=1$ ($d_3=0,002$m); b - $d_1/d_2=0,4$ i $d_3/d_4=1$ ($d_3=0,008$m); 1,2 - $2l/\delta=5$; $z'=0,75$ i 0,50; 3,4 - $2l/\delta=1$; $z'=0,75$ i $z'=0,50$

Fig. D1.7. Magnetic induction (tangent component) in the plate
a - $d_1/d_2=0,5$ and $d_3/d_4=1$ ($d_3=0,002$m); b - $d_1/d_2=0,4$ and $d_3/d_4=1$ ($d_3=0,008$m); 1;2- $2l/\delta=5$; $z'=0,75$ and 0,50; 3,4- $2l/\delta=1$; $z'=0,75$ and $z'=0,50$



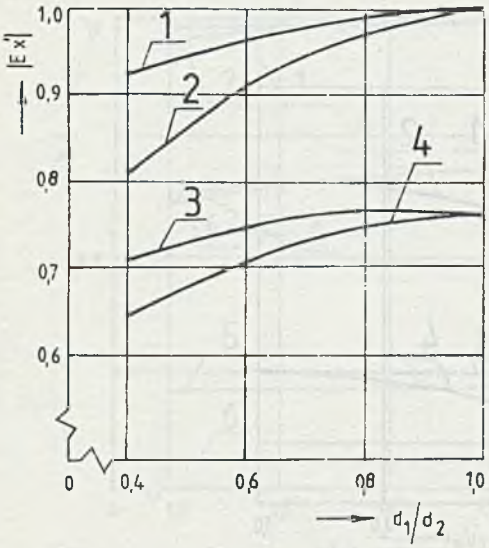
Rys. D1.8. Indukcja magnetyczna (składowa styczna) na powierzchni wsadu
a - $2l/\delta=1$; $d_1/d_2=1$ i $d_3/d_4=0,9$; b - $2l/\delta=5$; $d_1/d_2=1$ i $d_3/d_4=0,9$
1 - y'=-1; 2 - y'=1; 3 - y'=0,8; 4 - y'=0,6; 5 - y'=0

Fig.D1.8.Magnetic induction (tangent component) on the surface of the plate
a- $2l/\delta=1$; $d_1/d_2=1$ and $d_3/d_4=0,9$; b- $2l/\delta=5$; $d_1/d_2=1$ and $d_3/d_4=0,9$
1- y'=-1; 2- y'=1; 3- y'=0,8; 4- y'=0,6; 5- y'=0



Rys. D1.9. Gęstość mocy czynnej we wsadzie ($d/d=1$, z'=0,75)
a - dla $2l/\delta=1$, $d_1/d_2=0,4$; b - dla $2l/\delta=5$, $d_1/d_2=0,7$

Fig. D1.9. Density of the active power in the plate ($d/d=1$, z'=0,75)
a - for $2l/\delta=1$, $d_1/d_2=0,4$; b - for $2l/\delta=5$, $d_1/d_2=0,7$

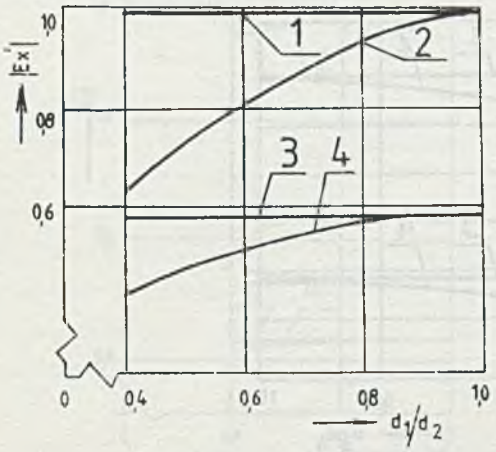


Rys. D1.10. Natężenie pola elektrycznego dla różnych szczelin powietrznych między wsadem a uzwojeniem ($2l/\delta=1$; $d_3/d_4=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 i 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 i 1

Fig. D1.10. Electric field intensity for various air gaps between the plate and the coil ($2l/\delta=1$; $d_3/d_4=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 and 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 and 1

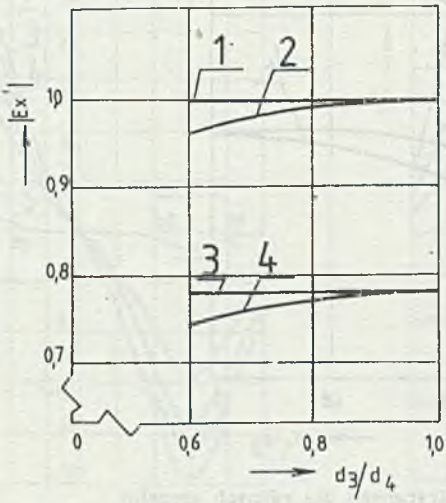


Rys. D1.11. Natężenie pola elektrycznego dla różnych szczelin powietrznych między wsadem a uzwojeniem ($2l/\delta=5$; $d_3/d_4=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 i 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 i 1

Fig. D1.11. Electric field intensity for various air gaps between the plate and the coil ($2l/\delta=5$; $d_3/d_4=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 and 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 and 1

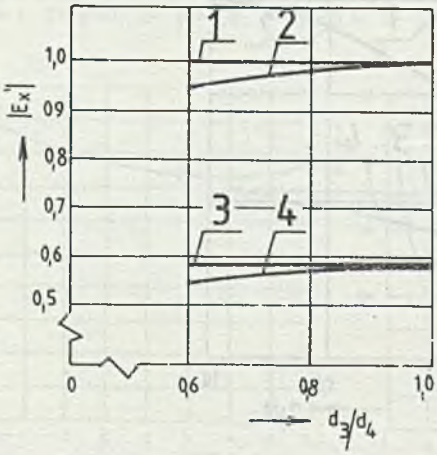


Rys. D1.12. Natężenie pola elektrycznego dla różnych szczelin powietrznych między uzwojeniem a rdzeniami magnetycznymi ($2l/\delta=1$; $d_1/d_2=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 i 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 i 1

Fig. D1.12. Electric field intensity for various air gaps between the coil and magnetic shounts ($2l/\delta=1$; $d_1/d_2=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 and 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 and 1

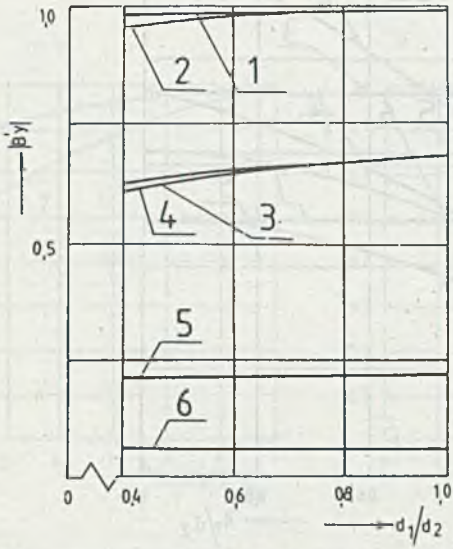


Rys. D1.13. Natężenie pola elektrycznego dla różnych szczelin powietrznych między uzwojeniem a rdzeniami magnetycznymi ($2l/\delta=5$; $d_1/d_2=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 i 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 i 1

Fig. D1.13. Electric field intensity for various air gaps between the coil and magnetic shounts ($2l/\delta=5$; $d_1/d_2=1$)

1,2 - z'=0,75; y'=-1 and 1; 3,4 - z'=0,50; y'=-1 and 1

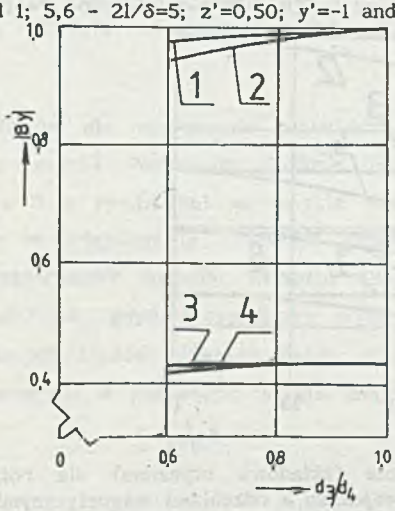


Rys. D1.14. Indukcja magnetyczna (składowa normalna) dla różnych szczelin powietrznych między wsadem a uzwojeniem (d_3/d_4=1)

1,2 - 2l/δ=1; z'=0,75; y'=-1 i 1; 3,4 - 2l/δ=1; z'=0; y'=-1 i 1
5,6 - 2l/δ=5; z'=0,50; y'=-1 i 1

Fig. D1.14. Magnetic induction (normal component) for various air gaps between the plate and the coil (d_3/d_4=1)

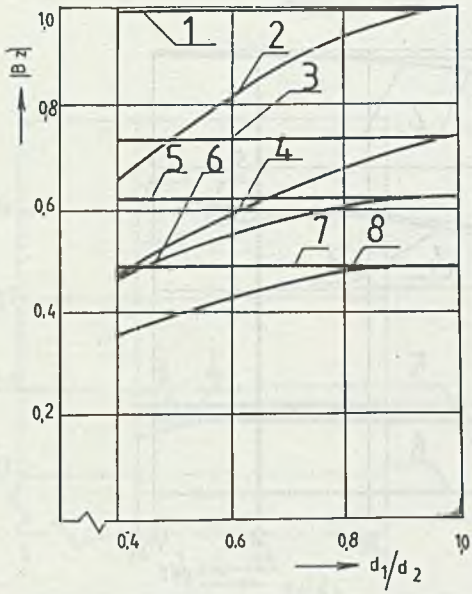
1,2- 2l/δ=1; z'=0,75; y'=-1 and 1; 3,4- 2l/δ=1; z'=0; y'=-1 and 1; 5,6 - 2l/δ=5; z'=0,50; y'=-1 and 1



Rys. D1.15. Indukcja magnetyczna (składowa normalna) dla różnych szczelin powietrznych między uzwojeniem a rdzeniami magnetycznymi. (2l/δ= =1, d_1/d_2=1): 1,2 - z'=0,50; y'=-1 i 1; 3,4 - z'=0,75; y'=-1 i 1

Fig. D1.15. Magnetic induction (normal component) for various air gaps between the coil and magnetic shounts (2l/δ=1, d_1/d_2=1)

1,2 - z'=0,50; y'=-1 and 1; 3,4 - z'=0,75; y'=-1 and 1

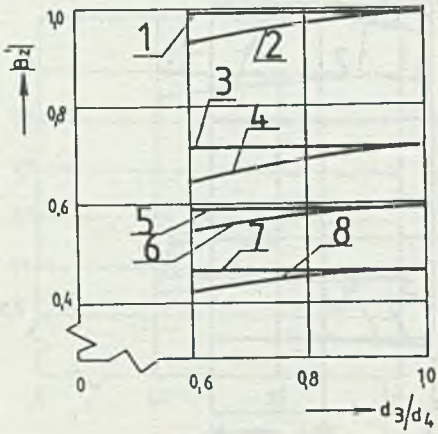


Rys. D1.16. Indukcja magnetyczna (składowa stycznna) dla różnych szczelin powietrznych między wsadem a uzwojeniem ($d_3/d_4=1$)

1,2 - $2l/\delta=5$; $z'=0,75$; $y'=-1$ i 1; 3,4 - $2l/\delta=1$; $z'=0,75$; $y'=-1$ i 1;
5,6 - $2l/\delta=5$; $z'=0,50$; $y'=-1$ i 1; 7,8 - $2l/\delta=1$; $z'=0,50$; $y'=-1$ i 1

Fig. D1.16. Magnetic induction (tangent component) for various air gaps between the plate and the coil ($d_3/d_4=1$)

1,2 - $2l/\delta=5$; $z'=0,75$; $y'=-1$ and 1; 3,4 - $2l/\delta=1$; $z'=0,75$; $y'=-1$ and 1;
5,6 - $2l/\delta=5$; $z'=0,50$; $y'=-1$ and 1; 7,8 - $2l/\delta=1$; $z'=0,50$; $y'=-1$ and 1

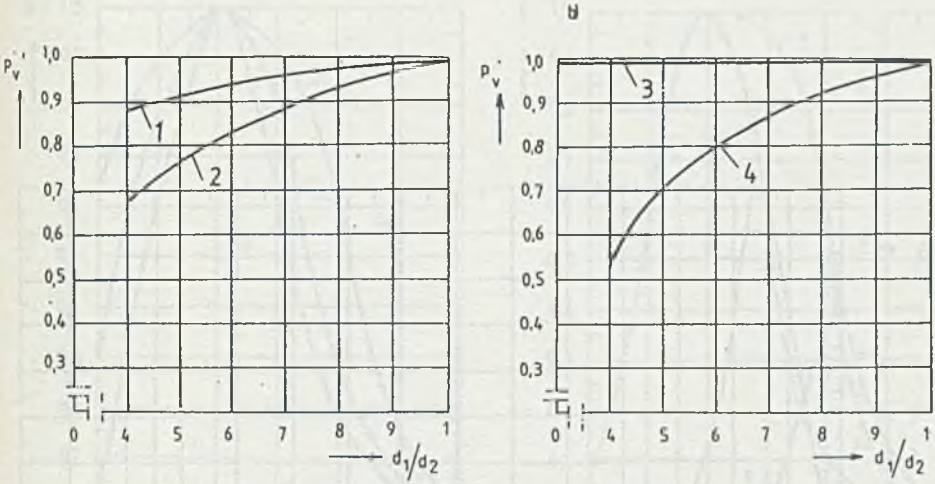


Rys. D1.17. Indukcja magnetyczna (składowa stycznna) dla różnych szczelin powietrznych między uzwojeniem a rdzeniami magnetycznymi ($d_1/d_2=1$)

1,2 - $2l/\delta=5$; $z'=0,75$; $y'=-1$ i 1; 3,4 - $2l/\delta=1$; $z'=0,75$; $y'=-1$ i 1;
5,6 - $2l/\delta=5$; $z'=0,50$; $y'=-1$ i 1; 7,8 - $2l/\delta=1$; $z'=0,50$; $y'=-1$ i 1

Fig. D1.17. Magnetic induction (tangent component) for various air gaps between the coil and magnetic shounts ($d_1/d_2=1$)

1,2 - $2l/\delta=5$; $z'=0,75$; $y'=-1$ and 1; 3,4 - $2l/\delta=1$; $z'=0,75$;$y'=-1$ and 1;
5,6 - $2l/\delta=5$; $z'=0,50$; $y'=-1$ and 1; 7,8 - $2l/\delta=1$; $z'=0,50$; $y'=-1$ and 1



Rys. D1.18. Gęstość mocy czynnej dla rożnych szczelin powietrznych między wsadem a wzbudnikami ($d_3/d_4=1$)

a - dla $2l/\delta=1$, b - dla $2l/\delta=5$

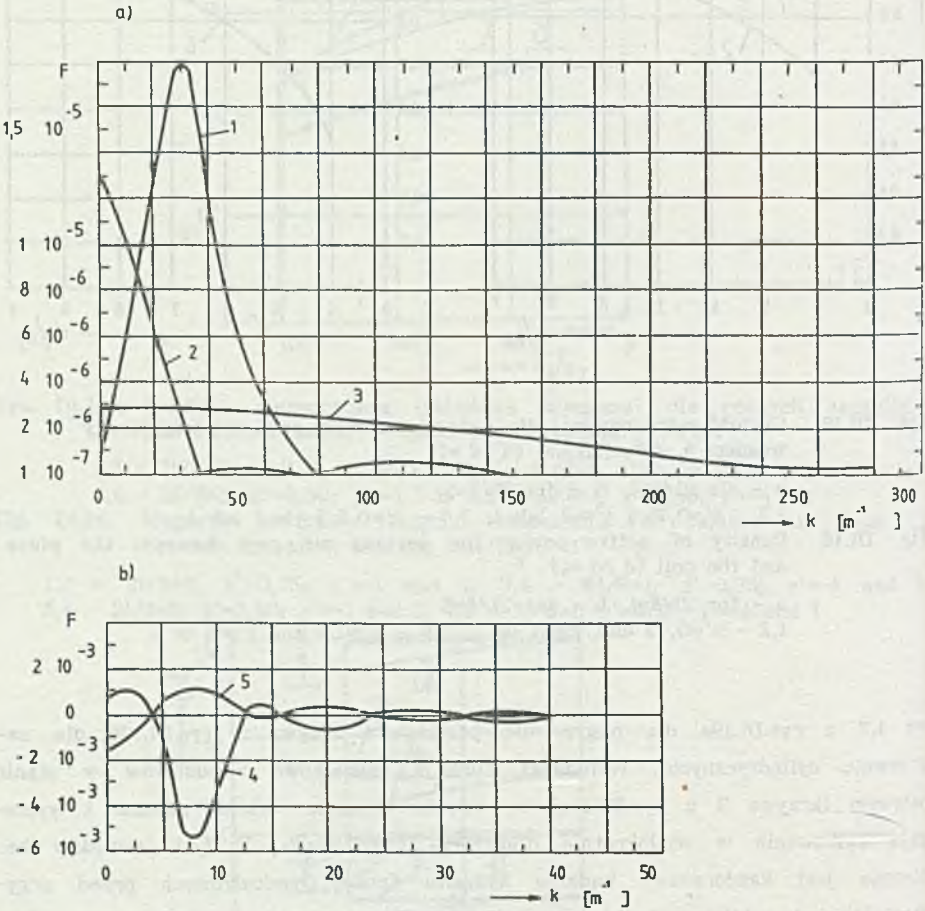
1,2 - z'=0,75 i y'=-1 lub 1; 3,4 - z'=0,5 i y'=-1 lub 1

Fig. D1.18. Density of active power for various air gaps between the plate and the coil ($d_3/d_4=1$)

a - for $2l/\delta=1$, b - for $2l/\delta=5$

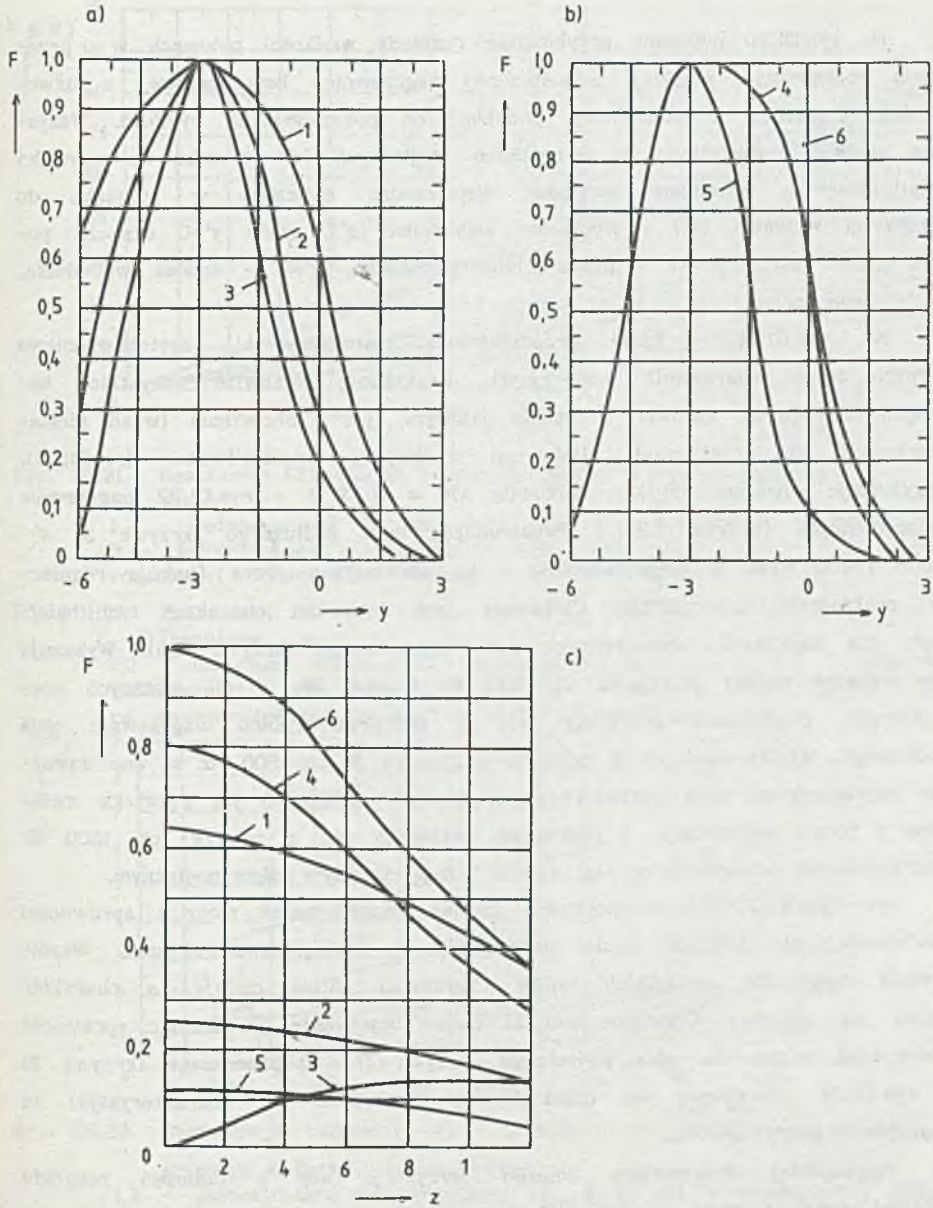
1,2 - z'=0,75 and y'=-1 or 1; 3,4 - z'=0,5 and y'=-1 or 1

we 1,2 z rys.D1.19a dla nagrzewnic płaskich i krzywe z rys.D1.19b dla nagrzewnic cylindrycznych). Natomiast funkcje podcałkowe wzbudników w stanie jałowym (krzywa 3 z rys.D1.19a) są zwykle znacznie wolniej zbieżne i wymagają całkowania w wielokrotnie dłuższych przedziałach. Z tych powodów konieczne jest każdorazowe badanie kształtu funkcji podcałkowych przed przystąpieniem do obliczeń, gdyż przypadkowy wybór granic całkowania może prowadzić do znacznych błędów. Dlatego każdy z opracowanych przez autora programów komputerowych w pierwszym etapie znajduje zera i extrema obliczanych wielkości.



Rys. D1.19. Przykładowe przebiegi funkcji podcałkowych obliczanych wielkości
a - związanych z impedancją, b - z wielkościami polowymi
1,2 - rezystancja i reaktancja wnoszona wzbudnika dwustronnego w stanie obciążenia, 3 - reaktancja wzbudnika płaskiego jednostronnego w stanie jałowym, 4,5 - część rzeczywista i urojona indukcji magnetycznej wzbudnika cylindrycznego

Fig. D1.19. Examplary distributions of integrand functions connected with:
a - the impedance, b - the electromagnetic field
1,2- brought in resistance and reactance of the two-sided inductor in load state, 3- reactance of the one-sided flat inductor in no-load state, 4,5- real and imaginary parts of the magnetic induction of the cylindrical coil



Rys. D1.20. Rozkład wielkości elektromagnetycznych dla nagrzewnicy płaskiej jednostronnej, bezrdzeniowej z uzwojeniem skupionym
a - wektorów pola (z'=0), b - mocy (z'=0), c - wzdłuż wysokości wzbudnika (y'=0)

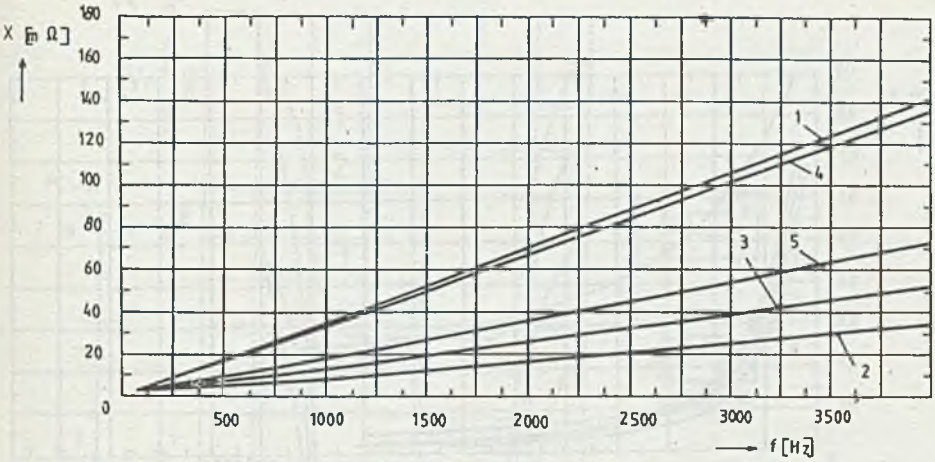
Fig. D1.20. Distribution of electromagnetic values for the flat one-sided coreless heater with the concentrated winding
a - field vectors (z'=0), b - power (z'=0), c - along the height of the inductor (y'=0)

Na rys.D1.20 pokazano przykładowe rozkłady wielkości polowych w przekroju poprzecznym płaskiej jednostronnej nagrzewnicy bezrdzeniowej z uzwojeniem skupionym, o konstrukcji podobnej do pokazanej na rys.5.1d. Wszystkie wielkości wykreślono w jednostkach względnych (w stosunku do wartości amplitudowych), natomiast względne współrzędne obliczono w stosunku do głębokości wnikania (y') i wysokości wzbudnika (z'), gdzie y'=0 oznacza powierzchnię wsadu, y'=-3 - powierzchnię wzbudnika, z'=0 - środek wzbudnika, a z'=1 jego koniec.

Na rys.D1.21 - D1.24 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe różnych typów nagrzewnic indukcyjnych. Reaktancje całkowite wszystkich badanych nagrzewnic, zarówno w stanie jałowym, jak i obciążenia (wsad niemagnetyczny), są praktycznie liniowymi funkcjami częstotliwości (rys.D1.21). Rezystancje wnoszone ($\mathcal{R}_2'$) i całkowite ($\mathcal{R} = \mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2'$) - rys.D1.22 nagrzewnic jednostronnych (krzywe 1,2) i dwustronnych pola podłużnego (krzywe 3, 4) silnie rosną wraz z częstotliwością i są obrazowane przez funkcje regularne, praktycznie monotoniczne. Ciekawszy jest natomiast charakter tych wielkości dla nagrzewnic dwustronnych pola poprzecznego (krzywe 5,6). Wykazują one wyraźne punkty przegięcia ok. 500 Hz i 1600 Hz, a dla wyższych częstotliwości praktycznie pokrywają się z charakterystykami nagrzewnic pola podłużnego. Wynika stąd, że w badanym przypadku do ok. 500 Hz są one wyraźnie nagrzewnicami pola poprzecznego, pomiędzy 500-1600 Hz zjawiska związane z polem poprzecznym i podłużnym nakładają się, a powyżej ok. 1600 Hz przechodzą one praktycznie w nagrzewnice z magnetycznym polem podłużnym.

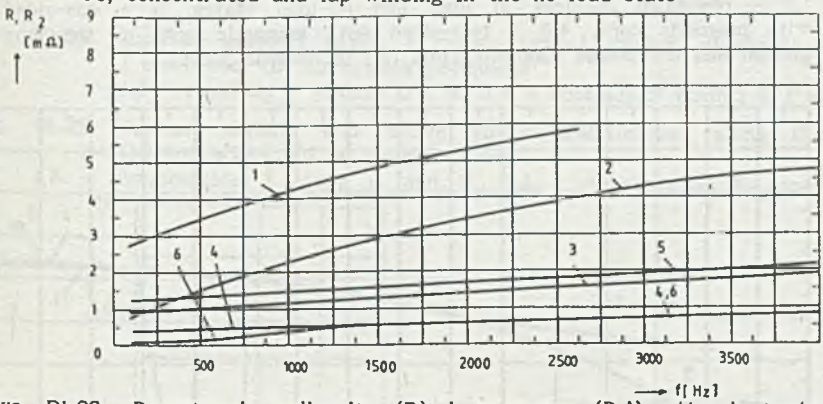
Na rys.D1.23 i D1.24 pokazano zmiany współczynnika mocy i sprawności elektrycznej dla różnych typów nagrzewnic w funkcji częstotliwości. Współczynnik mocy dla wszystkich typów nagrzewnic silnie maleje, a charakter zmian jest zbliżony. Odmienne wnioski można wyciągnąć porównując sprawność elektryczną nagrzewnic pola podłużnego (krzywa 1) i poprzecznego (krzywa 2) z rys.D1.24. Począwszy od częstotliwości ok. 1600 Hz charakterystyki te praktycznie pokrywają się.

Najbardziej interesujące wnioski otrzymuje się z obliczeń rozkładu gęstości prądu i strat w uzwojeniu rzeczywistym wzbudnika. Stosując opisaną metodę numeryczną obliczono te wielkości w przykładowym uzwojeniu pętlowym (rys.D1.25 i D1.26). Stwierdza się silne skupianie się prądu w narożach zwoju wzbudnika (krzywe J_H, J_D), potęgowane jeszcze przez sąsiedztwo następnego zwoju z prądem płynącym w kierunku przeciwnym, wskutek czego występuje efekt zbliżenia. Powstają więc ogromne niesymetrie rozkładu gęstości



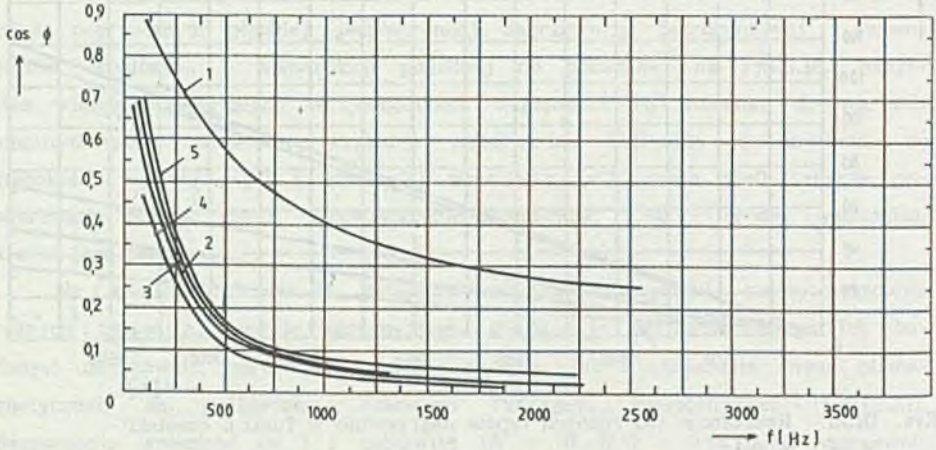
Rys. D1.21. Reaktancje (X) różnych typów nagrzewnic w funkcji częstotliwości
1,2 - jednostronnej bezrdzeniowej w stanie jałowym i obciążenia, 3 - jednostronnej rdzeniowej w stanie obciążenia, 4,5 - dwustronnej rdzeniowej z uzwojeniem skupionym i pętlowym w stanie jałowym

Fig. D1.21. Reactances (X) for various sorts of heaters in the function of frequency
1,2 - one-sided coreless in load and no-load states, 3 - one-sided with magnetic core in load state, 4,5 - two-sided with magnetic core, concentrated and lap winding in the no-load state



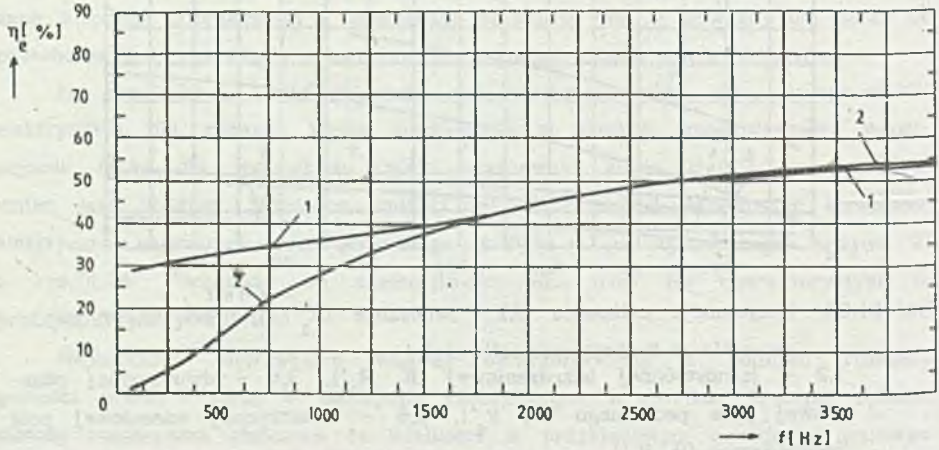
Rys. D1.22. Rezystancje całkowite (R) i wnoszone (R_2') różnych typów nagrzewnic w funkcji częstotliwości
1,2 - jednostronnej bezrdzeniowej (R, R_2'), 3,4 - dwustronnej rdzeniowej pola podłużnego (R, R_2'), 5,6 - dwustronnej rdzeniowej pola poprzecznego (R, R_2')

Fig. D1.22. Total resistances (R) and brought in (R_2') for various sorts of heaters in function of frequency
1,2 - one-sided coreless (R, R_2'), 3,4 - two-sided with magnetic core and longitudal magnetic field (R, R_2'), 5,6 - two-sided with magnetic core and transversed magnetic field (R,R_2')



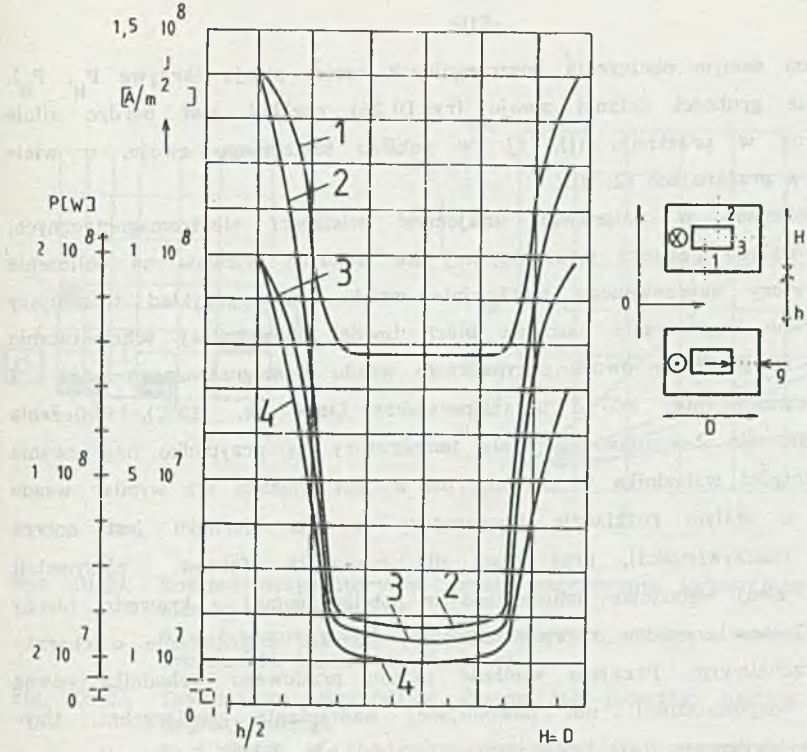
Rys. D1.23. Współczynnik mocy (cosφ) różnych typów nagrzewnic w funkcji częstotliwości
1,2 - jednostronnej bezrdzeniowej w stanie obciążenia i jałowym, 3 - jednostronnej rdzeniowej, 4,5 - dwustronnej rdzeniowej pola podłużnego i poprzecznego (wszystkie w stanie jałowym)

Fig. D1.23. Power factor (cosφ) for various sorts of induction heaters in the function of frequency
1,2 - one-sided coreless in load and no-load states, 3 - one-sided with magnetic core, 4,5 - two-sided with magnetic core of the longitudal and transverse magnetic field (all in no-load state)



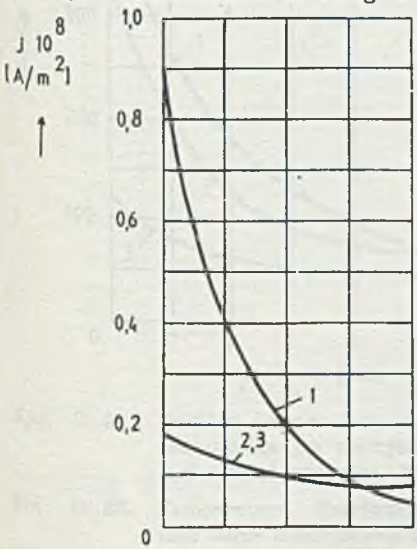
Rys. D1.24. Sprawność elektryczna (η_e) nagrzewnic dwustronnych w funkcji częstotliwości
1 - pola podłużnego, 2 - pola poprzecznego

Fig. D1.24. Electrical efficiency (η_e) of two-sided induction heaters in the function of frequency
1 - of the longitudal field, 2 - of the transverse field



Rys. D1.25. Rozkład gęstości prądu i mocy czynnej wzdłuż wysokości (H) i szerokości (D) uzwojenia pętlowego
1,2 - rozkłady J wzdłuż D i H, 3,4 - rozkłady P wzdłuż D i H

Fig. D1.25. Current density and active power distributions along the height (H) and widht (D) of a lap winding
1,2 - distributions J along D and H, 3,4 - distributions P along D, H

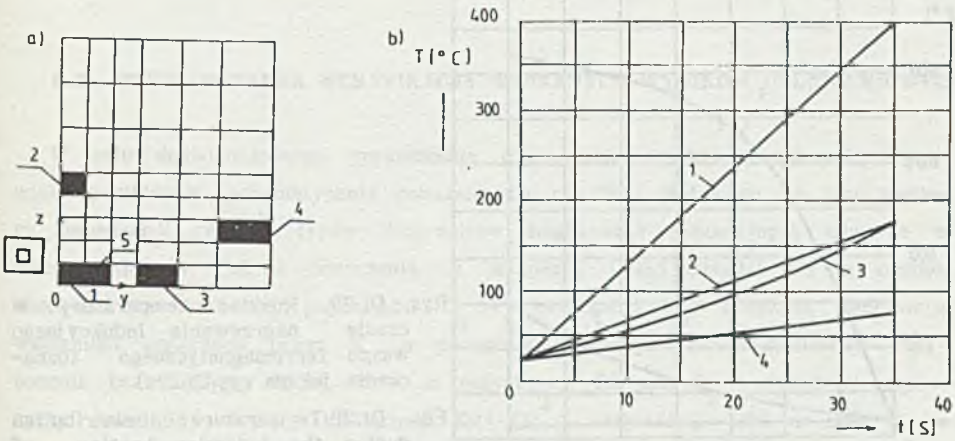


Rys. D1.26. Rozkład gęstości prądu wzdłuż grubości ścianki uzwojenia pętlowego (oznaczenia jak na rys.D1.25)

Fig. D1.26. Current density distribution in the wall of a lap winding (the same descriptions as in Fig.D1.25)

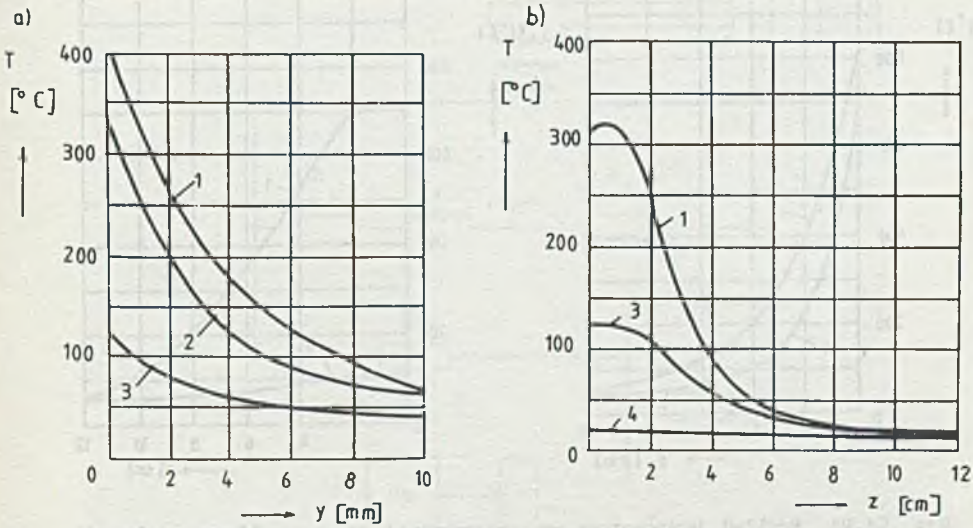
prądu, a tym samym obciążenia poszczególnych części zwoju (krzywe P_H, P_D). Także wzdłuż grubości ścianki zwoju (rys.D1.26) rozkład jest bardzo silnie nierównomierny w przekroju (1), tj. w pobliżu sąsiedniego zwoju, o wiele bardziej niż w przekrojach (2, 3).

Jak pokazano w rozprawie, znajomość wielkości elektromagnetycznych, szczególnie rozkładu gęstości mocy czynnej we wsadzie, pozwala na obliczenie pola temperatury nagrzewanego indukcyjnie wsadu. Jako przykład ilustrujący metodę wybrano nagrzewanie pasmowe blach (model obliczeniowy schematycznie pokazany na rys.D1.27) w dwóch przypadkach: wsadu niemagnetycznego (Al) i ferromagnetycznego (stal NC7V2 o temperaturze Curie ok. 710^0C). Obliczenia przeprowadzono dla 2-wymiarowego pola temperatury (w przypadku nagrzewania pasmowego długość wzbudnika w kierunku osi x jest większa niż wymiar wsadu i założenie o stałym rozkładzie temperatury w tym kierunku jest dobrze zbliżone do rzeczywistości), przy czym dla pokazania efektów niesymetrii nagrzewający zwój wzbudnika umieszczono w pobliżu jednej z krawędzi blachy (rys.D1.27). Grubości wsadów dobrano tak, aby uzyskać nagrzewanie o charakterze powierzchniowym. Przyjęto wielkość okładu prądowego wzbudnika równą maksymalnej, dopuszczalnej, nie powodującej nadtapiania powierzchni. Uzyskano więc bardzo szybkie nagrzewanie, ale jak widać szczególnie na przykładzie wsadu stalowego, gradienty temperatur między powierzchnią a wnętrzem są duże. Uzyskane wyniki we wszystkich wymiarach przedstawiono na rys.D1.27 - D1.30.



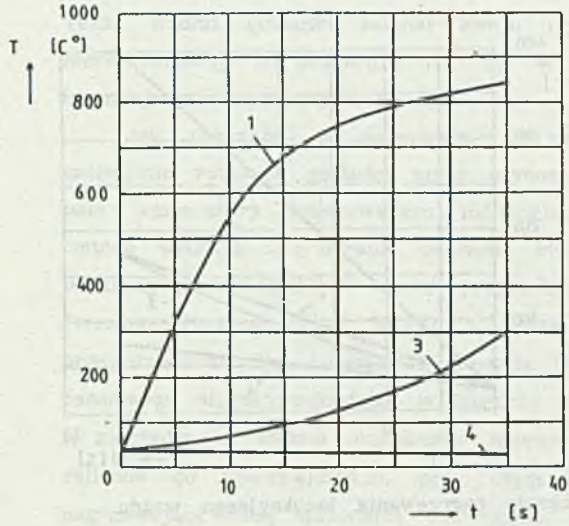
Rys. D1.27. Rozkład temperatury w czasie nagrzewania indukcyjnego wsadu niemagnetycznego
a - schemat modelu obliczeniowego, b - krzywe temperatury (oznaczenia jak na schemacie a)

Fig. D1.27. Temperature distribution during the induction heating of a non-magnetic charge
a - sketch of the calculating model, b - temperature curves (the same descriptions as in the sketch a)



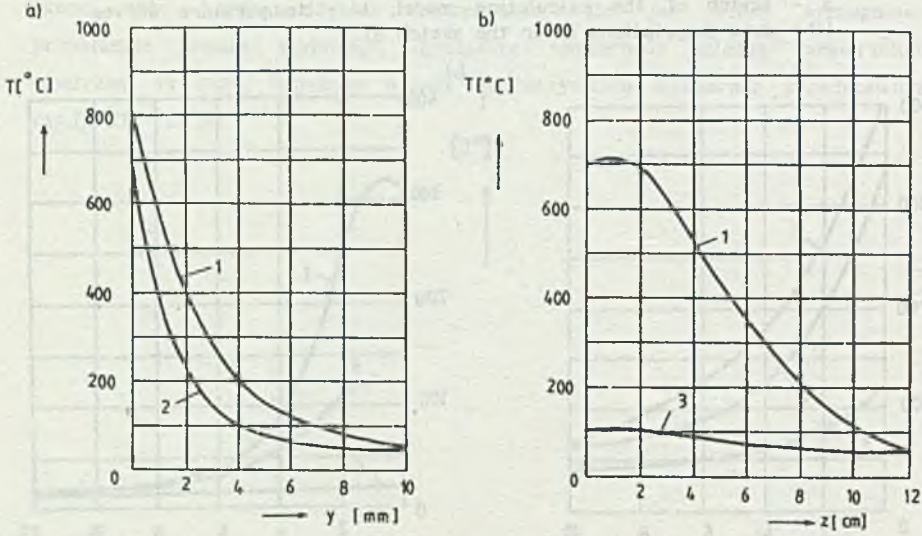
Rys. D1.28. Rozkład temperatury w nagrzewanej pasmowo blasze aluminiowej (oznaczenia jak na rys.D1.27a)
a - wzdłuż grubości, b - wzdłuż wysokości

Fig. D1.28. Temperature distribution in the streaked heated plate of AL (the same descriptions as in Fig.D1.27a)
a - in the cross-section, b - along the height



Rys. D1.29. Rozkład temperatury w czasie nagrzewania indukcyjnego wsadu ferromagnetycznego (oznaczenia jak na rys.D1.27a)

Fig. D1.29. Temperature distribution during the induction heating of a ferromagnetic charge (the same descriptions as in Fig.D1.27a)

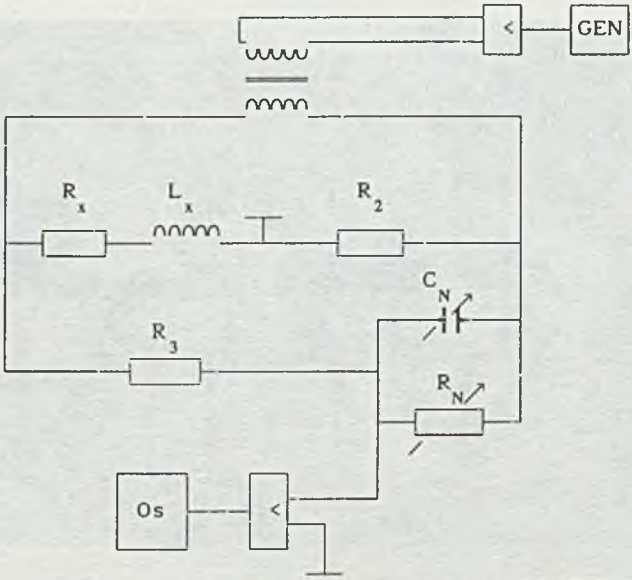


Rys. D1.30. Rozkład temperatury w nagrzewanej pasmowo blasze stalowej (oznaczenia jak na rys.D1.27a)
a - wzdłuż grubości, b - wzdłuż wysokości

Fig. D1.30. Temperature distribution in the streaked heated steel plate (the same descriptions as in Fig.D1.27a)
a - in the cross-section, b - along the height

D.2. DOŚWIADCZALNA WERYFIKACJA WYBRANYCH WYNIKÓW OBLICZENIOWYCH

W celu doświadczalnego sprawdzenia uzyskanych wyników zbudowano stanowisko pomiarowe, schematycznie pokazane na rys.D2.1. Wykonano na nim pomiary impedancji różnych typów wzbudników nagrzewnic indukcyjnych zarówno w stanie jałowym, jak i obciążenia (z wsadem). Układ składał się z mostka Maxwella ze wzorcami pojemności C_N i rezystancji R_N. Mierzoną reaktancję wzbudnika oznaczono przez X_x, a pozostałe elementy mostka stanowiły: R_2 - bocznik bezindukcyjny BKRK 75/70 o rezystancji 50 mΩ, R_3 - rezystor regulacyjny (nawinięty drutem bifilarnie) KR4-27 o rezystancji 200 i 500 Ω, w klasie 0,05. Mostek zasilano poprzez transformator separujący ze wzmacniacza mocy LV-102 (2 Hz - 40 kHz, 50 W) i generatora RC (SG-502, Tektronix). Jako wskaźnika zrównoważenia mostka używano oscyloskopu cyfrowego SC-501 (Tektronix) o czułości 10 μV/div i wzmacniacza elektronicznego AF-502. Całość systemu zasilającego i pomiarowego stanowiły wkładki modułowego



Rys. D2.1. Schemat elektryczny stanowiska pomiaru impedancji wzbudników
Fig. D2.1. Electrical diagram of the experimental stand for inductors impedance measurements

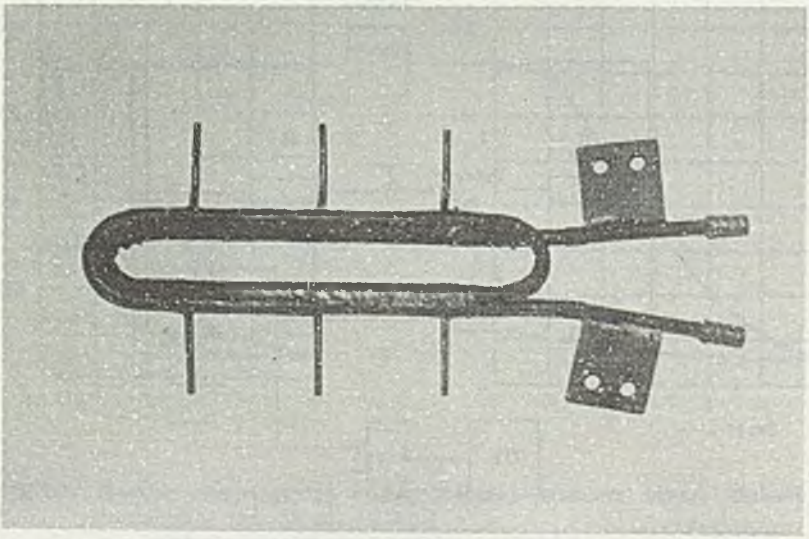
układu pomiarowego firmy Tektronix. System ten zapewniał możliwość uzyskania dokładności pomiaru reaktancji rzędu 10^{-5} Ω. Prąd pomiarowy (płynący przez badaną impedancję) utrzymywano w granicach kilku amperów, co zapewniało, że w trakcie pomiarów ani temperatura wzbudników, ani wsadów nie ulegała zmianie.

Na opisanym stanowisku dokonano pomiarów reaktancji 4 różnego typu wzbudników nagrzewnic indukcyjnych. Należy zaznaczyć, że nie były to wzbudniki specjalnie przystosowywane do pomiarów, ale typowe, zbudowane i stosowane przez autora w konkretnych zagadnieniach technologicznych. Przebadano:

- wzbudnik płaski jednostronny, bezrdzeniowy (rys.D2.2);
- wzbudnik płaski jednostronny z rdzeniem magnetycznym (rys.D2.3);
- nagrzewnicę płaską dwustronną, rdzeniową, która w zależności od sposobu połączenia uzwojeń, wytwarza albo pole magnetyczne podłużne, albo poprzeczne (rys.D2.4).

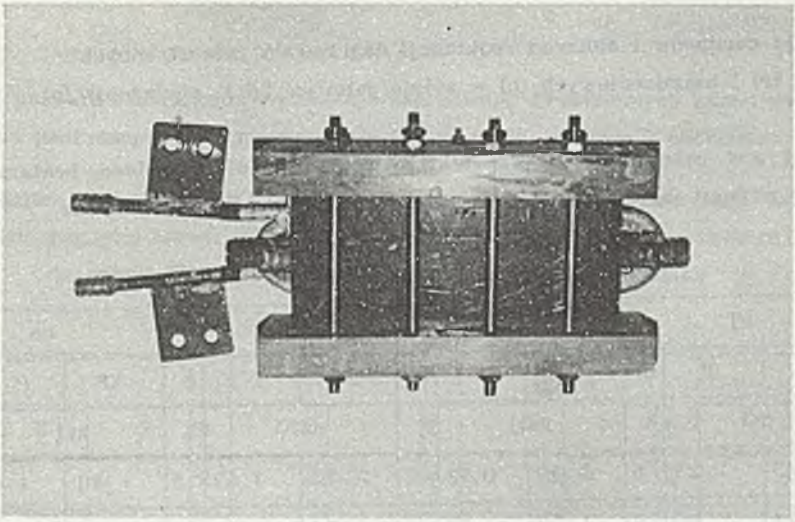
Jako wsady stosowano blachy aluminiowe o wymiarach 300x160x6 mm.

Uzyskane wyniki pomiarowe zebrano w tabl.D2.1 - D2.3, w których podano również wyniki obliczeń dla poszczególnych typów wzbudników, wykonanych przez autora w oparciu o zależności uzyskane w rozdz.5. Rozbieżność między wynikami obliczeniowymi a pomiarowymi nie przekraczała 8%.



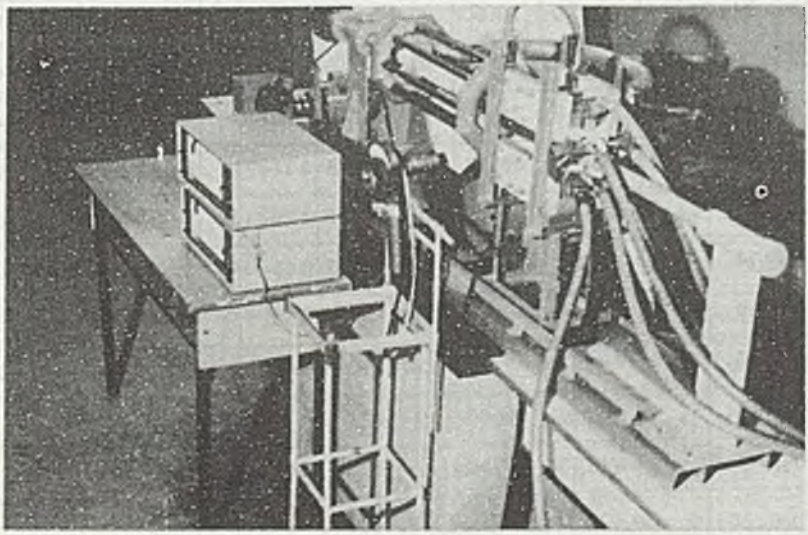
Rys. D2.2. Widok stosowanego wzbudnika płaskiego, jednostronnego, bezrdzeniowego

Fig. D2.2. The view of the flat one-sided coreless inductor used in measurements



Rys. D2.3. Widok stosowanego wzbudnika płaskiego, jednostronnego z rdzeniem magnetycznym

Fig. D2.3. The view of the flat one-sided inductor with magnetic core used in measurements



Rys. D2.4. Widok stosowanej nagrzenicy płaskiej, dwustronnej z rdzeniami magnetycznymi

Fig. D2.4. The view of the flat two-sided heater (the inductor with magnetic cores) used in measurements

Tablica D2.1

Wyniki pomiarów i obliczeń reaktancji nagrzewnic jednostronnych rdzeniowych (r) i bezrdzeniowych (b) w stanie jałowym (j) i obciążenia (o)

Experimental and calculating results of the reactance of one-sided heaters with (r) and without (b) magnetic cores in no-load (j) and load (o) states

f	rj			ro			bj			bo		
	O	P	B	O	P	B	O	P	B	O	P	B
Hz	mΩ		%	mΩ		%	mΩ		%	mΩ		%
100	1,23	1,29	5	0,90	0,92	2	3,27	3,43	5	1,71	1,63	4
200	2,47	2,60	5	1,79	1,89	6	6,54	6,93	6	2,94	2,87	2
500	6,17	6,40	4	4,36	4,55	4	16,35	17,34	6	6,80	6,53	4
1000	12,35	12,38	1	8,61	8,67	1	32,70	34,05	4	12,50	11,73	6
1500	18,52	18,34	1	12,81	12,72	1	49,05	50,14	2	17,37	16,31	6
2000	24,69	24,23	1	16,50	16,63	1	65.39	65,60	1	20,03	20,48	2
2500	30,87	30,13	1	19,72	20,57	2	81,75	86,39	6	24,61	24,66	1
3000	37,04	36,00	3	24,57	24,50	1	98,10	95,94	2	29,15	28,84	1
3500	43,22	41,87	3	28,59	28,41	1	114,45	111,28	3	33,66	32,99	1
4000	49,39	47,75	3	32,62	32,32	1	130,80	126,42	3	38,16	37,20	3
4500	55,57	53,44	4	36,64	36,20	1	147,15	141,09	4	42,64	41,28	3
5000	61,74	59,38	4	40,66	40,15	1	163,49	156,45	4	47,10	45,55	3
6000	74,08	70,87	4	48,69	47,95	2	196,18	186,61	5	55,98	53,53	4
7000	86,43	82,25	5	56,72	55,60	2	-	-	-	-	-	-
8000	98,78	94,00	5	64,73	63,30	2	-	-		-	-	-

gdzie:

O - wyniki obliczeniowe
P - wyniki pomiarowe
B - błąd względny

Tablica D2.2

Wyniki pomiarów i obliczeń reaktancji nagrzewnic dwustronnych rdzeniowych pola podłużnego (c) i poprzecznego (s) w stanie jałowym i obciążenia

Experimantal and calculating results of the reactance of two-sided heaters with magnetic cores: of longitudal magnetic field (c) and transverse magnetic field (s) in the no-load (j) and load (o) states

f	cj			co			sj			so		
	O	P	B	O	P	B	O	P	B	O	P	B
Hz	mΩ		%	mΩ		%	mΩ		%	mΩ		%
100	1,72	1,86	4	1,86	1,87	1	3,79	3,80	0	1,99	2,10	6
200	3,63	3,80	4	3,61	3,78	5	7,37	7,56	3	3,72	3,95	6
500	8,87	9,36	6	8,84	9,30	5	17,98	18,69	4	9,22	9,82	6
1000	17,70	17,78	1	17,42	17,72	2	35,54	36,63	3	18,50	19,16	4
1500	26,51	26,67	1	25,89	25,73	1	53,04	54,29	2	21,81	28,09	1
2000	35,42	35,06	1	34,32	33,55	2	70,50	71,75	2	35,18	36,95	5
2500	44,33	43,51	2	42,74	41,47	3	87,95	89,22	1	44,00	45,71	4
3000	53,25	52,02	2	51,16	49,39	3	105,38	106,69	1	52,81	54,48	3
3500	62,18	60,48	3	59,59	57,18	4	122,80	124,25	1	61,62	63,11	2
4000	71,11	68,96	3	68,01	65,35	4	140,22	141,50	1	68,23	71,88	5
4500	80,04	77,47	4	76,43	73,23	4	157,62	158,90	1	76,75	80,41	5
5000	84,33	85,77	2	84,85	81,05	5	175,01	176,24	1	85,25	88,91	3
6000	101,27	102,54	1	101,69	96,89	5	209,79	211,12	1	102,28	106,31	4
7000	118,12	119,63	1	118,52	112,59	5	244,56	244,98	0	119,30	123,15	3
8000	135,17	136,22	1	135,35	128,18	5	279,31	279,48	0	136,32	140,24	3

gdzie:

O - wyniki obliczeniowe
P - wyniki pomiarowe
B - błąd względny

Tablica D2.3

Wyniki pomiarów i obliczeń rezystancji wnoszonych nagrzewnic jednostronnych (j) i dwustronnych (d), rdzeniowych (r) i bezrdzeniowych (b) w stanie obciążenia

Experimental and calculating results of the brought in resistance of one-sided (j) and two-sided (d) heaters, with (r) and without (b) magnetic cores in the load state

f	jb			jr			dr		
	O	P	B	O	P	B	O	P	B
Hz	mΩ		%	mΩ		%	mΩ		%
100	0,70	0,65	7	0,92	0,99	8	0,49	0,45	8
200	0,90	0,83	8	0,17	0,18	6	0,60	0,56	6
500	0,92	0,99	7	0,22	0,23	5	0,63	0,58	7
1000	1,22	1,13	8	0,29	0,28	3	0,72	0,66	8

gdzie:

O - wyniki obliczeniowe
P - wyniki pomiarowe
B - błąd względny

LITERATURA

[1] Agranel P.D.: Eddy currents losses in solid and laminated iron. AIEE Trans., 1959, No. 78.

[2] Angot A.: Complements de mathematiques (tłum. ros. "Matiematika dla elektro- i radioinżinierow"). Nauka, Moskwa 1967.

[3] Antoniewicz J.: Tablice funkcji dla inżynierów. PWN, Warszawa 1969.

[4] Aramanowicz I.G., Lewin W.I.: Urawnienija matiematiczeskoj fiziki. Nauka, Moskwa 1964.

[5] Ascaturow V.N.: Issliedowanije tiermouprugich naprażenij. Kuzn.-Stamp. Proizw., 1977, T.19, Nr 1, ss. 37-38.

[6] Babat G.I.: Indukcijonnyj nagriew miietałłow i jewo promyszliennyje primienienija. Energija, Moskwa 1975.

[7] Baker R.M.: Design and calculation of induction heating coils. AIEE Trans., 1957, No. 76.

[8] Bielajew N.M., Rjadno A.A.: Mietody niestacjonarnoj tiepłoprowodnosti. Wysszaja Szkoła, Moskwa 1978.

[9] Bielajew N.M., Rjadno A.A.: Mietody tieorii tiepłoprowodnosti t. 1/2. Wysszaja Szkoła, Moskwa 1982.

[10] Binns K.J., Lawrenson P.J.: Analysis and computation of electric and magnetic field problems. Pergamon Press, Oxford 1963.

[11] Van Bladel J.: Electromagnetic fields. McGraw-Hill Book Co., New York 1964.

[12] Bodażkow W.A.: Indukcjonnyj nagriew trub. Maszinostrojenie, Leningrad 1969.

[13] Bogdanow W.N., Ryskin S.E., Szamow A.N.: Indukcjonnyj nagriew w kuznieczno proizwodstwie. Maszinostrojenie, Moskwa - Leningrad 1956.

[14] Bracewall R.: Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania. WNT, Warszawa 1965.

[15] Brokmeier R.-H.: Induktives Schmelzen. BBC Ver., Mannheim 1966.

[16] Buchholz H.: Elektrische und magnetische Potentialfelder. Springer Ver., Berlin - Göttingen - Heidelberg 1957.

[17] Buchholz H.: Das Magnetfeld der Wirbelströme in einem elektrischen Induktionsofen und andere daraus ableitbare Wirbelströmfelder. Arch. f.

Elektrot., 1958, XLIII B., 6. H.

[18] Carslaw A.S., Jaeger J.C.: Conduction of heat in solids. Oxford University Press, Oxford 1959.

[19] Collin R.E.: Prowadzenie fal elektromagnetycznych. WNT, Warszawa 1966.

[20] Davies J., Simpson P.G.: Induction heating handbook. McGraw - Hill Book Co. (UK) Ltd., Maidenhead, Berkshire, England 1979.

[21] Donskoj A.W.: Nagrzewanie indukcyjne i pojemnościowe. WNT, Warszawa 1970.

[22] Donskoj A.W.: On the theory of induction heating of ferromagnetic bodies. VII Cong. UIE, Warszawa 1972.

[23] Farbman S.A., Kolobniew I.F.: Indukcjionnyje pieczi dla pławki mietałłow i spławow. Mietałłurgizdat, Moskwa 1949.

[24] Fikus F., Wieczorek T.: Parametry elektryczne układu wsad - wzbudnik cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, 1975, z.4, ss. 749-760.

[25] Fikus F., Wieczorek T.: Rozkład gęstości prądu indukowanego wzdłuż wysokości kanału roboczego dozownika elektrodynamicznego. Archiwum Elektrotechniki, t. XXV, 1976, z.2, ss. 443-454.

[26] Fikus F., Wieczorek T.: Obliczanie parametrów elektrycznych wzbudnika cylindrycznej nagrzewnicy zewnętrznej z bocznikiem magnetycznym. Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. "Hutnictwo", Gliwice, z.8, 1976, ss.101-119.

[27] Fikus F., Sajdak C., Wieczorek T.: K woprosu rascziota cilindriczieskich, elektromagnitnych, pieriemiesziwajuszczich ustrojstw. World Electotechnical Congress, Moskwa 1977, pap. no. 4A.39.

[28] Fikus F., Sajdak C., Wieczorek T.: Rozkład pola elektromagnetycznego i mocy w płaskiej nagrzewnicy indukcyjnej. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVI, 1977, z.1, ss. 835-844.

[29] Fikus F., Sajdak C., Wieczorek T.: The calculation of one- and three-phase induction furnaces with conducting crucible. Int. Conf. on Induction Heating and Melting, Liege 1978, pap. no. 16.

[30] Fikus F., Sajdak C., Wieczorek T.: Obliczanie pola elektromagnetycznego i sił elektrodynamicznych w cylindrycznych mieszadłach do ciekłych metali. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVIII, 1979, z.1, ss.189-201.

[31] Fikus F., Wieczorek T.: Urządzenia MHD w odlewniach i hutach. Śląsk, Katowice 1979.

[32] Fikus F., Wieczorek T.: Obliczanie parametrów elektromagnetycznego dozownika 3-fazowego do ciekłych metali. Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. "Hut-

nictwo", Gliwice, z.18, 1979 ss. 188-206.

[33] Fikus F., Sajdak C., Wieczorek T.: Obliczanie jedno- i wielofazowych urządzeń termoindukcyjnych i elektromagnetycznych o symetrii cylindrycznej. IX Symp. MME, Pokrzywno 1985, Ref. Nr 25.

[34] Fluerasu C., Galan N.: Eddy currents and the power converted into heat inside a very long cylindrical conductor placed in a.c. coil of finite lenght. Rev. Roum. Sci., t. 11, 1966, no. 2.

[35] Góra S., Wieczorek T.: Analiza pola elektromagnetycznego w indukcyjnym układzie grzejnym wsad rurowy - wzbudnik z 3-fazowym polem biegnącym. Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. "Hutnictwo", Gliwice, z.26, 1984, ss. 37-48.

[36] Guz E., Kącki E.: Pola temperatury w ciałach stałych. PWN, Warszawa 1967.

[37] Hannakam L.: Allgemeine Lösung des transienten ebenen Skinneffektproblems für einem bleibig bewegungen massiven Zylinder. Archiv. f. Elektrotechnik, t. 55, 1972, Nr 2.

[38] Hannakam L.: Wirbelströme in einem massiven Zylinder bei bleibig geformter erregender Leiterschleife. Archiv. f. Elektrotechnik (Berlin), Jg. 55, 1973, Nr 4.

[39] Harvey I.G.: The theory of multi-layered windings for induction heating and their application a 1 MW, 50 Hz longitudinal flux billet heater. VIII Congr. UIE, Liege 1976, pap. no. 4.

[40] Haubitzer W.: Das magnetische Feld eines Toroids und einer mehrlagigen Zylinderspule. Z. Elektr. Inf. u. Energ.-Techn., Jg. 4, 1974, Nr 3.

[41] Hegewaldt W.: Dreiphasige Spulen für Induktionserwärmungsanlagen. VI Congr. UIE, Berlin 1968, Ref. Nr 10.38.

[42] Hering M.: Termokinetyka dla elektryków. WNT, Warszawa 1980.

[43] Hobler T.: Ruch ciepła i wymienniki. WNT, Warszawa 1979.

[44] Hong Y.K., Stefanakos E.K.: Magnetic field distributions in a ferromagnetic conductor. IEEE Trans. Magnetics, 1973, no. 2.

[45] Horoszko E.: Induction heating of flat objects . Archiv. f. Elektrot., 1975, Nr 57.

[46] Horoszko E.: Induction heating of rotating bodies. Elektrowärme Int., 1978, Nr 2.

[47] Ignatow I.I.: Matiematiczieskoje modielirowanie tiepłoobmiena w swierchmoszcznych elektropieczach. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 3.9.

[48] Jeffreys H., Swirles B.: Methods of mathematical physics (tłum. ros.

"Mietody matiematiczeskoj fiziki"). Mir, Moskwa 1969.

[49] Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów. PWN, Warszawa 1971.

[50] Kaźmierski M.: Pole elektromagnetyczne i straty wywołane przez prądy w układzie przewodów równoległych do ekranowanej półprzestrzeni o własnościach ferromagnetycznych. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, 1975, z. 4.

[51] Kącki E.: Termokinetyka. WNT, Warszawa 1967.

[52] Kącki E.: Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice. WNT, Warszawa 1971.

[53] Kącki E., Filutowicz Z.: Zastosowanie metod probabilistycznych do wyznaczania pól temperatury ciał stałych. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 3.4.

[54] Knoch-Kaźmierczak H., Kaźmierczak J.: Hartowanie indukcyjne. PWT, Warszawa 1959.

[55] Knopp K.: Szeregi nieskończone. PWN, Warszawa 1956.

[56] Kowalenko A.D.: Izobrannyje trudy. Naukowa Dumka, Kijów 1976.

[57] Krakowski M.: Active power loss in the ferromagnetic medium due to currents in w multi-conductor system. Archiwum Elektrotechniki, t. XVII, 1969, z. 2.

[58] Krakowski M.: Distribution of active power on surface of ferromagnetic medium due to currents in parallel conductors. Archiwum Elektrotechniki, t. XIX, 1970, z. 3.

[59] Krakowski M.: Eddy currents losses in a non-ferromagnetic plate due to currents in a multi-conductor system. Archiwum Elektrotechniki, t. XXII, 1973, z. 2.

[60] Krakowski M.: Currents and potentials along underground conductors due to short-circuit currents in a power line. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIII, 1974, z. 1.

[61] Krakowski M., Szymański G.: Straty wiroprądowe wywołane w cylindrycznym rdzeniu ferromagnetycznym przez prądy w krótkich cewkach współosiowych. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, 1975, z. 1.

[62] Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna t.II. PWN, Warszawa - Poznań 1979.

[63] Krstewa A.P., Dimitrow M.A., Georgiew A.P., Zachariew S.M.: Elektriczieskije paramietry i rieżimy raboty indukcjionnogo nagriewatiela kotła. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 2.1.

[64] Kupalan S.D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.

[65] Kutatieładze S.S., Boroszanski W.M.: Sprawocznik po tiepłopieriedacze. Energija, Moskwa - Leningrad 1958.

[66] Lammeraner I., Stafl M.: Wichriewyje toki. Energija, Moskwa - Leningrad 1967.

[67] Landau L.D., Lifszyc E.M.: Elektrodynamika spłosznych sried. Fizmatgiz Moskwa 1959.

[68] Landau L.D., Kifszyc E.M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1972.

[69] Langer E.: Torie indukcniho a dielektrickeho tepla. Academia, Praga 1979.

[70] Lavers J.D., Biringer P.P.: An analysis of the coreless induction furnace. Elektrowärme Int., 1971, Nr 4.

[71] Lavers J.D., Biringer P.P.: An improved method of calculating the induction heating equivalent circuit parameters. VII Congress UIE, Warszawa 1972, Ref. Nr 602.

[72] Lawrenson P.J., Ralph M.C.: General 3-dimensional solution of eddycurrent and Laplacian fields in cylindrical structures. Proc. IIE, vol. 117, 1970, no. 2.

[73] Lebiediew N.I.: Specjalnyje funkcji i ich priłożenija. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa - Leningrad 1963.

[74] Liwiński W.: Nagrzewnice indukcyjne skrośne. WNT, Warszawa 1968.

[75] Lupi S., Niemkow W.S.: Induttori multipli con o scenza schermo ferromagnetico per corpi cilindrici bimetalici o cavi. Att.e Memoria d'Academie Patavina di Scienze, vol. LXXXVIII, 1975-76.

[76] Lupi S., Niemkow W.S.: The calculation of inductors with periodical fields. Elektrowärme Int., 1977, Nr 35.

[77] Łykow A.W.: Teoria tiepłoprowodnosti. Wysszaja Szkoła, Moskwa 1967.

[78] Machmudow K.M., Słuchocki A.E.: Rascziot elektriczeskich parametrow nagriewatielnych induktorow mietodom nawiediennych EDS. Trudy WNIITWCz wyp. 11, Maszinostrojenie, Leningrad 1970.

[79] Machmudow K.M., Słuchocki A.E.: Rascziot elektriczeskich parametrow cilindriczeskich induktorow proizwolnoj dliny. Trudy WNIITWCz wyp. 10, Maszinostrojenie, Leningrad 1969.

[80] Mager A.J.: Magnetic shields. IEE Trans. Magnetics, 1970, no. 1.

[81] Marczenko N.W.: Matiematiczeskije mietody rasczięta radiacjonnogo i konwiektiwnogo tiepłoobmiena w elektrotiermiczeskich ustanowkach. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 3.10.

[82] Mey G.: A method for calculation eddy currents in plates of arbitrary

geometry. Archiv. f. Elektrotechnik (Berlin), Jg. 56, 1974, Nr 3.

[83] Moon P., Spencer D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[84] Nacke B., Mühlbauer A.: Numerische Simulation von induktiven Erwärmungsvorgangen mittels der Methode der finiten Differenzen. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 2.2.

[85] Nejman L.R.: Powierchnostnyj efiekt w fierromagnitnych tiełach. Gosiechizdat, Leningrad 1949.

[86] Nejman L.R.: Powierchnostnyj efiekt w fierromagnitnych prowodach i magnitnych cjepiach. Elektriczestwo, 1950, Nr 1.

[87] Niemkow W.S., Słuchocki A.E.: Rascziot parametrow korotkich induktorow s pomoszczju schiem zamieszczania. Trudy WNIITWCz, wyp. 11, Maszinostrojenie, Leningrad 1970.

[88] Nowacki W.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1970.

[89] Nowacki W.: Termosprężystość. Ossolineum, Wrocław - Warszawa 1972.

[90] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965.

[91] Parkus H.: Instationäre Wärmespannungen (tłum. ros. "Nieustanowiwszijesja tiermouprugije naprażenija"). Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1963.

[92] Pawłow N.A.: Inżyniernyje tiepłowyje rascziot indukcionnych nagriewatieliej. Energija, Moskwa 1978.

[93] Pczelin B.K.: Analiza wektorowa dla inżynierów. PWN, Warszawa 1971.

[94] Piechowicz A.I., Żidkich W.M.: Rascziety tiepłowogo rieżima twiordych tieł. Energija, Leningrad 1968.

[95] Piskunow N.S.: Diffierencjalnyje i intiegralnyje issczislenija. Nauka, Moskwa 1965.

[96] Podstrigacz J.S., Burak J.I., Gaczkiewicz A.R., Czerniawskaja L.W.: Tiermouprugost elektroprowodnych tieł. Naukowa Dumka, Kijów 1977.

[97] Pr. zbiorowa pod red. K. Kegela: Elektrowärme - Theorie und Praxis. W. Girardet, Essen 1974.

[98] Pr. zbiorowa pod red. A.P. Altgauzena: Issliedowanija w obłasti promyszliennogo elektronagriewa. Trudy WNIITWCz wyp. 4, Energija, Moskwa 1970.

[99] Pr. zbiorowa pod red. A.P. Altgauzena: Issliedowanija w obłasti promyszliennogo elektronagriewa. Trudy WNIITWCz wyp. 5, Energija, Moskwa 1972.

[100] Pr. zbiorowa pod red. R. Mittra: Computer techniques for electromagnetics (tłum. ros. "Wyczislitielnyje mietody w elektrodinamikie"). Mir, Moskwa 1977.

[101] Rawicki S., Krystkowik H., Polz J.: Metoda obliczania elektromagnetycznego transportera płynnego metalu przy różnych układach rdzenia magnetycznego. Mat. V Symp. MME, Podlesice 1976.

[102] Reichert K.: Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Anordnungen zur induktiven Erwärmung. Elektrowärme Int., Bd. 26, 1968, Nr 4.

[103] Reichert K.: Ein numerisches Verfahren zur Berechnung megnetischer Felder insbesondere in Anordnungen Permanentmagneten. Archiv. f. Elektrotechnik, Bd. 52, 1968, H. 3.

[104] Rodigin N.M.: Indukcijonnyj nagriew stalnych izdieliej. Mietałłurgizdat, Moskwa 1950.

[105] Romanowski P.I.: Rjady Fourie - tieoria pola. Nauka, Moskwa 1964.

[106] Sabelnikow A.G.,Tayts N.J.: Tiemperaturnoje pole i termouprugije naprażenija w nieograniczenom cylindrie s wnutriennom istocznikom tiepła. Izw. Wyssz. Uczebn. Zaw. Czorn. Met, 1973, Nr 11.

[107] Sajdak C.,Samek E.: Nagrzewanie indukcyjne. Podstawy teoretyczne i zastosowania. Śląsk, Katowice 1987.

[108] Sajdak C.: An analytical method of calculating the electromagnetic parameters of flat induction heaters. Acta Techn. CSAV, 1983, Nr 4.

[109] Sajdak C.: Analiza pola elektromagnetycznego w indukcyjnym układzie grzejnym płyta - wzbudnik. Archiwum Elektrotechniki, t. XXVI, 1977, z. 4.

[110] Sajdak C.: Zastosowanie metody całki Fouriera do analizy indukcyjnego układu grzejnego płyta - wzbudnik. Archiwum Elektrotechniki,t.XXVIII, 1979, z. 1.

[111] Sajdak C.: Gęstość prądu indukowanego i moc wydzielana we wsadach płaskich nagrzewanych indukcyjnie wzbudnikami jedno- i dwusekcyjnymi. Rozprawy Elektrotechniczne., t. 29, 1983, z. 1.

[112] Sandler W.J.: Czislennyje isledowanije gidrodinamiki i pierienosa tiepła. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 3.11.

[113] Sapożnikow A.S.: Uniwersalnaja matematiczeskaja model' tiepłoobmiena. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 3.12.

[114] Schulze D.,Anree W.: Numerische Modellierung von Induktionserwärmungsanlagen und Induktionserwärmungsprozessen. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 2.3.

[115] Schwartz T.: Termokinetyka układów elektrotermicznych. WNT, Warszawa 1966.

[116] Sikora R.,Lipiński W.: Schemat zastępczy impedancji żłobkowej uwzglę-

dniający 2-wymiarowe wypieranie prądu. Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, 1975, z. 1.

[117] Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1977.

[118] Simpson P.G.: Grzanie indukcyjne. PWN, Warszawa 1964.

[119] Sjedow C.I.: Miechanika spłosznoj sriedy. Nauka, Moskwa 1970.

[120] Siemienow A.A.: Tieoria elektromagnitnych wołn. Izdatielstwo Moskowskogo Uniwiersitieta, Moskwa 1962.

[121] Skoczkowski T.: Pola sprzężone elektromagnetyczne i temperatury w nagrzewnicach indukcyjnych rur. Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. "Elektryka", z. 121, Gliwice 1991.

[122] Słuchocki A.E.,Niemkow W.S.,Machmudow K.M.: Calculation of electrical parameters of heating inductors. VII Congr. UIE, Warszawa 1972, Ref. Nr 604.

[123] Słuchocki A.E.,Ryskin S.E.: Induktory dla indukcijonnogo nagriewa. Energija, Leningrad 1974.

[124] Słuchocki A.E.: Induktory. Maszinostrojenie, Leningrad 1973.

[125] Sommerfeld A.: Elektrodynamik (tłum.ros. Eliektrodinamika). Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1958.

[126] Stansel N.R: Induction heating. McGraw - Hill Book Co.,New York 1949.

[127] Sundberg Y.: Induction heating. Västa Aros Frycken Aktiebolag Västeras 1965.

[128] Szpitelman J.I.: Czislennyje rasczoty procesow słożnogo tiepłoobmiena w elektropieczach. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, Ref. Nr 3.13.

[129] Średniawa B.,Weyssenhoff J.: Mechanika środowisk rozciągłych. PWN, Warszawa - Kraków 1969.

[130] Tichonow A.N.,Samarski A.A.: Urawnienija matiematiczeskoj fiziki. Nauka, Moskwa 1966.

[131] Timofiejew B.B.: Specjalnyje zadaczi teorii powierchnostnogo efekta. Naukowa Dumka, Kijów 1966.

[132] Titko A.I.,Sczastliwyj G.G.: Matiematiczeskije i fiziczeskije modielirowanie elektromagnitnych polej. Naukowa Dumka, Kijów 1976.

[133] Tozoni O.W.: Rasczet elektromagnitnych polej na wyczislitielnych maszinach. Naukowa Dumka, Kijów 1967.

[134] Turowski J.: Elektrodynamika techniczna. WNT, Warszawa 1968.

[135] Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

[136] Wajnberg A.M.: Indukcijonnyje pławilnyje pieczi. Mietałłurgia, Moskwa 1967.

[137] Walter F.: Die Grundlagen der elektrischen Ofenheizung. Geest u. Portig K.G., Lipsk 1950.

[138] Whittaker E.T.,Watson G.N.: Kurs analizy współczesnej. PWN, Warszawa 1967.

[139] Wieczorek T.: Untersuchungen über die neue induktive Härtungsmethode in Anlage mit Flachinduktoren. X Congr. UIE, Sztokholm 1984, Ref. Nr 3.1.3.

[140] Wieczorek T.: Metoda analizy nagrzewnic indukcyjnych z wsadem ferromagnetycznym. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986, ss.236-256.

[141] Wieczorek T.: Kompleksowa analiza procesu nagrzwania indukcyjnego wsadu niemagnetycznego. I Międzyn. Konf. MMEt, Wisła 1986,ss.257-272.

[142] Wieczorek T.: Hartowanie indukcyjne szyn kolejowych na świecie. Hutnik, t.LIII, 1986, z. 12, s.327-330.

[143] Wieczorek T.: Analiza teoretyczna procesu indukcyjnego hartowania dwuczęstotliwościowego walców. Archiwum Elektrotechniki, t. XXX, 1989 z. 2.

[144] Wieczorek T.: Electromagnetic field in a two-dimensional model of induction heater for plates. Elektrotech. Casopis Bratislava, t. 38, 1987, no. 9, ss. 665-677.

[145] Wieczorek T.: Matiematiczeskaja modiel elektromagnitnych i tiepłowych jawlenij pri powierchnostnom indukcijonnom nagriewie niemagnitnych matieriałow. 34. Int. Wiss. Koll. Ilmenau 1989, Ref. Nr 4.3.13.

[146] Wieczorek T.: Opracowanie technologii i urządzeń do nagrzewania indukcyjnego wybranych elementów stojaka "Valent". II Konf. "Badania naukowe w elektrotermii", Wisła 1987, ss. 27-31.

[147] Wieczorek T., Kadzimierz R., Kucia K., Meixner W.: Opracowanie nowej technologii wytwarzania trzpieni pielgrzymowych stosowanych w procesie wytwarzania rur metodą Mannesmanna. Zesz. Nauk. Pol. Śl. "Hutnictwo" (w druku).

[148] Zakrzewski K.: Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących. Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej s. "Elektryka", z. 38, 1972.

ANALIZA NAGRZEWNIC INDUKCYJNYCH PŁASKICH I CYLINDRYCZNYCH STOSOWANYCH W PROCESACH OBRÓBKI CIEPLNEJ I PLASTYCZNEJ METALI

S t r e s z c z e n i e

W hutnictwie, przemyśle maszynowym i metalowym stosowane są szeroko nagrzewnice indukcyjne, głównie w procesach obróbki cieplnej i plastycznej metali. Przedmiotem pracy jest grupa tych urządzeń ze wzbudnikami płaskimi i cylindrycznymi, jednofazowymi do nagrzewania wsadów niemagnetycznych i ferromagnetycznych. Opracowano metody obliczania parametrów elektromagnetycznych nagrzewnic indukcyjnych posługując się uniwersalnymi modelami obliczeniowymi. Uwzględniono wszystkie istotne zjawiska i elementy występujące w rzeczywistych urządzeniach, a w szczególności: efekty brzegowe, oddziaływanie rdzeni magnetycznych i ekranów niemagnetycznych oraz skończone wymiary wzbudników. Opracowano metody analityczno - numeryczne obliczania pól, rozkładu gęstości prądu i strat w uzwojeniach wzbudników, rdzeniach i nagrzewanych wsadach.

Na bazie wyznaczonego pola ciepła Joule'a we wsadzie obliczono niestacjonarne, źródłowe rozkłady temperatury dla najczęściej spotykanych w praktyce konfiguracji płaskich i cylindrycznych. Na podstawie uzyskanych pól temperatury wyznaczono naprężenia cieplne we wsadach metalicznych nagrzewanych indukcyjnie. Tym samym opracowano kompleksową metodę analizy zjawisk elektromagnetycznych, cieplnych i termosprężystych związanych z nagrzewaniem indukcyjnym, umożliwiającą ścisłe połączenie teorii i technologii oraz projektowanie nagrzewnic indukcyjnych w sposób pełniejszy i dokładniejszy.

Przedstawiono metodykę kompleksowych obliczeń parametrów nagrzewnic. Podano schematy blokowe programów obliczeniowych dla nagrzewnic płaskich i cylindrycznych. Podano liczne przykłady obliczeniowe.

Przeprowadzono weryfikację doświadczalną obliczeń dla kilku nagrzewnic indukcyjnych stosowanych w praktyce.

ANALYSIS OF FLAT AND CYLINDRICAL INDUCTION HEATERS USED TO THE HEAT AND PLASTIC TREATMENT OF METALS

S u m m a r y

Induction heaters have been often used in metallurgy, engineering and metal industry, mainly for the heat and plastic treatment of metals. The subject of the work is a group of these heaters with flat and cylindrical, one-phase inductors (they have been used) for the heating of non-magnetic and ferromagnetic materials. By using universal mathematical models, the calculating methods of induction heater electromagnetic parameters have been elaborated. All important phenomena and elements, as they appear in real heaters (especially: boundry effects, influence of magnetic cores or non-magnetic shields as well as definite dimensions of the inductor) were included. The analytic - numerical method for computations of the fields, current density distribution and losses in inductor windings, cores, shields and charges were elaborated.

On the basis of the determined field of power losses in the charge, the non-stationary sourcal temperature fields (for most often used in practise flat and cylindrical heaters), were calculated. On the base of the obtained temperature field, thermal stresses in metalic charges heated inductively, were determined. The general method for the analysis of electromagnetic, thermal and thermoelastic phenomena, connected with the induction heating, was elaborated. This method closely joins the theory and technology as well as designing of induction heaters, so in this way the description is complete and exact.

The complex calculating methodic of heater parameters is presented. Block diagrams of computation programmes for flat and cylindrical heaters, and lots of calculating examples, are given.

The experimental verification of calculating results for several practically used induction heaters, was carried out.

АНАЛИЗ ИНДУКЦИОННЫХ НАГРЕВАТЕЛЕЙ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРИМЕНЯЕМЫХ В ПРОЦЕСАХ ТЕРМИЧЕСКОЙ И ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

Р е з ю м е

В кызнечном и машинном производстве, а тоже в металлургии широко применяется индукционные нагреватели, особенно в процесах термической и пластической обработки металлов. Предметом роботы есть группа таких установок с плоскими и цилиндрическими одхофазными индукторами применяемыми для нагрева немагнитных и ферромагнитных загрузок. Разработано метода бычислениа электромагнитных параметров индукционных хагревателей пользыюсь универсальными вычислительными моделями. Взято во внимание все важные явления и элементы встречаемые в действительных установках, а особенно: краевые эффекта, воздействье магнитных сердечников или немагнитных экранов, а тоже конечные размера индукторов. Разработано аналитическо-нумеричхые метода вычисления полей, распределения плотности тока и потерь в обмотках индукторов, сердечниках и нагреваемых загрузках.

На основании определенных потерь в загрузке, вычислено нестационарные температурные поля с источниками теплоты, для бсех практически встречаемых плоских и цилиндрических систем. На базе полученного температурного поля вычислено тепловые напражения в металлических загрузках нагреваемых индукционно. Таким путем разработано комплексную методу анализа электромагнитных, тепловых и термоупругих явлений связанных с индукционном нагревом, которая делаеть возможном точные соединение теории и технологии, а тоже проектирования индукционных хагревателей, полнее и точнее чем до сих пор.

Представлено методику комплексных вычислений параметров хагревателей. Подано блок-схемы компютерных программ для плоских и цилиндрических хагревателей. Подано многие численные примера.

Сделано экспериментальную верификацию вычислений для многих индукционьных хагревателей применяемых на практике.