BUDOWNICTWO z. 33

STANISŁAW BIELAK

OGÓLNA TEORIA POWŁOK PROSTOKREŚLNYCH PRACUJĄCYCH W STANIE ZGIĘCIOWYM

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 364 – GLIWICE 1973

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 364

STANISŁAW BIELAK

OGÓLNA TEORIA POWŁOK PROSTOKREŚLNYCH PRACUJĄCYCH W STANIE ZGIĘCIOWYM

PRACA HABILITACYJNA Nr 123

GLIWICE 1973

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Włodzimierz Starosolski

SEKRETARZ REDAKCJI

Helena Ogrodnik

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 50+175 Ark. wyd. 3,8 Ark. druk. 6,25 Papier offsetowy kl. III, 70×100, 70 g
Oddano do druku 22. 2. 1973 Podpis. do druku 10. 5 1973 Druk ukończ. w czerwcu 1973
Zam. 1561 25. 11. 1972 M-23 Cena zł 5,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

WYKAZ OZNACZEŃ

u^1, u^2 – zmienne niezależne w układzie krzywoliniowym
2h – grubość powłoki
g_{ij} – współczynniki pierwszej formy różniczkowej
g – wyróżnik pierwszej formy różniczkowej
b_{ij} – współczynniki drugiej formy różniczkowej
b – wyróżnik drugiej formy różniczkowej
Γ^k_{ij} – symbole Christoffela drugiego rodzaju
K – krzywizna gaussowska
H – krzywizna średnia
γ_{ij} – składowe tensora deformacji
ϱ_{ij} – składowe tensora mieszanej deformacji zgięciowej
ϑ_{ij} – składowe tensora deformacji zgięciowej
w^i – kontrawariantne składowe wektora przemieszczenia
τ^{ij} – kontrawariantne składowe tensora naprężenia
N^{ij} – kontrawariantne składowe tensora napięć
M^{ij} – kontrawariantne składowe tensora momentów
Q^i – kontrawariantne składowe sił poprzecznych
P^i – kontrawariantne tensory obciążenia
λ, μ – współczynniki Lame'go
E – moduł Younga
ν – stała Poissona

WSTĘP

Znaczenie cienkościennych konstrukcji, do których zaliczamy również powłoki, we współczesnym budownictwie stale wzrasta. Rozwijające się dynamicznie budownictwo naszego wieku coraz częściej sięga do konstrukcji powłokowych i to nie tylko ze względu na duże walory nośne tych ustrojów, ale również z uwagi na uzyskiwane efekty estetyczno-architektoniczne. Wiek nasz, dający początek erze maszyn "myślących", stwarza wprost nieograniczone możliwości w zakresie techniki cyfrowej uprawianej w dziedzinie teorii konstrukcji. Tak więc dotychczasowy złożony aparat obliczeniowy wynikający z charakteru pracy konstrukcji powłokowych, w poważnym stopniu hamujący rozwój tych ekonomicznych konstrukcji nie będzie stanowił w przyszłości przeszkody w ich realizacji. Szczególne miejsce wśród tych konstrukcji zajmują powłoki prostokreślne. W praktyce budowlanej są one dotychczas najczęściej stosowane, ponieważ stosunkowo łatwo dają się formować. Z tego też względu opracowanie jednolitego aparatu obliczeniowego, rozwiązującego tę grupę powłok, będzie miało dla praktyki szczególne znaczenie.

W pracy tej podjęto próbę podania rozwiązania powłok prostokreślnych w zgięciowym stanie naprężenia, opartego na liniowej teorii powłok. Przyjęto, że powłoki tej grupy są zbudowane z jednorodnego izotropowego materiału, podlegającego prawu Hooke'a. Najprostszym rozwiązaniem byłoby rozwiązanie oparte na błonowej teorii powłok. Jednak zrealizowanie w praktyce stanu błonowego, poza nielicznymi przypadkami, jest nie zawsze możliwe. Wprawdzie w niektórych przypadkach, dla określonych obciążeń, można wymusić pracę błonwwą powłoki przez nałożenie na ustrój dodatkowych więzów, ale zabieg taki, wynikający najczęściej z trudności obliczeniowych, wydaje się niecelowy i nieekonomiczny.

Problematyce błonowej powłok poświęcono szereg prac [2, 3, 4, 16], jest ona omawiana prawie w każdym podręczniku dotyczącym teorii powłok [7, 8, 10, 12, 13, 19, 23, 31]. Szczególne miejsce w tych pracach zajmują powłoki, których powierzchnie środkowe są powierzchniami prostokreślnymi rozwijalnymi. Dla tej grupy powłok, to znaczy powłok zbudowanych w oparciu o powierzchnie środkowe prostokreślne rozwijalne (walce, stożki), istnieje również bogata literatura naukowo-techniczna poświęcona pracy zgięciowej. Innym powłokom prostokreślnym nie należącym do grupy powłok rozwijalnych a pracujących w stanie zgięciowym zostały poświęcone tylko nieliczne prace, na przykład [1, 15, 21]. Należy podkreślić, że prace te oparto na związkach fizycznych zbudowanych dla krzywiznowego układu współrzędnych krzywoliniowych. Często, przyjmowany przez autorów ortogonalny układ współrzędnych krzywoliniowych, dla sparametryzowania rozpatrywanej powłoki nie jest układem krzywiznowym, a wtedy rozwiązanie oparte na związkach fizycznych ważnych dla układu krzywiznowego, może prowadzić w niektórych przypadkach do znacznych odchyleń, jak to zostało wykazane w pracy [1].

W dotychczasowym ujęciu tego problemu najczęściej nie są wykorzystywane naturalne własności powłok prostokreślnych, które daje właściwa parametryzacja. Udowodniono na przykład, że przez wprowadzenie właściwej parametryzacji na powierzchni środkowej powłoki, można rozwiązanie stanu błonowego powłok prostokreślnych sprowadzić do kwadratur.

Przyjęty w pracy matematyczny model opisujący stan naprężenia w powłoce, oparty jest na tak zwanej liniowej teorii powłok, przy czym o ośrodku materialnym, z którego są utworzone powłoki prostokreślne zakłada się, że jest to ośrodek Hooke'a.

Model ten prowadzi do układu liniowych równań o pochodnych cząstkowych, zwanych równaniami równowagi oraz do liniowych, różniczkowych związków pomiędzy funkcjami opisującymi stan odkształcenia powłoki a współrzędnymi wektora przemieszczenia powierzchni środkowej powłoki. Równania te uzupełnione algebraicznymi związkami pomiędzy napięciami i momentami a funkcjami opisującymi stan odkształcenia powłoki, wynikającymi z przyjętego modelu ośrodka, prowadzą do układu równań opisujących statyczną pracę powłoki. W przedłożonej pracy zostanie podane rozwiązanie ogólne powłok prostokreślnych, oparte na metodzie zastosowanej przez autora w odniesieniu do powłok śrubowych, a polegającej na wprowadzeniu dwóch wymuszonych stanów: błonowego i zgięciowego, sprowadzających odpowiednie układy równań różniczkowych do kwadratur [1].

Rozpatrując grupę powłok prostokreślnych, w której skład wchodzą również powłoki śrubowe, możemy także założyć, że uogólnione siły przekrojowe (napięcia i momenty) będą sumami złożonymi z wpływów pracy błonowej i pracy zgięciowej. Dla ośrodków ciągłych podlegających prawu Hooke'a, stosując zasadę superpozycji możemy przy założeniu odpowiednio dobranych funkcji obciążeń, rozpatrywać poszczególne wpływy niezależne. Należy jednak podkreślić, że funkcje obciążeń, wymuszające określone stany, błonowy względnie zgięciowy, są ściśle związane z pewnym zadanym stanem przemieszczeń i dlatego kształt ich jest jednoznacznie określony. Realizując bowiem tylko stan błonowy lub tylko stan zgięciowy, wprowadzamy do rozpatrywanego ośrodka ciągłego, jakim jest powłoka, pewne dodatkowe więzy usztywniające rozpatrywany model, przy czym wpływ tych dodatkowych więzów jest całkowicie skompensowany odpowiednio dobraną funkcją obciążeń, wymuszającą określony stan i dlatego nie przekazuje się on na pracę stanu drugiego.

Jak już wspomniano, przy odpowiedniej parametryzacji, ogólny układ równań stanu błonowego powłok prostokreślnych daje się rozwiązać.Dało to podstawę autorowi do przypuszczenia, że również stan zgięciowy da się rozwiązać i tym samym możliwe będzie, przez superpozycję, uzyskanie ogólnego rozwiązania postawionego problemu. Otrzymane wyniki potwierdziły słuszność tego przypuszczenia.

Przechodząc do omówienia treści pracy należy podkreślić, że przyjęcie właściwej parametryzacji na powierzchni środkowej powłoki znacznie upraszcza rachunki i ma duży wpływ na formułowanie warunków brzegowych. Wprowadzona w pracy parametryzacja została oparta na rodzinie tworzących prostoliniowych i tym samym rozwiązanie stanu błonowego powłok prostokreślnych mogło być sprowadzone do kwadratur.

Dla celów obliczeniowych wprowadzono pewną klasyfikację powłok prostokreślnych, dokonując podziału ich na grupy. Powłoki te podzielono na trzy grupy: powłoki rozwijalne, powłoki typu śrubowego i wszystkie pozostałe. Jeśli przez K oznaczymy krzywiznę gaussowską, przez H krzywiznę średnią, a przez b_{ij} współczynniki drugiej formy różniczkowej powierzchni, to poszczególne grupy będą posiadały następujące charakterystyki:

Grupa I - powłoki rozwijalne

$$b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} \neq 0, \quad K = 0, \quad H \neq 0.$$

Grupa II - powłoki typu śrubowego

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = b_{21} \neq 0, \quad K \neq 0, \quad H = 0.$$

Grupa III - powłoki pozostałe

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = b_{21} \neq 0, \quad b_{22} \neq 0, \quad K \neq 0, \quad H \neq 0.$$

Powłoki zaliczane do grupy II - typu śrubowego zostały przez autora rozwiązane w pracy pod tytułem " Praca statyczna powłoki śrubowej obciążonej powierzchniowo" [1] i na tym miejscu nie będą one rozpatrywane. Pozostałe grupy I i III, będące treścią tej pracy, charakteryzują się tym, że ich krzywizny średnie są różne od zera, $H \neq 0$. Okazuje się bowiem, że ze względu na użyty aparat obliczeniowy, zasadniczy podział, w klasie powłok prostokreślnych, wprowadza krzywizna średnia H i tak na przykład, użyte narzędzie matematyczne w tej pracy, opierające się na warunku $H \neq 0$, nie może być przeniesione na powłoki śrubowe dla których $H = 0$ i odwrotnie.

Rozdział pierwszy pracy zawiera opis geometryczny powierzchni prostokreślnych, będących powierzchniami środkowymi powłok zaliczanych do grupy powłok prostokreślnych. Wprowadzona parametryzacja opiera się na rodzinie tworzących prostoliniowych i związanej z nią rodzinie krzywych. Wykorzystanie geometrii krzywych, przez wprowadzenie pojęć krzywizny oraz wektorów jednostkowych stycznych i normalnych głównych do tych linii, pozwoliło na prosty i zwięzły zapis wszystkich wielkości geometrycznych powierzchni prostokreślnych.

Rozdział II dotyczy związków geometrycznych powłoki zdeformowanej z powłoką przed jej deformacją. Dowolną powierzchnię możemy określić z dokładnością do położenia w przestrzeni, podając jej pierwszą i drugą formę różniczkową. Stąd wynika, że dla opisania dowolnej warstwy powłoki odkształconej, traktowanej jako powierzchni, konieczna jest znajomość jej pierwszej i drugiej formy różniczkowej. Rozpatrując deformację warstwy równoległej do powierzchni środkowej powłoki, oparto się na pierwszej zasadzie Kirchhoffa mówiącej, że dla powłok cienkich włókna prostopadłe do powierzchni środkowej powłoki, pozostają prostopadłe do niej również po deformacji, nie zmieniając przy tym swej długości.

Miarą deformacji dowolnej warstwy równoległej jest tensor deformacji γ^*_{ij}, który może być związany z parametrami wyrażającymi deformację powierzchni środkowej powłoki. W pracy tej przez wprowadzenie nowych pojęć, tensora ϱ_{ij} mieszanej deformacji zgięciowej i tensora deformacji zgięciowej ϑ_{ij}, uzyskano prosty związek tensora γ^*_{ij} z tymi wielkościami poprzez zmienną z, mierzoną od powierzchni odniesienia, będącej powierzchnią środkową powłoki, do rozpatrywanej warstwy. Ujęcie takie w znacznej mierze przyczyniło się do stosunkowo prostego zapisu związków fizycznych przedstawionych w rozdziale 3.

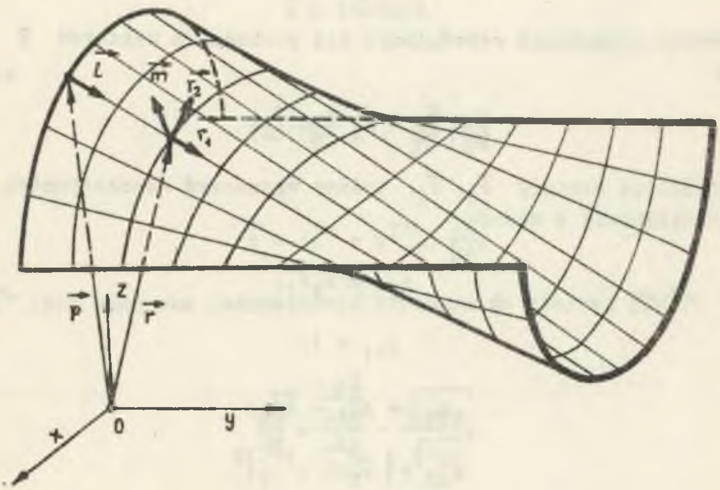
Związki fizyczne opisane w rozdziale 3 wiążą naprężenia z odkształceniami. Dla cienkich powłok związki fizyczne wyprowadzono z uogólnionego prawa Hooke'a, dla dowolnego układu współrzędnych krzywoliniowych. Wprowadzone w rozdziale 2 nowe przedstawienie tensora deformacji γ^*_{ij} umożliwiło, poprzez związki fizyczne, na rozłożenie tensora naprężenia τ^{ij} na składowe sumy, złożonej z wpływu błonowego i wpływu zgięciowego. A to z kolei pozwoliło obliczyć całki określające siły wewnętrzne (przekrojowe). Uzyskane w procesie całkowania wyrażenia tworzą układ dwóch równań wiążących funkcję naprężeń z tensorami napięć i momentów. Rugując z nich funkcję naprężeń charakteryzującą pracę zgięciową powłoki, dojdziemy do związku rozkładającego występujące w powłoce napięcia na sumy złożone z wpływów prac błonowej i zgięciowej. Związek ten ma zasadnicze znaczenie teoretyczne i praktyczne, albowiem dla ośrodków ciągłych podlegających prawu Hooke'a, stosując zasadę superpozycji, możemy poszczególne wpływy rozpatrywać niezależnie. Postępowanie takie w odniesieniu do powłok prostokreślnych, polegające na wprowadzeniu dwóch wymuszonych stanów: błonowego i zgięciowego, pozwala na uzyskanie rozwiązania układu równań różniczkowych, tej klasy powłok, czego ogólnie biorąc, nie da się uzyskać na drodze rachunku bezpośredniego.

W rozdziale 4 podano znany układ równań równowagi w zapisie tensorowym a rozdział 5 przedstawia rozwiązanie ogólnego układu równań powłok prostokreślnych. Rozwiązanie przeprowadzono w oparciu o wymuszone stany: błonowy i zgięciowy, przy założeniu $H \neq 0$, to znaczy rozwiązanie nie obejmuje powłok śrubowych zaliczanych tematycznie do grupy II, dla których $H = 0$.

Wszystkie rozwiązania ogólne zawierają dowolne funkcje niewiadome zmiennych u^1, względnie u^2, zależne od sposobu zamocowania powłoki. Funkcje te mogą być wyznaczone z warunków brzegowych, które dla powłok prostokreślnych będą zadane w przemieszczeniach, względnie w naprężeniach i przemieszczeniach.

Rozwiązanie równań infinitezymalnych przemieszczeń podano w rozdziale 6. Natomiast rozdział 7, końcowy, ilustruje podaną teorię przykładami liczbowymi, przeliczonymi dla powłoki walcowej.

1. OPIS GEOMETRYCZNY



Rys. 1

Geometryczny opis powłoki sprowadza się do opisu jej powierzchni środkowej. W przypadku powłok prostokreślnych ich powierzchnie środkowe prostokreślne są utworzone przez proste, zwane tworzącymi prostoliniowymi. To znaczy, przez każdy punkt powierzchni prostokreślnej przechodzi prosta leżąca całkowicie na niej.

Aby napisać równanie parametryczne powierzchni prostokreślnej, napiszemy równanie krzywej $\vec{p}(u^2)$, przecinającej tworzące prostoliniowe powierzchni i w każdym punkcie tej krzywej weźmiemy wektor jednostkowy $\vec{l}(u^2)$ w kierunku przechodzącej przez ten punkt tworzącej, rys. 1. Wówczas równanie wektorowe powierzchni prostokreślnej przyjmie postać

$$\vec{r} = \vec{p}(u^2) + u^1\vec{l}(u^2), \tag{1.1}$$

u^1, u^2 współrzędne krzywoliniowe na powierzchni,
u^1 określa położenie punktu na tworzącej,
u^2 wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Różniczkując równanie (1.1) względem parametrów u^1, u^2, otrzymamy wektory styczne do powierzchni prostokreślnej, rys. 1

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = \vec{l}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial u^2} + u^1 \frac{\partial \vec{l}}{\partial u^2}. \tag{1.2}$$

Wprowadzając oznaczenia wskaźnikowe dla pochodnych wektorów $\vec{p}$ i $\vec{l}$, napiszemy

$$\vec{r}_2 = \vec{p}_2 + u^1\vec{l}_2.$$

Mając określone wektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ możemy wyznaczyć współczynniki pierwszej formy różniczkowej z wzorów

$$g_{ij} = \vec{r}_i\vec{r}_j, \qquad g_{11} = 1, \qquad g_{12} = g_{21} = \vec{l}\vec{p}_2, \qquad g_{22} = \left|\vec{p}_2 + u^1\vec{l}_2\right|^2, \tag{1.3}$$

bo iloczyn skalarny wektorów $\vec{l}\,\vec{l}_2$, występujący w g_{12} jest równy zeru, ponieważ wektory te są prostopadłe do siebie, $\vec{l}_2$ pochodna wektora jednostkowego $\vec{l}$.
Przy założeniu

$$\vec{r} = \vec{r}\left[u^1, s(u^2)\right], \tag{1.1 }$$

gdzie s jest parametrem łukowym na linii u^2, wielkości (1.2) i (1.3) możemy związać z geometrią krzywej.
Zróżniczkujmy wyrażenie (1.1) względem zmiennej u^2

$$\vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} + u^1\frac{\partial \vec{l}}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial u^2}.$$

Oznaczając przez $\vec{t}$ wektor jednostkowy styczny do linii u^2, napiszemy

$$\vec{r}_2 = \vec{t}\,\frac{\partial s}{\partial u^2} = \sqrt{g_{22}}\,\vec{t}.$$

Porównując oba wyrażenia otrzymamy

$$\vec{t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} + u^1 \frac{\partial \vec{l}}{\partial s}.$$

Ponieważ wektory $\vec{p}$ i $\vec{l}$ są związane z zadaną linią $\vec{p}(u^2)$, która może być opisana parametrem łukowym $\bar{s}$, to funkcję wektorową $\vec{t}$ możemy przedstawić również jako funkcję złożoną

$$\vec{t} = \vec{t}(\bar{s}(s)),$$

a wówczas

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial \bar{s}} + u^1 \frac{\partial \vec{l}}{\partial \bar{s}} \right) \frac{\partial \bar{s}}{\partial s}$$

albo

$$\vec{t} = (\vec{t}^* + u^1 \vec{l}_2^*) \frac{\partial \bar{s}}{\partial s},$$

gdzie $\vec{t}^*$ jest wektorem jednostkowym stycznym do krzywej $\vec{p}(u^2)$. Ponieważ jednak:

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial s} = \frac{\frac{\partial \bar{s}}{\partial u^2}}{\frac{\partial s}{\partial u^2}} = \frac{\sqrt{\bar{g}_{22}}}{\sqrt{g_{22}}},$$

to

$$\vec{t} = (\vec{t}^* + u^1 \vec{l}_2^*) \frac{\sqrt{\bar{g}_{22}}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Czyli wektorowi $\vec{r}_2$ można też nadać postać:

$$\vec{r}_2 = \sqrt{g_{22}}\,\vec{t} = \sqrt{\bar{g}_{22}}\,(\vec{t}^* + u^1 \vec{l}_2^*). \tag{1.2}$$

Temu przedstawieniu wektorów $\vec{r}_i$ przyporządkujemy następujący układ współczynników pierwszej formy różniczkowej:

$$g_{11} = 1,$$

$$g_{12} = g_{21} = \sqrt{g_{22}}\,\vec{l}\vec{t} = \sqrt{\bar{g}_{22}}\,\vec{l}\vec{t}^*, \tag{1.3}$$

$$g_{22} = \bar{g}_{22} \left| \vec{t}^* + u^1 \vec{l}_2^* \right|^2.$$

Wyróżnik g pierwszej formy różniczkowej wyniesie:

$$g = g_{22} \left[1 - (\vec{l}\vec{t})^2 \right] \tag{1.4}$$

albo

$$g = g_{22} - \bar{g}_{22}(\vec{l}\vec{t}^*)^2. \qquad (1.4)$$

Oznaczmy przez $\vec{m}$ wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni. Wektor ten jest prostopadły do wektorów $\vec{l}$, $\vec{t}$, a więc może być wyrażony iloczynem wektorowym:

$$\vec{m} = \frac{\vec{l} \times \vec{t}}{|\vec{l} \times \vec{t}|}. \qquad (1.5)$$

Drugie pochodne wektora $\vec{r}$ będą równe

$$\vec{r}_{11} = 0,$$
$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21} = \vec{l}_2, \qquad (1.6)$$
$$\vec{r}_{22} = \vec{p}_{22} + u^1\vec{l}_{22}.$$

Albo różniczkując wyrażenie (1.2′) będzie

$$\vec{r}_{11} = 0,$$
$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21} = \sqrt{\bar{g}_{22}}\vec{l}^*_2, \qquad (1.6)$$
$$\vec{r}_{22} = \frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial u^2}\vec{t} + g_{22}\varkappa\vec{n},$$

$\varkappa$ – jest krzywizną linii u^2,
$\vec{n}$ – wektor normalnej głównej krzywej u^2.

Współczynniki drugiej formy różniczkowej b_{ij} wyznaczymy z wzorów

$$b_{ij} = \vec{r}_{ij}\vec{m},$$
$$b_{11} = 0,$$
$$b_{12} = b_{21} = \frac{\vec{l}_2\vec{l}\,\vec{t}}{|\vec{l} \times \vec{t}|} = \vec{l}_2\vec{m}, \qquad (1.7)$$
$$b_{22} = \frac{g_{22}\varkappa\vec{n}\,\vec{l}\,\vec{t}}{|\vec{l} \times \vec{t}|} = g_{22}\varkappa\vec{n}\vec{m}.$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju dla powierzchni prostokreślnych w parametryzacji naturalnej przyjmą postać:

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \quad \Gamma_{11}^{2} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \frac{1}{2} g^{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = -\frac{g_{12}}{2g} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{2}\left[g^{11} \left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + g^{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right] = \tag{1.8}$$

$$= -\frac{g_{22}}{2g}\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - 2\sqrt{g_{22}}\, \frac{\partial \vec{l}\, \vec{t}}{\partial u^2}\right],$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}\left[g^{21} \left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2g}\left[g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} + \frac{\partial g}{\partial u^2}\right].$$

Dla ortogonalnego układu współrzędnych symbole Christoffela (1.8) znacznie się uproszczą:

$$\Gamma_{11}^{1} = 0, \qquad \Gamma_{11}^{2} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = 0, \qquad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^1}, \tag{1.8 }$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^1}, \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^2}.$$

<u>Klasyfikacja powierzchni prostokreślnych</u>

Powierzchnie prostokreślne ze względów konstrukcyjnych możemy podzielić na dwie grupy. Do pierwszej zaliczymy powierzchnie rozwijalne, są one szczególnym przypadkiem powierzchni prostokreślnych. Natomiast do grupy drugiej zaliczymy wszystkie pozostałe. Względy rachunkowe dyktują nam podział powierzchni na trzy grupy, a mianowicie: powierzchnie rozwijalne, powierzchnie typu śrubowego i wszystkie pozostałe. Należy jednak podkreślić, że zarówno powierzchnie rozwijalne, jak i powierzchnie typu śrubowego są szczególnymi przypadkami powierzchni prostokreślnych.

Grupa I - powierzchnie rozwijalne

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= 0, \\
b_{12} = b_{21} &= 0, \\
b_{22} &= g_{22} \varkappa \vec{n}\,\vec{m}, \\
K &= 0, \\
H &\neq 0,
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

gdzie K jest krzywizną gaussowską, a H krzywizną średnią.

Grupa II - powierzchnie typu śrubowego

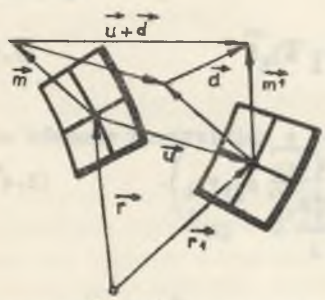
$$
\begin{aligned}
b_{11} &= 0, \\
b_{12} = b_{21} &= \vec{l}_2\,\vec{m}, \\
b_{22} &= 0, \\
K &\neq 0, \\
H &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Grupa III - powierzchnie pozostałe

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= 0, \\
b_{12} = b_{21} &= \vec{l}_2\,\vec{m}, \\
b_{22} &= g_{22} \varkappa \vec{n}\,\vec{m}, \\
K &\neq 0, \\
H &\neq 0.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

2. ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE

Powierzchnię możemy określić z dokładnością do położenia w przestrzeni, podając jej pierwszą i drugą formę różniczkową. Stąd wynika, że dla określenia dowolnej powierzchni zdeformowanej konieczna jest znajomość jej pierwszej i drugiej formy różniczkowej.



Rys. 2

Niech powierzchnia środkowa powłoki $\vec{r} = \vec{r}(u^1,u^2)$ po deformacji przejdzie w powierzchnię $\vec{r}' = \vec{r}'(u^1,u^2)$, rys. 2. W ujęciu wektorowym powierzchnię odkształconą opiszemy wzorem:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}. \tag{2.1}$$

Wektor $\vec{u}$ nazywamy wektorem przemieszczenia, jest on funkcją punktów powierzchni środkowej $\vec{u} = \vec{u}(u^1,u^2)$.

2.1. Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej powierzchni odkształconej

Współczynniki pierwszej formy różniczkowej powierzchni odkształconej g'_{ij}, wyznaczymy z wzoru

$$g'_{ij} = \vec{r}_i{}' \vec{r}_j{}',$$

gdzie $\vec{r}_i{}'$ oznacza pochodną funkcji $\vec{r}'(u^1,u^2)$ względem zmiennej u^i. Pochodna $\vec{r}_i{}'$ obliczona z (2.1) wyniesie:

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \vec{u}_i, \tag{2.2}$$

czyli

$$g'_{ij} = \vec{r}_i\vec{r}_j + \vec{r}_i\vec{u}_j + \vec{r}_j\vec{u}_i + \vec{u}_i\vec{u}_j.$$

Podstawiając $\vec{r}_i\vec{r}_j = g_{ij}$ oraz pomijając iloczyny $\vec{u}_i\vec{u}_j$ jako wielkości małe wyższego rzędu otrzymamy:

$$g'_{ij} = g_{ij} + \vec{r}_i\vec{u}_j + \vec{r}_j\vec{u}_i. \tag{2.3}$$

Wprowadzając pojęcie tensora deformacji γ_{ij}, określonego wyrażeniem [17]

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (g'_{ij} - g_{ij}), \tag{2.4}$$

napiszemy

$$g'_{ij} = g_{ij} + 2\gamma_{ij}. \tag{2.3'}$$

Dla małych odkształceń

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{r}_i \vec{u}_j + \vec{r}_j \vec{u}_i). \tag{2.4'}$$

Składowe tensora deformacji γ_{ij} możemy związać z fizycznymi składowymi stanu odkształcenia ε_{ij}.

Niech

$$\vec{u}_i = \sqrt{g_{ii}} \left(\sum_k \varepsilon_{ik} \frac{\vec{r}_k}{\sqrt{g_{kk}}} + \delta_i \vec{m} \right), \tag{2.5}$$

to wtedy

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{kk}}} g_{ik} \varepsilon_{jk} + \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{kk}}} g_{jk} \varepsilon_{ik} \right). \tag{2.4''}$$

Dla układu ortogonalnego będzie

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \sqrt{g_{ii} g_{jj}} (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}). \tag{2.4'''}$$

Związki (2.5), (2.4″) i (2.4‴) w dalszej części pracy nie będą wykorzystane.

Jeśli przez $\vec{m}'$ oznaczymy wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni środkowej powłoki po odkształceniu, a przez $\vec{d}$ wektor charakteryzujący wpływ zginania związany zależnością

$$\vec{m}' = \vec{m} + \vec{d}, \tag{2.6}$$

patrz rys. 2, przy czym $|\vec{m} + \vec{d}| = 1$, bo $|\vec{m}'| = 1$, to współczynniki drugiej formy różniczkowej powierzchni odkształconej b'_{ij} wyznaczymy z wzoru

$$b'_{ij} = - \vec{r}'_i \vec{m}'_j,$$

po podstawieniu odpowiednich pochodnych obliczonych z wyrażeń (2.2) i (2.6)

$$b'_{ij} = b_{ij} - \vec{m}_j \vec{u}_i - \vec{r}_i \vec{d}_j - \vec{u}_i \vec{d}_j. \tag{2.7}$$

Wprowadzając pojęcie tensora mieszanej deformacji zgięciowej ϱ_{ij}, którego składowe są opisane współczynnikami drugich form różniczkowych wzorem

$$\varrho_{ij} = \frac{1}{2}\left(b'_{ij} - b_{ij}\right), \tag{2.8}$$

możemy wyrażeniu (2.7) nadać postać

$$b'_{ij} = b_{ij} + 2\varrho_{ij}. \tag{2.7'}$$

Dla małych odkształceń można przyjąć $\vec{u}_i\,\vec{d}_j \to 0$, a wówczas:

$$\varrho_{ij} = -\frac{1}{2}\left(\vec{m}_j\vec{u}_i + \vec{r}_i\vec{d}_j\right). \tag{2.8}$$

Załóżmy:

$$\vec{d}_j = -\sqrt{g_{jj}}\left(\sum_k \omega_{jk}\frac{\vec{r}_k}{\sqrt{g_{kk}}} + \xi_j\,\vec{m}\right), \tag{2.9}$$

to wówczas korzystając z (2.5), napiszemy

$$\varrho_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k\left(\frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{kk}}}\,b_{jk}\,\varepsilon_{ik} + \frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{kk}}}\,g_{ik}\,\omega_{jk}\right). \tag{2.8''}$$

Wyrażenie (2.8″) jest związkiem tensora ϱ_{ij} z fizycznymi składowymi stanu odkształcenia ε_{ij}, ω_{ij}.

2.2. Zwiazek składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia

Stosująo rachunek tensorowy opiszemy wektor przemieszczenia $\vec{u}$ w bazie kowariantnej $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{m}$,

$$\vec{u} = w^k\vec{r}_k + w^3\vec{m}. \tag{2.10}$$

W wyrażeniu tym w^1, w^2, w^3 są kontrawariantnymi składowymi wektora przemieszczenia $\vec{u}$.
Zróżniczkujmy (2.10) względem zmiennej u^j:

$$\vec{u}_j = \frac{\partial w^k}{\partial u^j}\vec{r}_k + w^k\vec{r}_{kj} + \frac{\partial w^3}{\partial u^j}\vec{m} + w^3\vec{m}_j, \tag{2.11}$$

a następnie utwórzmy iloczyny skalarne: $\vec{r}_i\vec{u}_j$ i $\vec{m}\,\vec{u}_j$.

$$\vec{r}_i\vec{u}_j = w^k\Big|_j g_{ik} - w^3 b_{ij}, \tag{2.12}$$

$$\vec{m}\,\vec{u}_j = w^k b_{kj} + w^3_{,j},$$

gdzie pionowa kreska "|" oznacza pochodną kowariantną, a przecinek "," - pochodną zwykłą. Podstawiając (2,12) do wyrażenia (2.4′) otrzymamy związek tensora odkształcenia z wektorem przemieszczenia

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(w^k\big|_j g_{ik} + w^k\big|_i g_{jk}\right) - w^3 b_{ij}. \tag{2.13}$$

Porównanie wyrażeń (2.5) z (2.11) daje:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}}\left(w^i\big|_j - w^3 b^i_j\right),$$

$$\delta_i = \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\left(w^k b_{ki} + w^3_{,i}\right). \tag{2.14}$$

Uwaga: po i, j w (2.14) nie sumować.
Wyrażenia (2.14) są związkami fizycznych składowych odkształcenia z wektorem przemieszczenia.
Przejdźmy teraz do opisania związku tensora mieszanej deformacji zgięciowej z przemieszczeniami $\vec{u}$ i $\vec{d}$.
Opiszemy wektor $\vec{d}$ w bazie $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{m}$:

$$\vec{d} = -\delta^k \vec{r}_k - \delta^3 \vec{m}, \tag{2.15}$$

a następnie zróżniczkujmy (2.15) względem zmiennej u^j:

$$\vec{d}_j = -\left(\delta^k\big|_j - \delta^3 b^k_j\right)\vec{r}_k - \left(\delta^3_{,j} + \delta^k b_{kj}\right)\vec{m}. \tag{2.16}$$

Odpowiednie iloczyny będą równe

$$\vec{r}_i\vec{d}_j = -\delta^k\big|_j g_{ik} + \delta^3 b_{ij},$$

$$\vec{m}\,\vec{d}_j = -\delta^3_{,j} - \delta^k b_{kj}. \tag{2.17}$$

Iloczyn $\vec{u}_i\vec{m}_j$ obliczymy z wyrażeń (2.11) i (2.12)

$$\vec{u}_i\vec{m}_j = -\vec{u}_i b^k_j \vec{r}_k = -\left(w^l\big|_i g_{kl} b^k_j - w^3 b_{ik} b^k_j\right) = -w^k\big|_i b_{jk} + w^3 b_{ik} b^k_j. \tag{2.18}$$

Podstawiając (2.17) i (2.18) do (2.8′) otrzymamy

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\left(w^k\big|_i b_{jk} + \delta^k\big|_j g_{ik}\right) - \frac{1}{2}\left(w^3 b_{ik} b^k_j + \delta^3 b_{ij}\right). \tag{2.19}$$

Natomiast porównanie (2.9) z (2.16) daje związki fizycznych składowych odkształcenia zgięciowego z wektorami przemieszczeń $\vec{u}$, $\vec{d}$.

$$\omega_{ji} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}}\left(\delta^i\big|_j - \delta^3 b^i_j\right),$$

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\left(\delta^3_{,i} + \delta^k b_{ki}\right), \tag{2.20}$$

po i nie sumować.

2.3. Opis geometryczny warstwy równoległej do powierzchni środkowej powłoki

Warstwą równoległą będziemy nazywali powierzchnię, której wszystkie punkty znajdują się w odległości z od powierzchni środkowej powłoki. Warstwę tę opiszemy równaniem wektorowym,

$$\vec{R} = \vec{r} + z\,\vec{m}. \tag{2.21}$$

Współczynniki pierwszej formy różniczkowej warstwy równoległej oznaczymy przez G_{ij}, są one określone wzorem [17]:

$$G_{ij} = \vec{R}_i\,\vec{R}_j.$$

Korzystając ze wzorów podawanych w podręcznikach dotyczących teorii powłok na przykład [9], napiszemy:

$$G_{ij} = g_{ij} - 2zb_{ij} + z^2 b_{ik} b^k_j. \tag{2.22}$$

Odpowiednie przekształcenia umożliwiają też zapis:

$$G_{ij} = g_{ij}\,(1-Kz^2) - 2b_{ij}\,(1-Hz)z, \tag{2.22'}$$

gdzie $K = \frac{b}{g}$ jest krzywizną gaussowską, a $H = \frac{1}{2}\, g^{kl} b_{kl}$ krzywizną średnią. Składowe kontrawariantne tensora G^{ij} można określić wzorem:

$$G^{ij} = \left[g^{ij}\,(1-Kz^2) - 2Kb^{ij}\,(1-Hz)z\right]\frac{g}{G}. \tag{2.23}$$

Występujący w (2.23) kontrawariantny tensor $\bar{b}^{ij}$ jest związany w następujący sposób z b_{ij}

$$\bar{b}^{11} = \frac{b_{22}}{b}, \quad \bar{b}^{12} = \bar{b}^{21} = -\frac{b_{12}}{b}, \quad \bar{b}^{22} = \frac{b_{11}}{b},$$

gdzie $b = |b_{ij}|$, jest wyróżnikiem drugiej formy różniczkowej. Wyróżnikowi G formy kwadratowej G_{ij} można nadać postać [9],

$$G = g(1 - 2Hz + Kz^2)^2. \tag{2.24}$$

Wersja uproszczona

Dla powłok dostatecznie cienkich pomijając w wyrażeniach (2.22), (2.23) i (2.24) iloczyny, w których występuje z^2 jako wielkości małe rzędu wyższego napiszemy

$$G_{ij} = g_{ij} - 2zb_{ij},$$
$$G^{ij} = (g^{ij} - 2Kz\bar{b}^{ij})\frac{g}{G}, \tag{2.25}$$
$$G = (1 - 2Hz)^2 g.$$

W dalszych rozważaniach potrzebny będzie iloczyn typu $G^{ij}G^{kl}$, który dla wersji uproszczonej wyniesie

$$G^{ij}G^{kl} = \left[g^{ij}g^{kl} - 2Kz(g^{ij}\bar{b}^{kl} + g^{kl}\bar{b}^{ij})\right]\left(\frac{g}{G}\right)^2. \tag{2.26}$$

2.4. Tensor odkształcenia dowolnej warstwy równoległej do powierzchni środkowej powłoki

Rozpatrując deformację warstwy równoległej, oprzemy się na pierwszej zasadzie Kirchhoffa, która mówi, że dla powłoki cienkiej można przyjąć, że włókna prostopadłe do powierzchni środkowej powłoki, pozostają prostopadłe do niej również po deformacji, nie zmieniając przy tym swojej długości.

Miarą deformacji warstwy równoległej niech będzie wektor $\vec{U}$, określony równaniem [13]

$$\vec{U} = \vec{u} + z\vec{d}. \tag{2.27}$$

Zróżniczkujmy równanie (2.27) względem zmiennej u^i

$$\vec{U}_i = \vec{u}_i + z\vec{d}_i, \tag{2.28}$$

a następnie obliczmy współczynniki G'_{ij} pierwszej formy różniczkowej warstwy równoległej odkształconej.
Równanie wektorowe warstwy odkształconej ma postać

$$\vec{R}' = \vec{R} + \vec{U},$$

czyli

$$G'_{ij} = \vec{R}'_i\vec{R}'_j = (\vec{R}_i+\vec{U}_i)(\vec{R}_j+\vec{U}_j) = \vec{R}_i\vec{R}_j + \vec{R}_i\vec{U}_j + \vec{R}_j\vec{U}_i + \vec{U}_i\vec{U}_j.$$

Pomijając iloczyn $\vec{U}_i\vec{U}_j$ jako wielkość małą rzędu drugiego, napiszemy po podstawieniu (2.28)

$$G'_{ij} = \vec{R}_i\vec{R}_j + \vec{r}_i\vec{u}_j + \vec{r}_j\vec{u}_i + z(\vec{r}_i\vec{d}_j + \vec{m}_i\vec{u}_j + \vec{r}_j\vec{d}_i + \vec{m}_j\vec{u}_i) + z^2(\vec{m}_i\vec{d}_j + \vec{m}_j\vec{d}_i).$$

Zastępując w wyrażeniu tym odpowiednie sumy iloczynów tensorami (2.4$'$) i (2.8$'$), napiszemy

$$G'_{ij} = G_{ij} + 2\gamma_{ij} - 2(\varrho_{ij} + \varrho_{ji})z + (\vec{m}_i\vec{d}_j + \vec{m}_j\vec{d}_i)z^2.$$

Wprowadzając pojęcie tensora deformacji zgięciowej ϑ_{ij}, którego składowe będą opisane wzorem:

$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{m}_i\vec{d}_j + \vec{m}_j\vec{d}_i) \tag{2.29}$$

otrzymamy

$$G'_{ij} = G_{ij} + 2\gamma_{ij} - 4\varrho_{ij}z + 2\vartheta_{ij}z^2. \tag{2.30}$$

Tensor odkształcenia dowolnej równoległej warstwy, wyrażony różnicą

$$\gamma^*_{ij} = \frac{1}{2}(G'_{ij} - G_{ij}),$$

będzie więc opisany związkiem

$$\gamma^*_{ij} = \gamma_{ij} - 2\varrho_{ij}z + \vartheta_{ij}z^2. \tag{2.31}$$

Obecnie określimy iloczyn $\vec{m}_i\vec{d}_j$ w oparciu o rozkład $\vec{d}_j$ w bazie $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{m}$, wykorzystując do tego celu wyrażenie (2.16)

$$\vec{m}_i\vec{d}_j = -(\delta^k|_j - \delta^3 b^k_j)\vec{r}_k\vec{m}_i = \delta^k|_j b_{ik} - \delta^3 b_{ik}b^k_j. \tag{2.32}$$

Następnie podstawiając (2.32) do wyrażenia (2.29) otrzymamy związek tensora deformacji zgięciowej ze składowymi przemieszczenia

$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta^{k}|_{j} b_{ik} + \delta^{k}|_{i} b_{jk}\right) - \frac{1}{2}\delta^{3}\left(b_{ik} b^{k}_{j} + b_{jk} b^{k}_{i}\right). \qquad (2.33)$$

3. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Związki fizyczne ustalają wzajemne powiązanie odkształceń z naprężeniami w oparciu o prawo Hooke'a. W literaturze technicznej dotyczącej powłok, związki te podawane są z reguły dla krzywiznowego układu współrzędnych krzywoliniowych. Niewątpliwe korzyści, jakie daje układ krzywiznowy, to ortogonalność układu współrzędnych nie tylko na powierzchni środkowej powłoki, ale również w dowolnej warstwie równoległej. Przeniesienie natomiast właściwości układu krzywiznowego na dowolny układ ortogonalny, odniesiony do powierzchni środkowej powłoki, nie zawsze daje poprawne wyniki. Układ krzywiznowy aczkolwiek korzystny dla związków fizycznych,niekoniecznie musi być układem najwłaściwszym dla opisu innych wielkości i zależności występujących w powłoce. Dla powłok prostokreślnych układem właściwym będzie układ współrzędnych oparty na rodzinie tworzących prostoliniowych, ponieważ daje on najprostszą parametryzację tej grupy powłok.

3.1. Naprężenia i odkształcenia

Dla cienkich powłok związki między naprężeniami i odkształceniami otrzymujemy z uogólnionego prawa Hooke'a. Związki te w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych wyrażają się wzorem [17], [27]

$$\tau^{ij} = \left[\lambda^* G^{ij} G^{mn} + \mu \left(G^{im} G^{jn} + G^{in} G^{jn}\right)\right] \gamma^*_{mn} \tag{3.1}$$

albo

$$\tau^{ij} = \lambda^* G^{ij} G^{mn} \gamma^*_{mn} + 2\mu \gamma^{*ij}, \tag{3.1'}$$

gdzie τ^{ij} jest kontrawariantnym tensorem naprężenia, a γ^{*ij} jest kontrawariantnym tensorem podniesionym w bazie G^{ij}.
Parametr λ^* jest związany z stałymi sprężystości, współczynnikami Lame'go λ, μ związkiem

$$\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}. \tag{3.2}$$

Związek (3.2) wynika z założenia upraszczającego przyjmowanego w liniowej teorii powłok [9], zakładającego, że naprężenia w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej powłoki są tak małe, że mogą być pominięte (założenie Kirchhoffa). Podstawiając do (3.1) wyrażenie (2.26) otrzymamy

$$\tau^{ij} = \Big\{\lambda^* \Big[g^{ij}g^{mn} - 2Kz\,(g^{ij}\bar{b}^{mn} + g^{mn}\bar{b}^{ij})\Big] + \mu \Big[g^{im}g^{jn} +$$

$$+ g^{in}g^{jm} - 2Kz\,(g^{im}\bar{b}^{jn} + g^{jn}\bar{b}^{im} + g^{in}\bar{b}^{jm} + g^{jm}\bar{b}^{in})\Big]\Big\}\left(\frac{g}{G}\right)^2 \gamma^*_{mn},$$

albo po uporządkowaniu będzie

$$\tau^{ij} = \Big\{\Big[\lambda^* g^{ij}g^{mn} + \mu\,(g^{im}g^{jn} + g^{in}g^{jm})\Big] - 2Kz\Big[\lambda^*\,(g^{ij}\bar{b}^{mn} +$$

$$+ g^{mn}\bar{b}^{ij}) + \mu\,(g^{im}\bar{b}^{jn} + g^{jn}\bar{b}^{im} + g^{in}\bar{b}^{jm} + g^{jm}\bar{b}^{in})\Big]\Big\}\left(\frac{g}{G}\right)^2 \gamma^*_{mn}.$$

Mnożąc wyrażenie zawarte w nawiasie klamrowym $\{\ldots\}$ przez γ^*_{mn}, wzięte z (2.31) oraz odrzucając iloczyny zawierające z^2 i wyższe potęgi z, jako wielkości małe rzędu drugiego napiszemy

$$\tau^{ij} = \Big\{\Big[\lambda^* g^{ij}g^{mn} + \mu\,(g^{in}g^{jm} + g^{in}g^{jm})\Big]\gamma_{mn} - 2z\Big[(\lambda^* g^{ij}g^{mn} +$$

$$+ \mu\,(g^{im}g^{jn} + g^{in}g^{jm}))\varrho_{mn} + K(\lambda^*(g^{ij}\bar{b}^{mn} + g^{mn}\bar{b}^{ij}) + \tag{3.3}$$

$$+ \mu\,(g^{im}\bar{b}^{jn} + g^{jn}\bar{b}^{im} + g^{in}\bar{b}^{jm} + g^{jm}\bar{b}^{in}))\gamma_{mn}\Big]\Big\}\left(\frac{g}{G}\right)^2.$$

Wprowadzając pojęcia tensorów, naprężenia błonowego $\bar{\tau}^{ij}$ i naprężenia zgięciowego $\hat{\tau}^{ij}$, określonych wyrażeniami:

$$\bar{\tau}^{ij} = \lambda^* g^{ij}g^{mn}\cdot\gamma_{mn} + 2\mu\gamma^{ij}, \tag{3.4}$$

$$\hat{\tau}^{ij} = \lambda^* g^{ij}g^{mn}\varrho_{mn} + 2\mu\varrho^{ij} + K\Big[\lambda^*(g^{ij}\bar{b}^{mn} + g^{mn}\bar{b}^{ij})\gamma_{mn} +$$

$$+ 2\mu\,(\bar{b}^{jn}\gamma^{i}_{n} + \bar{b}^{in}\gamma^{j}_{n})\Big],$$

będziemy mogli związkowi (3.3) nadać postać

$$\tau^{ij} = (\bar{\tau}^{ij} - 2z\hat{\tau}^{ij})\left(\frac{g}{G}\right)^2. \tag{3.5}$$

3.2. Siły wewnętrzne

Wyznaczenie sił przekrojowych (napięć i momentów) przeprowadzimy w oparciu o wzory podawane w literaturze [17], [9].

$$N^{ij} = \int_{-h}^{h} \sqrt{\frac{G}{g}} (\delta_k^j - zb_k^j)\tau^{ik} dz,$$

$$M^{ij} = \int_{-h}^{h} \sqrt{\frac{G}{g}} (\delta_k^j - zb_k^j)\tau^{ik} z dz. \tag{3.6}$$

N^{ij} - oznaczają kontrawariantne tensory napięć,
M^{ij} - oznaczają kontrawariantne tensory momentów.

Podstawienie (3.5) do pierwszego wyrażenia (3.6) daje

$$N^{ij} = \int_{-h}^{h} \left(\frac{g}{2}\right)^{3/2} \left[\bar{\tau}^{ij} - z(2\hat{\tau}^{ij} + b_k^j \bar{\tau}^{ik}) + 2z^2 b_k^j \hat{\tau}^{ik}\right] dz.$$

Dla wersji uproszczonej przyjmując za G wielkość (2.25) oraz pomijając w nawiasie klamrowym iloczyn zawierający z^2 jako wielkość małą w porównaniu z pierwszym wyrazem tego nawiasu, otrzymamy:

$$N^{ij} = \int_{-h}^{h} \frac{1}{(1-2Hz)^3} \left[\bar{\tau}^{ij} - z(2\hat{\tau}^{ij} + b_k^j \bar{\tau}^{ik})\right] dz. \tag{3.6'}$$

Wprowadzając dla sumy w nawiasie wewnętrznym oznaczenie

$$F^{ij} = 2\hat{\tau}^{ij} + b_k^j \bar{\tau}^{ik},$$

napiszemy

$$N^{ij} = \int_{-h}^{h} \frac{1}{(1-2Hz)^3} \left[\bar{\tau}^{ij} - zF^{ij}\right] dz,$$

oraz (3.6′)

$$M^{ij} = \int_{-h}^{h} \frac{z}{(1-2Hz)^3} \left[\bar{\tau}^{ij} - zF^{ij}\right] dz.$$

W wyrażeniach (3.6′) występują całki typu

$$J_n = \int_{-h}^{h} \frac{z^n}{(1-2Hz)^3} dz.$$

Obliczmy je kolejno

$$J_o = \int_{-h}^{h} \frac{dz}{(1-2Hz)^3} = \frac{2h}{\left[1 - (2hH)^2\right]^2},$$

$$J_1 = \int_{-h}^{h} \frac{zdz}{(1-2Hz)^3} = \frac{4h^3H}{\left[1 - (2hH)^2\right]^2}, \tag{3.7}$$

$$J_2 = \int_{-h}^{h} \frac{z^2dz}{(1-2Hz)^3} = \frac{1}{(2H)^3}\left[\ln(1-2Hz) + \frac{2}{1-2Hz} - \frac{1}{2(1-2Hz)^2}\right]_{-h}^{h}.$$

Pomijając wielkości małe rzędu drugiego i wyższe w rozwinięciu szeregowym funkcji ln otrzymamy

$$J_2 \approx \frac{2}{3} h^3.$$

Wprowadzając podobne uproszczenia również do całek J_o i J_1, przy założeniu $2hH \ll 1$ napiszemy

$$J_o \approx 2h,$$

$$J_1 \approx 4h^3H, \tag{3.7'}$$

$$J_2 \approx \frac{2}{3} h^3.$$

Scałkowane wyrażenia (3.6′) będą równe:

$$N^{ij} = J_o\bar{\tau}^{ij} - J_1F^{ij},$$

$$M^{ij} = J_1\bar{\tau}^{ij} - J_2F^{ij}. \tag{3.6''}$$

Z równań (3.6″) wyrugujemy funkcję F^{ij}, to wówczas dojdziemy do związku

$$N^{ij} = \left[J_o - \frac{(J_1)^2}{J_2}\right]\bar{\tau}^{ij} + \frac{J_1}{J_2} M^{ij}. \tag{3.8}$$

Podstawiając następnie do (3.8) wartości całek (3.7) napiszemy:

$$N^{ij} = 2h\left[1-3(2hH)^2\right]\bar{\tau}^{ij} + 6HM^{ij}$$

albo pomijając w nawiasie wielkość małą rzędu drugiego przyjmiemy:

$$N^{ij} = 2h\bar{\tau}^{ij} + 6HM^{ij}. \qquad (3.8')$$

Ponieważ 2h jest grubością powłoki, to iloczyn $2h\bar{\tau}^{ij}$ będzie kontrawariantnym tensorem siły błonowej.
Oznaczmy tensor ten przez $\bar{N}^{ij}$, a wówczas

$$\bar{N}^{ij} = 2h\bar{\tau}^{ij} \qquad (3.9)$$

podstawiony do (3.8′) daje:

$$N^{ij} = \bar{N}^{ij} + 6HM^{ij}. \qquad (3.10)$$

Oznaczając następnie wpływ zgięcia tensorem

$$\hat{N}^{ij} = 6HM^{ij}, \qquad (3.11)$$

możemy równości (3.10) nadać postać:

$$N^{ij} = \bar{N}^{ij} + \hat{N}^{ij}. \qquad (3.12)$$

Tak więc siły przekrojowe (napięcia) są sumami złożonymi z wpływów prac: błonowej $\bar{N}^{ij}$ i zgięciowej $\hat{N}^{ij}$. Dla ośrodków ciągłych, podlegających prawu Hooke'a, możemy stosować zasadę superpozycji, czyli teoretycznie istnieją takie funkcje obciążeń, które będą realizowały poszczególne stany niezależnie. To znaczy, dobierając stosowane obciążenie, które będziemy nazywali obciążeniem wymuszającym, wywołamy pracę powłoki tylko w jednym określonym stanie, błonowym względnie zgięciowym. Należy podkreślić, że funkcja obciążeń wymuszająca nam określony stan, błonowy względnie zgięciowy, jest ściśle związana z pewnym zadanym stanem przemieszczeń. Realizując bowiem $M^{ij} = 0$, lub $\bar{N}^{ij} = 0$ wprowadzamy do naszego ośrodka ciągłego, jakim jest powłoka, pewne dodatkowe więzy, usztywniające rozpatrywany model. Wpływ nałożonych wiązów usztywniających na rozpatrywany model jest całkowicie skompensowany przez odpowiednio dobraną funkcję obciążeń wmuszających i nie przekazuje się na pracę stanu drugiego w przypadku rozbicia obciążenia wyjściowego na dwa stany składowe. Ewentualne konsekwencje usztywnienia mogą wystąpić przy realizacji stanu błonowego w postaci dodatkowych wpływów brzegowych, nie wynikających z warunków podparcia a zapewniających taką pracę. W takim przypadku, dodatkowe wpływy brzegowe należy traktować jako obciążenia brzegowe, które następnie, muszą być zdjęte stanem zgięciowym przy rozpatrywaniu warunków brzegowych.

Wprowadzony w oparciu o prawo Hooke'a podział pracy powłoki na dwa niezależne stany, umożliwia rozwiązanie ogólnych różniczkowych równań dla poszczególnych stanów, a tym samym daje ogólne rozwiązanie problemu.

4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Ogólny układ równań równowagi dla powłok w zapisie tensorowym napiszemy w oparciu o pracę [17]:

$$N^{ij}\big|_i = Q^i b_j^j + P^j = 0,$$

$$N^{ij} b_{ij} + Q^j\big|_j + P^3 = 0, \tag{4.1}$$

$$M^{ij}\big|_i - Q^j = 0.$$

Wielkości Q^i oznaczają kontrawariantne tensory sił poprzecznych, a P^j, P^3 kontrawariantne tensory obciążenia. Jeśli obciążenie zewnętrzne oznaczymy wektorem $\vec{P}$, to

$$\vec{P} = P^i \vec{r}_i + P^3 \vec{m}. \tag{4.2}$$

Dla obliczeń numerycznych, przejście ze współrzędnych tensorowych na współrzędne fizyczne, to znaczy odniesione do bazy jednostkowej, powierzchni środkowej powłoki, wykonamy następującymi wzorami:

$$N^{\urcorner}_{ij} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}}\, N^{ij}, \qquad Q^{\urcorner}_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\, Q^i,$$

$$M^{\urcorner}_{i1} = -\sqrt{\frac{g g^{11}}{g^{ii}}}\, M^{i2}, \qquad M^{\urcorner}_{i2} = \sqrt{\frac{g g^{22}}{g^{ii}}}\, M^{i1}, \tag{4.3}$$

$$P^{\urcorner}_i = \sqrt{g_{ii}}\, P^i, \qquad P^{\urcorner}_3 = P^3.$$

Uwaga: po i, j nie sumować.
Symbol "┐" oznacza współrzędną fizyczną.

5. ROZWIĄZANIE OGÓLNEGO UKŁADU ROWNAŃ

Rozwiązanie ogólnego układu równań teorii powłok w przypadku powłok prostokreślnych, dla których $H \neq 0$ przeprowadzimy w oparciu o wymuszone stany: błonowy i zgięciowy.

Pojęcie stanu wymuszonego wiąże się z wprowadzeniem funkcji obciążeń, wymuszającej powstanie określonego stanu przemieszczeń. Założenie takie jest słuszne dla liniowej teorii powłok przy zachowaniu ważności prawa Hooke'a w odniesieniu do rozpatrywanego ośrodka materialnego powłoki. Stosując zasadę superpozycji dla ciał sprężystych możemy dane obciążenie zewnętrzne $\vec{P}$ rozbić na dwa obciążenia składowe $\vec{\bar{P}}$ i $\vec{\hat{P}}$ dające nam rozwiązania częściowe. Podziałów obciążenia $\vec{P}$ na składowe $\vec{\bar{P}}$ i $\vec{\hat{P}}$ istnieje nieskończenie wiele, nas jednak interesuje taki podział, który by powodował powstanie określonych stanów, nazwanych błonowym i zgięciowym, a opisanych wyrażeniem (3.12). W praktycznym postępowaniu wystarczy określić jedną z funkcji obciążeń wymuszających $\vec{\bar{P}}$ lub $\vec{\hat{P}}$, ponieważ druga funkcja będzie uzupełnieniem zadanych obciążeń wyjściowych.

Odpowiednie funkcje obciążeń wymuszających oznaczymy w zapisie tensorowym przez $\bar{P}^i$ dla stanu błonowego i $\hat{P}^i$ dla stanu zgięciowego, przy czym musi zachodzić równość

$$P^i = \bar{P}^i + \hat{P}^i, \tag{5.1}$$

gdzie P^i kontrawariantne tensory obciążenia danego.

5.1. Stan błonowy

Dla stanu błonowego:

$$\begin{aligned} P^i &= \bar{P}^i, \\ N^{ij} &= \bar{N}^{ij}, \\ M^{ij} &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Warunek $M^{ij} = 0$, charakteryzujący stan błonowy, uwzględniony w równaniach równowagi (4.1) daje

$$Q^i = 0. \tag{5.3}$$

Układ równań równowagi (4.1), dla stanu błonowego, po uwzględnieniu wyrażeń (5.2) przyjmie postać

$$\begin{gathered} \bar{N}^{ij}\big|_i + \bar{P}^j = 0, \\ \bar{N}^{ij} b_{ij} + \bar{P}^3 = 0, \\ \bar{N}^{ij} = \bar{N}^{ji}. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Symetria tensora kontrawariantnego napięć N^{ij} opisanego wyrażeniem(3.9), wynika z symetrii tensora naprężeń $\bar{\tau}^{ij}$. Układ równań (5.4) jest układem trzech równań różniczkowych o trzech niewiadomych $\bar{N}^{11}$, $\bar{N}^{22}$ i $\bar{N}^{12} = \bar{N}^{21}$. Rozpisany układ równań (5.4) dla powłok prostokreślnych,dla których wielkości geometryczne wyrażone są wzorami (1.7), (1.8) wyniesie

$$\begin{gathered} \frac{\partial \bar{N}^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial \bar{N}^{21}}{\partial u^2} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\bar{N}^{11} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^2}\bar{N}^{21} + \Gamma^1_{12}(\bar{N}^{12} + \bar{N}^{21}) + \\ + \Gamma^1_{22}\bar{N}^{22} + \bar{P}^1 = 0, \\ \frac{\partial \bar{N}^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial \bar{N}^{22}}{\partial u^2} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\bar{N}^{12} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u^2}\bar{N}^{22} + \Gamma^2_{12}(\bar{N}^{12} + \bar{N}^{21}) + \\ + \Gamma^2_{22}\bar{N}^{22} + \bar{P}^2 = 0, \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$b_{12}(\bar{N}^{12} + \bar{N}^{21}) + b_{22}\bar{N}^{22} + \bar{P}^3 = 0. \tag{5.5}$$

Równoważność

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{\partial g}{\partial u^1}, \quad \text{bo } g_{12} = g_{12}(u^2),$$

jest tylko funkcją zmiennej u^2, jak to wynika z (1.3) i (1.3$'$),zezwala na dokonanie przekształcenia układu równań (5.5) i zapisaniu ich w prostszej postaci, dogodnej do przeprowadzenia całkowania

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{12}}{\partial u^2} + 2\,\Gamma^1_{12}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12} + \Gamma^1_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{22} + \sqrt{g}\,\bar{P}^1 = 0, \tag{5.5$'$}$$

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{22}}{\partial u^2} + 2\,\Gamma^2_{12}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12} + \Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{22} + \sqrt{g}\,\bar{P}^2 = 0,$$

$$2b_{12}\bar{N}^{12} + b_{22}\bar{N}^{22} + \bar{P}^3 = 0. \tag{5.5'}$$

Rozwiązanie układu równań (5.5) przeprowadzimy oddzielnie dla poszczególnych grup ujętych w klasyfikacji paragrafu pierwszego. Powłoki zaliczane do grupy II - typu śrubowego zostały rozwiązane przez autora w pracy [1], na tym miejscu nie będą one rozpatrywane. Rozwiązaniem będą objęte powłoki zaliczane do grup I i III.

5.1.1. Powłoki grupy I - rozwijalne

Do powłok grupy I zaliczamy powłoki, których powierzchnie środkowe są rozwijalne. Ich charakterystyki geometryczne podano w (1.9).
Przyjmując w trzecim równaniu układu (5.5′) $b_{12} = 0$, uzyskamy następujące rozwiązanie:

$$\bar{N}^{22} = -\frac{\bar{P}^3}{b_{22}}. \tag{5.6}$$

Drugie równanie układu (5.5′) po dalszym przekształceniu przyjmie postać:

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,g\,\bar{N}^{12}}{\partial u^1} = -\left[g\left(\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{22}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{22}\right) + \sqrt{g}\,g\,\bar{P}^2\right].$$

Podstawienie do powyższego równania (5.6) daje

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,g\,\bar{N}^{12}}{\partial u^1} = g\left[\frac{\partial \frac{\sqrt{g}}{b_{22}}\bar{P}^3}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\frac{\sqrt{g}}{b_{22}}\bar{P}^3\right] - \sqrt{g}\,g\,\bar{P}^2.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$N = \frac{\partial \frac{\sqrt{g}}{b_{22}}\bar{P}^3}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\frac{\sqrt{g}}{b_{22}}\bar{P}^3, \tag{5.7}$$

oraz przeprowadźmy całkowanie celem obliczenia $\bar{N}^{12}$

$$\sqrt{g}\,g\,\bar{N}^{12} = \int (gN - \sqrt{g}\,g\,\bar{P}^2)\,du^1 + C_1(u^2),$$

czyli

$$\bar{N}^{12} = \frac{1}{\sqrt{g}\,g}\int (gN - \sqrt{g}\,g\,\bar{P}^2)\,du^1 + \frac{1}{\sqrt{g}\,g}C_1(u^2). \tag{5.8}$$

Mając $\bar{N}^{22}$ i $\bar{N}^{12}$ możemy z równania pierwszego (5.5′) wyznaczyć $\bar{N}^{11}$. Oznaczając przez M wyrażenie

$$M = \frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{12}}{\partial u^2} + 2\,\Gamma^1_{12}\sqrt{g}\,\bar{N}^{12} + \Gamma^1_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{22}, \tag{5.9}$$

gdzie za $\bar{N}^{22}$ i $\bar{N}^{12}$ podstawiamy (5.6) i (5.8), napiszemy

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{11}}{\partial u^1} = -M - \sqrt{g}\,\bar{P}^1.$$

Całka tego równania będzie równa:

$$\sqrt{g}\,\bar{N}^{11} = -\int M du^1 - \int \sqrt{g}\,\bar{P}^1 du^1 + C_2(u^2),$$

a stąd

$$\bar{N}^{11} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\int M du^1 - \frac{1}{\sqrt{g}}\int \sqrt{g}\,\bar{P}^1 du^1 + \frac{1}{\sqrt{g}}\,C_2(u^2). \tag{5.10}$$

5.1.2. Powłoki grupy III

W grupie III znajdują się wszystkie pozostałe powłoki prostokreślne nie należące do grup I i II. Jak wiadomo, z geometrii różniczkowej dla powierzchni, które posiadają ujemną krzywiznę gaussowską, a taką właśnie mają powierzchnie prostokreślne, zawsze można wprowadzić układ współrzędnych o kierunkach asymptotycznych. Układ taki daje dodatkowe uproszczenia ponieważ współczynniki drugiej formy różniczkowej b_{11} i b_{22} są wtedy równe zeru.

W grupie tej w pierwszej kolejności rozwiążemy powłoki sparametryzowane w układzie współrzędnych o kierunkach asymptotycznych. Zakładając w trzecim równaniu (5.5′) $b_{22} = 0$ znajdziemy $\bar{N}^{12}$

$$\bar{N}^{12} = -\frac{1}{2b_{12}}\,\bar{P}^3. \tag{5.11}$$

Całkując teraz kolejno równania drugie i pierwsze (5.5′) znajdziemy $\bar{N}^{22}$ i $\bar{N}^{11}$.

Z drugiego będzie

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{N}^{22}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,\bar{N}^{22} = N, \tag{5.12}$$

gdzie

$$N = \frac{1}{2g}\,\frac{\partial \frac{\sqrt{g}\,g}{b_{12}}\,\bar{P}^3}{\partial u^1} - \sqrt{g}\,\bar{P}^2. \tag{5.13}$$

Oznaczając przez F funkcję

$$F = \int \Gamma_{22}^{2}\, du^2, \tag{5.14}$$

a następnie całkując wyrażenie (5.12) otrzymamy:

$$\bar{N}^{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{-F}\left[\int N e^{F} du^2 + C_1(u^1)\right]. \tag{5.15}$$

Z równania pierwszego (5.5′) wyznaczymy $\bar{N}^{11}$. Całka tego równania wyniesie

$$\bar{N}^{11} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\int M du^1 - \frac{1}{\sqrt{g}}\int \sqrt{g}\, \bar{P}^1 du^1 + \frac{1}{\sqrt{g}}\, C_2(u^2). \tag{5.16}$$

Funkcja M występująca w tym wzorze jest określona wyrażeniem 5.9) z tym, że za $\bar{N}^{12}$ i $\bar{N}^{22}$ należy podstawić wielkości (5.11) i (5.15).

Teraz z kolei rozwiążemy układ równań (5.5′) w przypadku ogólnym, to znaczy przy założeniu $b_{12} \neq 0$ i $b_{22} \neq 0$. Z równania trzeciego (5.5′) obliczymy $\bar{N}^{12}$

$$\bar{N}^{12} = -\frac{b_{22}}{2b_{12}}\, \bar{N}^{22} - \frac{1}{2b_{12}}\, \bar{P}^3, \tag{5.17}$$

następnie podstawimy (5.17) do przekształconego drugiego równania (5.5′)

$$-\frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \frac{b_{22}}{b_{12}}\, \bar{N}^{22}}{2\, \partial u^1} + \frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^2} + \left(\Gamma_{22}^{2} - \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^2}\right)\sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\partial \sqrt{g}\, \frac{g}{b_{12}}\, \bar{P}^3}{\partial u^1} - \sqrt{g}\, g\, \bar{P}^2.$$

Po uporządkowaniu i pomnożeniu obu stron tego równania przez $2b_{12}$ będzie

$$-b_{22}\, \frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^1} + 2b_{12}\, \frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^2} + 2b_{12}\left[\Gamma_{22}^{2} - \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\, \frac{\partial \frac{b_{22}}{b_{12}}}{\partial u^1}\right]\sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22} = 2gb_{12}\left[\frac{1}{2g}\, \frac{\partial \frac{\sqrt{g}\, g\, \bar{P}^3}{b_{12}}}{\partial u^1} - \sqrt{g}\, \bar{P}^2\right]. \tag{5.18}$$

Oznaczając przez N wyrażenie w nawiasie prawej strony równości (5.18), podobnie jak (5.13) oraz przez F wielkość

$$F = \Gamma_{22}^{2} - \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial u^{1}} - \frac{1}{2}\frac{\partial \frac{b_{22}}{b_{12}}}{\partial u^{1}}, \tag{5.19}$$

napiszemy

$$-b_{22}\frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^{1}} + 2b_{12}\frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^{2}} + 2b_{12}F\sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22} = 2gb_{12}N,$$

albo (5.18′)

$$-\frac{b_{22}}{2b_{12}}\frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^{1}} + \frac{\partial \sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22}}{\partial u^{2}} + F\sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22} = gN.$$

Równanie (5.18′) jest ogólnym równaniem różniczkowym stanu błonowego powłok prostokreślnych, dla których $H \neq 0$. Występujące w nim wielkości b_{ij}, g, F, N są w ogólnym przypadku funkcjami dwóch zmiennych u^1 i u^2. Jeśli natomiast funkcje te będą zależały tylko od jednej zmiennej u^1, to rozwiązanie można przewidzieć w postaci sumy, całki ogólnej równania jednorodnego

$$\sqrt{g}\, g\, \bar{N}^{22} = X \cdot Y, \tag{5.20}$$

gdzie

$X = X(u^1)$ jest funkcją zmiennej u^1,

$Y = Y(u^2)$ jest funkcją zmiennej u^2

oraz całki szczególnej równania niejednorodnego.

<u>Całka ogólna</u>

Podstawienie (5.20) do części jednorodnej równania (5.18′) daje

$$-\frac{b_{22}}{2b_{12}}\frac{\partial X}{\partial u^{1}}Y + \frac{\partial Y}{\partial u^{2}}X + F\,X\,Y = 0. \tag{5.21}$$

Rozdzielenie zmiennych przynosi następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$-\frac{b_{22}}{2b_{12}}\frac{dX}{du^{1}} + (F - \lambda)\,X = 0,$$

$$\frac{dY}{du^{2}} + \lambda Y = 0.$$

Rozwiązaniem tego układu są funkcje:

$$X = C \operatorname{exsp} 2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} (F - \lambda)\, du^1, \qquad Y = C \operatorname{exsp} (-\lambda u^2). \tag{5.22}$$

Całkę ogólną układu (5.21) można więc zapisać jako sumę:

$$XY = C \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{exsp} \left[2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} (F - \lambda_n)\, du^1 - \lambda_n u^2 \right]. \tag{5.23}$$

<u>Całka szczególna</u>

Całka szczególna równania (5.18') przy założeniu rozwiązania

$$Z = Z(u^1)$$

wyniesie

$$Z = -C\operatorname{exsp} 2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} F du^1 \cdot \int gN\operatorname{exsp} \left(-2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} F du^1\right) du^1. \tag{5.24}$$

Suma całek (5.23) i (5.24) daje rozwiązanie ogólne równania (5.18')

$$\bar{N}^{22} = \frac{C}{\sqrt{g}\, g} \operatorname{exsp} 2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} F du^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{exsp} -\lambda_n \left(2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} du^1 + u^2\right) - \int g\, N\operatorname{exsp} \left(-2\int \frac{b_{12}}{b_{22}} F du^1\right) du^1 \right]. \tag{5.25}$$

Mając znalezione składowe tensorów $\bar{N}^{12}$ i $\bar{N}^{22}$, możemy z pierwszego równania (5.5') wyznaczyć $\bar{N}^{11}$.
Wprowadzając funkcję pomocniczą M określoną wyrażeniem (5.9) z tym, że $\bar{N}^{12}$ i $\bar{N}^{22}$ należy wziąć z (5.17), (5.25) napiszemy

$$\bar{N}^{11} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \int M du^1 - \frac{1}{\sqrt{g}} \int \sqrt{g}\, \bar{P}^1 du^1 + \frac{1}{\sqrt{g}} C_2 (u^2). \tag{5.26}$$

W przypadku ogólnym, to znaczy dla funkcji b_{ij}, g, F, N zależnych od dwóch zmiennych u^1, u^2, należy dla szczegółowych danych zadania znaleźć całkę (5.25) z równania różniczkowego (5.18'). Wyrażenia (5.17) i (5.26) dla pozostałych wielkości $\bar{N}^{12}$, $\bar{N}^{22}$ nie zmienią swego kształtu z tym, że w miejsce $\bar{N}^{22}$ podstawimy znalezioną całkę równania (5.18').

5.2. Stan zgięciowy

Opis stanu zgięciowego:

$$
\begin{aligned}
P^{i} &= \hat{P}^{i},\\
N^{ij} &= \hat{N}^{ij},\\
M^{ij} &= M^{ij},\\
Q^{i} &= Q^{i},\\
\hat{N}^{ij} &= 6\,HM^{ij}.
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

Układ równań równowagi (4.1) dla stanu zgięciowego, uwzględniający warunki (5.27), przyjmie postać:

$$
\begin{aligned}
&6\,(HM^{ij})\big|_{i} - Q^{i}b_{i}^{j} + \hat{P}^{j} = 0,\\
&M^{ij}\big|_{i} - Q^{j} = 0,\\
&6\,HM^{ij}b_{ij} + Q^{j}\big|_{j} + \hat{P}^{3} = 0,\\
&M^{ij} = M^{ji}.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Symetria tensora M^{ij} wynika z wyrażeń (3.4), (3.5) i (3.6′) przy założeniu $\bar{N}^{ij} = 0$, pociągającym $\bar{\tau}^{ij} = 0$, gdzie $\bar{\tau}^{ij}$ charakteryzuje stan błonowy. Układ równań (5.28) jest więc układem pięciu równań zawierającym pięć niewiadomych. Pomijając wyrażenie $6HM^{ij}b_{ij}$ w równaniu piątym (5.28) jako wielkość małą drugiego rzędu w porównaniu z pozostałymi członami, otrzymamy następujący uproszczony układ równań stanu zgięciowego:

$$
\begin{aligned}
&6(HM^{ij})\big|_{i} - Q^{i}b_{i}^{j} + \hat{P}^{j} = 0,\\
&M^{ij}\big|_{i} - Q^{j} = 0,\\
&Q^{j}\big|_{j} + \hat{P}^{3} = 0,\\
&M^{ij} = M^{ji}.
\end{aligned}
\tag{5.28′}
$$

Rugując z układu (5.28) wielkości Q^{j}, napiszemy

$$
\begin{aligned}
&6(HM^{ij})\big|_{i} - b_{i}^{j}\,M^{ki}\big|_{k} + \hat{P}^{j} = 0,\\
&6HM^{ij}b_{ij} + M^{ij}\big|_{ij} + \hat{P}^{3} = 0,\\
&M^{ij} = m^{ji}.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Wersja uproszczona

$$6(HM^{ij})\Big|_i - b^j_i M^{ki}\Big|_k + \hat{P}^j = 0,$$

$$M^{ij}\Big|_{ij} + \hat{P}^3 = 0, \qquad (5.29')$$

$$M^{ij} = M^{ji}.$$

Układy równań (5.29) i (5.29′) są układami trzech równań o trzech niewiadomych M^{ij}. Rozwiązanie stanu zgięciowego przeprowadzimy w oparciu o układy równań (5.28). (5.28′).
Rozwińmy pierwsze równanie tego układu, wykorzystując równocześnie zależność

$$(HM^{ij})\Big|_i = H\Big|_i M^{ij} + HM^{ij}\Big|_i = H\Big|_i M^{ij} + HQ^j.$$

Przekształcone równanie przyjmie postać

$$6H|_i M^{ij} + (6H\delta^j_i - b^j_i)\, Q^i + \hat{P}^j = 0. \qquad (5.30)$$

Teraz z kolei z układu równań (5.30) wyznaczmy wielkości M^{11} i M^{22}

$$M^{11} = -\frac{H|_2}{H|_1} M^{12} - \frac{1}{6H|_1}(6H\delta^1_i - b^1_i)\, Q^i - \frac{1}{6H|_1}\hat{P}^1,$$

$$M^{12} = -\frac{H|_2}{H|_1} M^{22} - \frac{1}{6H|_1}(6H\delta^2_i - b^2_i)\, Q^i - \frac{1}{6H|_1}\hat{P}^2, \qquad (5.31)$$

przy założeniu $H_{\,1} \neq 0$.
Drugi związek (5.28) dający układ dwóch równań możemy rozwinąć podobnie jak to uczyniono w (5.5). Układ ten dla powłok prostokreślnych, dla których wielkości geometryczne opisane są wzorami (1.7), (1.8) przedstawia się następująco:

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,M^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial\sqrt{g}\,M^{12}}{\partial u^2} + 2\,\Gamma^1_{12}\sqrt{g}\,M^{12} + \Gamma^1_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - \sqrt{g}\,Q^1 = 0,$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,M^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial\sqrt{g}\,M^{22}}{\partial u^2} + 2\,\Gamma^2_{12}\sqrt{g}\,M^{12} + \Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - \sqrt{g}\,Q^2 = 0. \qquad (5.32)$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$P^i = (6H\delta^i_j - b^i_j)\, Q^j,$$

$$f = \frac{H|_2}{H|_1}, \qquad (5.33)$$

to wówczas (5.31) będą równe:

$$M^{11} = -f\,M^{12} - \frac{1}{6H|_1}\,F^1 - \frac{1}{6\,H|_1}\,\hat{P}^1,$$
$$M^{12} = -f\,M^{22} - \frac{1}{6H|_1}\,F^2 - \frac{1}{6\,H|_1}\,\hat{P}^2. \qquad (5.31')$$

Podstawmy M^{11} do pierwszego równania układu (5.32), obliczmy pochodną i podzielmy przekształcone równanie przez f, to po wykonaniu tych operacji otrzymamy

$$-\frac{\partial\sqrt{g}\,M^{12}}{\partial u^1} + \frac{1}{f}\left[\frac{\partial\sqrt{g}\,M^{12}}{\partial u^2} + \left(2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1}\right)\sqrt{g}\,M^{12} + \right.$$
$$\left. + \Gamma^1_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^1}{\partial u^1} - \sqrt{g}\,Q^1 - \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^1}{\partial u^1}\right] = 0.$$

Dodając do powyższego równania drugie równanie układu (5.32), napiszemy

$$\frac{1}{f}[\ldots] + \frac{\partial\sqrt{g}\,M^{22}}{\partial u^2} + 2\,\Gamma^2_{12}\sqrt{g}\,M^{12} + \Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - \sqrt{g}\,Q^2 = 0.$$

W równaniu tym zastąpmy M^{12} wyrażeniem (5.31′) i wykonajmy odpowiednie przegrupowanie, to wówczas będzie

$$\left[\Gamma^1_{22} - \frac{\partial f}{\partial u^2} + f\,\Gamma^2_{22} - \left(2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1} + 2f\,\Gamma^2_{12}\right)f\right]\sqrt{g}\,M^{22} =$$
$$= \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^1}{\partial u^1} + \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^2}{\partial u^2} + \left(2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1} + 2f\,\Gamma^2_{22}\right)\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^2 +$$
$$+ \sqrt{g}\,Q^1 + f\sqrt{g}\,Q^2 + \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^1}{\partial u^1} + \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^2}{\partial u^2} + \left(2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1} + \right.$$
$$\left. + 2f\,\Gamma^2_{22}\right)\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^2.$$

Wprowadzając funkcje pomocnicze A,B,G napiszemy

$$A\sqrt{g}\,M^{22} = \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^1}{\partial u^1} + \frac{\partial\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^2}{\partial u^2} + B\,\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^2 + \sqrt{g}Q^1 + f\sqrt{g}Q^2 + G, \qquad (5.34)$$

gdzie:

$$A = \Gamma^1_{22} - \frac{\partial f}{\partial u^2} + f\,\Gamma^2_{22} - \left(2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1} + 2f\,\Gamma^2_{12}\right) f,$$

$$B = 2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1} + 2f\,\Gamma^2_{22}, \tag{5.35}$$

$$G = \frac{\partial \frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^2}{\partial u^2} + \left(2\,\Gamma^1_{12} - \frac{\partial f}{\partial u^1} + 2f\,\Gamma^2_{22}\right)\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}\hat{P}^2.$$

Z równości (5.34) wyznaczymy M^{22}

$$M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}}\left[\frac{\partial \frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^2}{\partial u^2} + B\,\frac{\sqrt{g}}{6H|_1}F^2 + \sqrt{g}\,Q^1 + f\sqrt{g}\,Q^2 + G\right] \tag{5.36}$$

Wzory (5.31), (5.36) określają funkcje momentów M^{ij}, przy czym zależą one od funkcji sił poprzecznych Q^i. W procesie wyznaczania funkcji M^{ij} jedno równanie układu (5.32) nie zostało wykorzystane. Dla wyznaczenia M^{22} posłużono się sumą tych równań, czyli związkiem wiążącym Q^i, po wstawieniu uprzednio obliczonych M^{ij}, może być jedno z równań układu (5.32) ponownie wykorzystane. Wybrano równanie drugie jako prostsze. Równanie to przy spełnieniu warunku

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{\partial g}{\partial u^1}, \quad \text{bo} \quad g_{12} = g_{12}(u^2),$$

może być przedstawione w postaci

$$\frac{\partial \sqrt{g}\,g\,M^{12}}{\partial u^1} + g\,\frac{\partial \sqrt{g}\,M^{22}}{\partial u^2} + g\,\Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - g\sqrt{g}\,Q^2 = 0.$$

Podstawiając następnie w miejsce M^{12} drugie wyrażenie (5.31′) napiszemy

$$-\frac{\partial f g\sqrt{g}\,M^{22}}{\partial u^1} + g\,\frac{\partial \sqrt{g}\,M^{22}}{\partial u^2} + g\,\Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - \frac{\partial \frac{g\sqrt{g}}{6H|_1}F^2}{\partial u^1} - \tag{5.37}$$

$$- g\sqrt{g}\,Q^2 - \frac{\partial \frac{g}{6H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^2}{\partial u^1} = 0,$$

gdzie M^{22} jest określone przez (5.36).

Równanie (5.37) wraz z piątym równaniem (5.28) stanowią układ dwóch równań o niewiadomych Q^1, Q^2.

5.2.1. Powłoki grupy I - rozwijalne

Funkcje pomocnicze F^i określone wyrażeniem (5.33) dla powłok rozwijalnych będą równe

$$
\begin{aligned}
F^1 &= 6HQ^1 + 2g_{12}HQ^2,\\
F^2 &= 4HQ^2.
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Jeśli układ współrzędnych będzie ponadto ortogonalny, to:

$$
\begin{aligned}
F^1 &= 6HQ^1,\\
F^2 &= 4HQ^2.
\end{aligned}
\tag{5.38'}
$$

Podstawienie (5.38) do (5.36) daje;

$$
\begin{aligned}
M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}}\Bigg[&\frac{\partial \frac{H}{H|_1}\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \frac{1}{3}g_{12}\frac{\partial \frac{H}{H|_1}\sqrt{g}\,Q^2}{\partial u^1} + \frac{2}{3}\frac{\partial \frac{H}{H|_1}\sqrt{g}\,Q^2}{\partial u^2} +\\
&+ \left(f + \frac{2}{3}B\frac{H}{H|_1}\right)\sqrt{g}\,Q^2 + \sqrt{g}\,Q^1 + G\Bigg].
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

W wyrażeniu tym $g_{12} = g_{12}\ (u^2)$ zgodnie z (1.3).
Większość powierzchni prostokreślnych rozwijalnych takich jak walce stożki, może być sparametryzowana w układach współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych, przy czym parametry opisujące te powierzchnie będą zależały tylko od jednej zmiennej u^1. Dla tych powierzchni będzie

$$
\begin{aligned}
f &= 0,\\
B &= 2\,\Gamma^1_{12} = 0,\\
A &= \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u^1},\\
\Gamma^2_{22} &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Wyrażenie (5.39) przy założeniu warunków (5.40) przyjmie postać:

$$
M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}}\left[\frac{\partial \frac{H}{H|_1}\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \frac{2}{3}\frac{H}{H|_1}\frac{\partial \sqrt{g}\,Q^2}{\partial u^2} + \sqrt{g}\,Q^1 + G\right]. \tag{5.39'}
$$

Rozwinięte piąte równanie (5.28') wiążące wielkości Q^1, Q^2 wyniesie

$$\frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^2} + \sqrt{g}\, \hat{P}^3 = 0. \tag{5.41}$$

Rugując związkiem (5.41) funkcję Q^2 w wyrażeniu (5.39') otrzymamy

$$M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \frac{H}{H|_1} \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} - \frac{2}{3} \frac{H}{H|_1} \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \sqrt{g}\, Q^1 + G - \frac{2}{3} \frac{H}{H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^3 \right],$$

albo (5.42)

$$M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}} \left[\frac{1}{3} \frac{H}{H|_1} \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \left(1 + \frac{\partial \frac{H}{H|_1}}{\partial u^1}\right) \sqrt{g}\, Q^1 + G - \frac{2}{3} \frac{H}{H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^3 \right],$$

Dla powierzchni rozwijalnych spełniających warunki (5.40) równanie (5.37) przyjmie postać

$$g \frac{\partial \sqrt{g}\, M^{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial \frac{g}{6H|_1} \sqrt{g}\, F^2}{\partial u^1} - g\sqrt{g}\, Q^2 - \frac{\partial \frac{g}{6H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^2}{\partial u^1} = 0.$$

Podstawienie do powyższego równania F^2 z (5.38) daje

$$g \frac{\partial \sqrt{g}\, M^{22}}{\partial u^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial \frac{H}{H|_1} g\sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^1} - g\sqrt{g}\, Q^2 - \frac{\partial \frac{g}{6H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^2}{\partial u^1} = 0. \tag{5.43}$$

Zróżniczkujmy (5.43) względem zmiennej u^2, a następnie zamieńmy w nim wielkość Q^2 na wielkość Q^1 za pomocą związku (5.41)

$$g \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, M^{22}}{(\partial u^2)^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial \frac{H}{H|_1} g \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1}}{\partial u^1} + g \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \frac{2}{3} \frac{\partial \frac{Hg}{H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^3}{\partial u^1} +$$

$$+ g\sqrt{g}\, \hat{P}^3 - \frac{\partial \frac{g}{6H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^2}{\partial u^1} = 0.$$

Rugując w równaniu tym funkcję M^{22} wyrażeniem (5.42) uzyskamy równanie różniczkowe trzeciego rzędu zawierające jedynie funkcję Q^1.

$$\frac{g}{A} \left[\frac{1}{3} \frac{H}{H|_1} \frac{\partial^3 \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1 (\partial u^2)^2} + \left(1 + \frac{\partial \frac{H}{H|_1}}{\partial u^1}\right) \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, Q^1}{(\partial u^2)^2} + \frac{\partial^2 \left(G - \frac{2}{3} \frac{H}{H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^3\right)}{(\partial u^2)^2} \right] +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{H}{H|_1} g \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, Q^1}{(\partial u^1)^2} + \left(g + \frac{\partial \frac{H}{H|_1} g}{\partial u^1}\right) \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \frac{2}{3} \frac{\partial \frac{H}{H|_1} g \sqrt{g}\, \hat{P}^3}{\partial u^1} +$$

$$+ g\sqrt{g}\,\hat{P}^3 - \frac{\partial \frac{g}{6H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^2}{\partial u^1} = 0.$$

Po uporządkowaniu i pomnożeniu równania przez $3\frac{A}{g}$ będzie

$$\frac{H}{H|_1}\frac{\partial^3\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1(\partial u^2)^2} + 3\left(1 + \frac{\partial\frac{H}{H|_1}}{\partial u^1}\right)\frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q^1}{(\partial u^2)^2} + 2A\frac{H}{H|_1}\frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q^1}{(\partial u^1)^2} +$$

$$+ 3A\left(1 + \frac{1}{g}\frac{\partial g\frac{H}{H|_1}}{\partial u^1}\right)\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} = \frac{\partial^2\left(2\frac{H}{H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^3 - 3G\right)}{(\partial u^2)^2} +$$

$$+ \frac{A}{g}\left[\frac{\partial\frac{g}{2H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^2}{\partial u^1} - 2\frac{\partial\frac{H}{H|_1}g\sqrt{g}\,\hat{P}^3}{\partial u^1} - 3g\sqrt{g}\,\hat{P}^3\right].$$

Wprowadzając następnie oznaczenia

$$a = \frac{H}{H|_1},$$

$$a_{,1} = \frac{\partial\frac{H}{H|_1}}{\partial u^1},$$

$$(ag)_{,1} = \frac{\partial ag}{\partial u^1}, \tag{5.44}$$

$$R = \frac{\partial^2\left(2\frac{H}{H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^3 - 3G\right)}{(\partial u^2)^2} + \frac{A}{g}\left[\frac{\partial\frac{g}{2H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^2}{\partial u^1} - 2\frac{\partial\frac{Hg}{H|_1}\sqrt{g}\,\hat{P}^3}{\partial u^1} - 3g\sqrt{g}\,\hat{P}^3\right],$$

napiszemy

$$a\frac{\partial^3\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1(\partial u^2)^2} + 3(1 + a_{,1})\frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q^1}{(\partial u^2)^2} + 2aA\frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q^1}{(\partial u^1)^2} +$$

$$+ 3A\left(1 + \frac{(ag)_{,1}}{g}\right)\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} = R. \tag{5.45}$$

Rozwiązaniem równania (5.45) będzie suma całek; szczególnej Q^1_s równania niejednorodnego i ogólnej Q^1_o równania jednorodnego

$$Q^1 = Q^1_s + Q^1_o. \tag{5.46}$$

Całkę szczególną Q_o^1 wyznaczymy przy założeniu, że funkcja R jest funkcją jednej zmiennej u^1.
Jeśli ponadto przyjmiemy

$$Q_s^1 = Q_s^1\,(u^1)$$

to równanie (5.45) przyjmie postać

$$2aA\,\frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q_s^1}{(\partial u^1)^2} + 3A\,\left(1 + \frac{(ag)_{,1}}{g}\right)\frac{\partial\sqrt{g}\,Q_s^1}{\partial u^1} = R.$$

Podzielenie obu stron tego równania przez aA daje

$$2\,\frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q_s^1}{(\partial u^1)^2} + \frac{3}{a}\,\left(1 + \frac{(ag)_{,1}}{g}\right)\frac{\partial\sqrt{g}\,Q_s^1}{\partial u^1} = \frac{R}{aA}. \tag{5.47}$$

Niech

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,Q_s^1}{\partial u^1} = X, \tag{5.48}$$

to wówczas

$$2\,\frac{\partial X}{\partial u^1} + \frac{3}{a}\left[1 + \frac{(ag)_{,1}}{g}\right]X = \frac{R}{aA}.$$

Całka tego równania będzie równa

$$X = e^{-F}\left[\int\frac{R}{2aA}\,e^F\,du^1 + C_1\right], \tag{5.48}$$

gdzie

$$F = \frac{3}{2}\int\frac{1}{a}\left[1 + \frac{(ag)_{,1}}{g}\right]du^1 = \frac{3}{2}\left[\ln H + \ln(ag)\right] = \frac{3}{2}\ln\frac{gH^2}{H|_1}, \tag{5.50}$$

bo

$$a = \frac{H}{H|_1}.$$

Całkując z kolei równanie (5.48) przy wykorzystaniu całki (5.49) znajdziemy rozwiązanie równania (5.47)

$$Q_s^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\int e^{-F}\left(\int\frac{R}{2aA}\,e^F du^1 + C_1\right)du^1 + C_2.\right. \tag{5.51}$$

Niech część jednorodna równania (5.45) ma rozwiązanie postaci

$$\sqrt{g}\,Q_o^1 = X\,(u^1)\cdot Y\,(u^2), \tag{5.52}$$

to stosując metodę rozdzielania zmiennych, zagadnienie całkowania sprowadzimy do rozwiązania układu dwu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Po rozdzieleniu zmiennych, dojdziemy do następującego układu równań;

$$2aA \frac{d^2X}{(du^1)^2} + \left[3A\left(1 + \frac{(ag)_{,1}}{g}\right) - \lambda a\right]\frac{dX}{du^1} - 3\lambda(1 + a_{,1})\,X = 0,$$

$$\frac{d^2Y}{(du^2)^2} + Y = 0. \tag{5.53}$$

Rozwiązanie pierwszego równania (5.53) może być przedstawione w postaci szeregu potęgowego

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (u^1)^k. \tag{5.54}$$

Natomiast rozwiązaniem drugiego równania (5.53) będzie funkcja

$$Y = B_n \sin(\alpha_n u^2 + \beta_n),$$

względnie (5.55)

$$Y = B_n \cos(\alpha_n u^2 + \beta_n),$$

gdzie

$$\lambda = (\alpha_n)^2.$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (5.52) może być więc zapisane w postaci

$$Q^1_o = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k (u^1)^k\right] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left[\alpha_n (u^2 - u^2_o)\right], \tag{5.56}$$

gdzie $B_n, \alpha_n, \beta_n = \alpha_n u^2_o$ stałe, charakteryzujące warunki brzegowe. Suma wyrażeń (5.51) i (5.56) daje nam rozwiązanie równania (5.45). Mając obliczone Q^1, możemy z równania (5.41) wyznaczyć Q^2. W tym celu zróżniczkujemy wyrażenia (5.51) i (5.56) pomnożone przez $\sqrt{g}$ względem zmiennej u^1, a następnie utworzymy ich całki po u^2. Funkcja Q^2 będzie więc równa

$$Q^2 = -\frac{1}{g}\Bigg\{e^{-F}\left[\int \frac{R}{2aA} e^F du^1 + C_1\right] u^2 + \sqrt{g}\, u^2 \hat{P}^3 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\alpha_n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, k (u^1)^{k-1}\right] \begin{matrix}-\cos\\ \sin\end{matrix} \left[\alpha_n (u^2 - u^2_o)\right] + C_3(u^1)\Bigg\}. \tag{5.57}$$

Pozostałe wielkości, to znaczy M^{ij} i $\hat{M}^{ij}$ wyznaczymy z wzorów (5.27), (5.31) i (5.39').

5.2.2. Powłoki grupy III

Wprowadzając wielkości pomocnicze

$$\alpha = \frac{6H-b_1^1}{6H|_1}, \qquad \beta = \frac{b_2^1}{6H|_1},$$
$$\gamma = \frac{b_1^2}{6H|_1}, \qquad \delta = \frac{6H-b_2^2}{6H|_1}, \tag{5.58}$$

oraz ich pochodne

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u^i} = \alpha_{,i}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial u^i} = \beta_{,i},$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial u^i} = \gamma_{,i}, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial u^i} = \delta_{,i}, \tag{5.58'}$$

nadamy wyrażeniom (5.33) i (5.36) następujące postacie

$$F^1 = 6H|_1 \left[\alpha Q^1 - \beta Q^2\right],$$
$$F^2 = 6H|_1 \left[\delta Q^2 - \gamma Q^1\right], \tag{5.59}$$

$$M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}}\left[\alpha \frac{\partial\sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} - \beta \frac{\partial\sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^1} - \gamma \frac{\partial\sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^2} + \delta \frac{\partial\sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^2} + \right.$$
$$\left. + (\alpha_{,1} - \gamma_{,2} - \gamma B + 1)\sqrt{g}\, Q^1 + (\delta_{,2} - \beta_{,1} + \delta B + f)\sqrt{g}\, Q^2 + G\right]. \tag{5.60}$$

Wydzielimy z grupy III część powłok takich, które mogą być opisane w ten sposób, że ich pierwsze i drugie formy różniczkowe będą określone współczynnikami g_{ij}, b_{ij} zależnymi jedynie od jednej zmiennej u^1

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1),$$
$$b_{ij} = b_{ij}(u^1). \tag{5.61}$$

Powłoki spełniające warunki (5.61) dają znaczne uproszczenia rachunkowe, ponieważ

$$f = 0,$$

$$A = \Gamma^1_{22}, \tag{5.62}$$

$$B = 2\,\Gamma^1_{12}.$$

Wyrażenie (5.60) po wyrugowaniu pochodnej Q^2 związkiem (5.49) dla tych powłok przyjmie kształt

$$M^{22} = \frac{1}{A\sqrt{g}}\left[(\alpha-\delta)\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} - \beta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^2}{\partial u^1} - \gamma\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2} + (\alpha_{,1} - \gamma B + 1)\sqrt{g}\,Q^1 + \right.$$
$$\left. + (\delta B - \beta_{,1})\sqrt{g}\,Q^2 + G - \delta\sqrt{g}\,\hat{P}^3\right]. \tag{5.63}$$

Równanie różniczkowe (5.37) przy spełnionym warunku $f = 0$ będzie równe

$$g\frac{\partial\sqrt{g}\,M^{22}}{\partial u^2} + g\,\Gamma^2_{22}\sqrt{g}\,M^{22} - \frac{\partial\frac{g}{6H}\Big|_1\sqrt{g}\,F^2}{\partial u^1} - g\sqrt{g}\,Q^2 - \frac{\partial\frac{g}{6H}\Big|_1\sqrt{g}\,\hat{P}^2}{\partial u^1} = 0. \tag{5.64}$$

Równanie (5.64) i (5.41) przy uwzględnieniu wyrażeń (5.63) i (5.58) stanowią układ dwóch równań o niewiadomych Q^1, Q^2. Różniczkując równanie (5.64) względem zmiennej u^2, a następnie rugując z niego wielkość Q^2 za pomocą związku (5.41), po odpowiednich przegrupowaniach i uporządkowaniu całego wyrażenia, otrzymamy ostatecznie równanie różniczkowe zawierające tylko jedną niewiadomą funkcję Q^1

$$\frac{\partial^2\left[\beta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \alpha\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right]}{\partial u^1\,\partial u^2} - \frac{\partial^2\left[\delta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \gamma\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right]}{(\partial u^2)^2} -$$

$$- B\frac{\partial\left[\delta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \gamma\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right]}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\sqrt{g}\,Q^1}{(\partial u^2)^2} + \Gamma^2_{22}\left\{\frac{\partial\left[\beta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \alpha\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right]}{\partial u^1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\left[\delta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \gamma\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right]}{\partial u^2} - B\left[\delta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \gamma\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right] + \frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right\} + \tag{5.65}$$

$$+ A\left\{\frac{\partial\left[\delta\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1} + \gamma\frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^2}\right]}{\partial u^1} + \frac{\partial\sqrt{g}\,Q^1}{\partial u^1}\right\} = R.$$

Postać rozwinięta równania (5.65) wyniesie

$$\frac{\partial^3 \sqrt{g}\, Q^1}{(\partial u^1)^2\, \partial u^2} + (\alpha - \delta)\, \frac{\partial^3 \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1 (\partial u^2)^2} - \gamma\, \frac{\partial^3 \sqrt{g}\, Q^1}{(\partial u^2)^3} + (\delta A + \beta\, \Gamma^2_{22})\, \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, Q^1}{(\partial u^2)^2} +$$

$$+ \left[\beta_{,1} - \delta B + A\gamma + \Gamma^2_{22}\, (\alpha - \delta)\right] \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1\, \partial u^2} + \left[1 + \alpha_{,1} - \gamma\, (B + \Gamma^2_{22})\right] \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, Q^1}{(\partial u^2)^2} +$$

$$+ \left[A\, (1 + \delta_{,1}) + \Gamma^2_{22}\, (\beta_{,1} - \delta B)\right] \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \left[a\gamma_{,1} + \Gamma^2_{22}\, (1 + \alpha_{,1} - \gamma B)\right] \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^2} = R. \tag{5.65'}$$

Funkcja obciążeń R występująca w równaniach (5.65) i (5.65') jest równa

$$R = \frac{\partial^2 (\delta \sqrt{g}\, \hat{P}^3 - G)}{(\partial u^2)^2} - \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, \hat{P}^3}{\partial u^1\, \partial u^2} + \delta B\, \frac{\partial \sqrt{g}\, \hat{P}^3}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22} \left[\frac{\partial (\delta \sqrt{g}\, \hat{P}^3 - G)}{\partial u^2} - \right. \tag{5.66}$$

$$\left. - \frac{\partial \beta \sqrt{g}\, \hat{P}^3}{\partial u^1} + \delta B \sqrt{g}\, \hat{P}^3 \right] - A \left[\frac{\partial \delta \sqrt{g}\, \hat{P}^3}{\partial u^1} + \sqrt{g}\, \hat{P}^3 \right] + \frac{A}{g}\, \frac{\partial^2 \frac{g}{6H|_1} \sqrt{g}\, \hat{P}^2}{\partial u^1\, \partial u^2}.$$

Niech rozwiązaniem równania (5.65) będzie suma całek

$$Q^1 = Q^1_s + Q^1_o, \tag{5.67}$$

Q^1_s – całka szczególna równania niejednorodnego,

Q^1_o – całka ogólna równania jednorodnego.

Całkę Q^1_2 obliczymy przy założeniu, że funkcja obciążeń R wyrażona wzorem (5.66) jest funkcją jednej zmiennej u^1, a wtedy możemy przyjąć $Q^1_s = Q^1_s(u^1)$. Dla przyjętych założeń

$$R = R(u^1),$$

$$Q^1_s = Q^1_s(u^1),$$

równanie (5.65') przyjmie postać

$$(\delta A + \beta\, \Gamma^2_{22})\, \frac{\partial^2 \sqrt{g}\, Q^1_s}{(\partial u^1)^2} + \left[A\, (1 + \delta_{,1}) + \Gamma^2_{22}\, (\beta_{,1} - \delta B)\right] \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1_s}{\partial u^1} = R. \tag{5.68}$$

Równanie (5.68) ma podobną budowę do równania (5.47), jego całka będzie więc równa

$$Q^1_s = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\int e^{-F}\left(\int \frac{R}{\delta A + \beta\,\Gamma^2_{22}}\,e^F du^1 + C_1\right) du^1 + C_2\right], \tag{5.69}$$

gdzie

$$F = \int \frac{A\,(1 + \delta_{,1}) + \Gamma^2_{22}\,(\beta_{,1} - \delta B)}{\delta A + \beta\,\Gamma^2_{22}}\,du^1. \tag{5.70}$$

Przechodząc do rozwiązania części jednorodnej równania (5.65) załóżmy

$$\sqrt{g}\,Q^1 = B_n\,X(u^1)\,e^{a_n(u^2-u^2_o)} + C_n, \tag{5.71}$$

B_n, C_n - dowolne stałe.
Podstawiając (5.71) do (5.65) otrzymamy po uporządkowaniu

$$B_n\left\{(a_n + \Gamma^2_{22})\left[\frac{\partial\left[\beta\frac{\partial X}{\partial u^1} + \alpha\,a_n X\right]}{\partial u^1} - (a_n + B)\left[\delta\,\frac{\partial X}{\partial u^1} + \gamma\,a_n X\right] + a_n X\right] + \right.$$

$$\left. + A\left[\frac{\partial\left[\delta\frac{\partial X}{\partial u^1} + \gamma\,a_n X\right]}{\partial u^1} + \frac{\partial X}{\partial u^1}\right]\right\} e^{a_n(u^2-u^2_o)} = 0.$$

Ponieważ

$$e^{a_n(u^2-u^2_o)} \neq 0,$$

to funkcja $X(u^1)$ musi spełniać równanie

$$(a_n + \Gamma^2_{22})\left\{\frac{\partial\left[\beta\frac{\partial X}{\partial u^1} + \alpha\,a_n X\right]}{\partial u^1} - (a_n + B)\left[\delta\,\frac{\partial X}{\partial u^1} + \gamma a_n X\right] + a_n X\right\} +$$

$$+ A\left\{\frac{\partial\left[\delta\,\frac{\partial X}{\partial u^1} + \gamma\,a_n X\right]}{\partial u^1} + \frac{\partial X}{\partial u^1}\right\} = 0. \tag{5.72}$$

Postać rozwinięta równania (5.72) będzie równa

$$\left[\delta A + \beta(a_n + \Gamma^2_{22})\right]\frac{\partial^2 X}{(\partial u^1)^2} + \left[A(1 + \delta_{,1}) + (a_n + \Gamma^2_{22})\,(\beta_{,1} - \delta B + \right.$$

$$\left. + a_n(\alpha - \delta)\right]\frac{\partial X}{\partial u^1} + a_n\left[A\gamma_{,1} + (a_n + \Gamma^2_{22})\,(1 + \alpha_{,1} - \gamma B) - \right. \tag{5.72'}$$

$$\left. - a_n(a_n\gamma + B\,\Gamma^2_{22})\right]\,X = 0.$$

Jeśli rozwiązaniu równania (5.72) nadamy postać szeregową

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (u^1)^k, \tag{5.73}$$

to całka ogólna równania jednorodnego (5.65) zbudowana z (5.71) i (5.73) może być zapisana w postaci

$$Q_o^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \sum_{k=o}^{\infty} A_k (u^1)^k \, e^{a_n (u^2 - u_o^2)} + C_n \right]. \tag{5.74}$$

Suma całek (5.69 i (5.74) daje rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (5.65′). Wielkość Q^2 wyznaczymy przez całkowanie wyrażenia (5.41) po u^2, podstawiając uprzednio odpowiednie pochodne, wzięte względem u^1 z wyrażeń (5.69) i (5.74) pomnożonych przez $\sqrt{g}$.

$$Q^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \Bigg\{ \left[e^{-F} \left(\int \frac{R}{\delta A + \beta \Gamma_{22}^2} e^F du^1 + C_1 \right) + \sqrt{g}\, \hat{P}^3 \right] u^2 +$$

(5.75)

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} k\, A_k (u^1)^k \, e^{a_n (u^2 - u_o^2)} + C_3(u^1) \Bigg\}.$$

Natomiast wielkości M^{ij} i N^{ij} wyznaczymy z wzorów (5.31′), (5.63) i 5.27) W przypadku ogólnym, to znaczy takim, w którym współczynniki pierwszych i drugich form różniczkowych będą zależały od dwóch zmiennych, rozwiązanie problemu możemy sprowadzić do układu dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego, drugiego o dwóch niewiadomych, albo przez dalsze rugowanie doprowadzić do jednego równania różniczkowego rzędu piątego, zawierającego jedną funkcję niewiadomą.

Przekształcone równanie (5.37), uzyskane przez podstawienie do niego wyrażeń (5.36) i (5.33) i wykonaniu odpowiednich przegrupowań,wraz z równaniem (5.41) daje następujący układ równań

$$- \frac{\partial \frac{g f}{A} [I] - g\vartheta \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + g \frac{\partial \frac{1}{A} [I]}{\partial u^2} + \frac{g}{A} \Gamma_{22}^2 [I] +$$

$$+ \frac{\partial \frac{g f}{A} [II] - g\delta \sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^1} - g \frac{\partial \frac{1}{A} [II]}{\partial u^2} - \frac{g}{A} \Gamma_{22}^2 [II] - \qquad (5.76)$$

$$- g \sqrt{g}\, Q^2 - \frac{\partial \frac{g f}{A} \sigma + \frac{g\sqrt{g}}{6H_{11}} \hat{P}^2}{\partial u^1} + g \frac{\partial \frac{G}{A}}{\partial u^2} + \frac{g}{A} \Gamma_{22}^2 G = 0,$$

$$\frac{\partial \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^2} + \sqrt{g}\, \hat{P}^3 = 0,$$

gdzie

$$[\mathrm{I}] = \frac{\partial \alpha \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^1} - \frac{\partial \gamma \sqrt{g}\, Q^1}{\partial u^2} + (1 - \gamma B) \sqrt{g}\, Q^1,$$

$$[\mathrm{II}] = \frac{\partial \beta \sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^1} - \frac{\partial \delta \sqrt{g}\, Q^2}{\partial u^2} - (f + \delta B) \sqrt{g}\, Q^2.$$

6. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ INFINITEZYMALNYCH PRZEMIESZCZEŃ

Rozwiązanie równań infinitezymalnych przemieszczeń przeprowadzimy w oparciu o wprowadzone stany wymuszone, dające rozwiązania częściowe, odpowiadające pracy błonowej i pracy zgięciowej powłoki. Wiąże się z tym konieczność nałożenia na przemieszczenia poszczególnych stanów, rozpatrywanych niezależnie, pewnych dodatkowych więzi usztywniających zapewniających ciągłość uzyskanego rozwiązania. Tak więc możliwość rozpatrywania poszczególnych stanów niezależnie jest uwarunkowana wprowadzeniem dodatkowych więzi krępujących do ich ośrodków materialnych. Zewnętrznym wyrazem wprowadzonych więzi krępujących są funkcje obciążeń wymuszających, pełniące role spoiwa łączącego oba stany warunkiem nierozdzielności.

Stan infinitezymalnych przemieszczeń powierzchni środkowych powłok prostokreślnych jest opisany wektorem przemieszczenia $\vec{u}$, którego składowe wyrażone w bazie $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{m}$ przedstawia wzór (2.10). Ogólne równania stanu przemieszczenia zostały podane w rozdziale 2.2. Podstawowy związek składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia podaje wyrażenie (2.13). Występujące w nim składowe tensora odkształcenia wyznaczymy ze związków fizycznych (3.3) - (3.12).

Ogólne wyrażenie dla wyznaczenia poszczególnych składowych tensora odkształcenia γ_{ij} napiszemy w oparciu o pracę [9], [17].

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\, g_{il}\, g_{jk} - \nu\, g_{ij}\, g_{lk}\right]\tau^{lk}, \tag{6.1}$$

gdzie:

E - moduł Younga,

ν - stała Poissona.

Związek (2.13) tensora odkształcenia z wektorem przemieszczenia umożliwia wyznaczenie składowych przemieszczenia w^i, które będą sumami złożonymi z wpływów prac: błonowej $\bar{w}^i$ i zgięciowej $\hat{w}^i$, czyli

$$w^i = \bar{w}^i + \hat{w}^i. \tag{6.2}$$

Wielkości fizyczne składowych przemieszczeń w_i, otrzymamy z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \sqrt{g_{ii}}\, w^i, \\ \bar{w}_3 &= w^3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.1. Stan błonowy

Dla stanu błonowego, po wykorzystaniu (3.4) i (3.9), wyrażenie (6.1) przyjmie postać

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2Eh}\left[(1+\nu)\, g_{il}\, g_{jk} - \nu\, g_{ij}\, g_{lk}\right] \overline{N}^{lk}. \tag{6.4}$$

Znając składowe tensora odkształcenia γ_{ij}, obliczone z (6.4) możemy z zależności (2.13) wyznaczyć kontrawariantne tensory przemieszczenia $\overline{w}^i$. Rozpisany układ równań (2.13), przy równoczesnym wykorzystaniu wielkości geometrycznych (1.3), (1.7) i (1.8) wyniesie

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^1} + g_{12}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^1} = \gamma_{11},\\
&g_{12}\frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^1} + g_{22}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^1} + \frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^2} + g_{12}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\overline{w}^2 - 2b_{12}\overline{w}^3 = 2\gamma_{12},\\
&g_{12}\frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^2} + g_{22}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\overline{w}^1 + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\overline{w}^2 - b_{22}\overline{w}^3 = \gamma_{22}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Układ równań (6.5) po pewnych przekształceniach może być zapisany w dogodniejszej postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^1} + g_{12}\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^1} = \gamma_{11},\\
&g\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^1} + \frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}\overline{w}^2}{\partial u^2} - 2b_{12}\overline{w}^3 = 2\gamma_{12} - g_{12}\gamma_{11},\\
&g_{12}\frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^2} + \sqrt{g_{22}}\,\frac{\partial \sqrt{g_{22}}\,\overline{w}^2}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\overline{w}^1 - b_{22}\overline{w}^3 = \gamma_{22}.
\end{aligned} \tag{6.5'}$$

Dla układu ortogonalnego równania (6.5) znacznie się uproszczą i przyjmą kształt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^1} = \gamma_{11},\\
&g\frac{\partial \overline{w}^2}{\partial u^1} + \frac{\partial \overline{w}^1}{\partial u^2} - 2b_{12}\overline{w}^3 = 2\gamma_{12},\\
&\sqrt{g}\,\frac{\partial \sqrt{g}\,\overline{w}^2}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u^1}\overline{w}^1 - b_{22}\overline{w}^3 = \gamma_{22}.
\end{aligned} \tag{6.5''}$$

Ponieważ $g_{12} = g_{12}(u^2)$ jest funkcją tylko zmiennej u^2 (patrz (1.3)), to całkując pierwsze równanie układu (6.5'), otrzymamy

$$\bar{w}^1 + g_{12}\bar{w}^2 = \int \gamma_{11} du^1 + C(u^2). \tag{6.6}$$

Podstawienie (6.6) do drugiego równania układu (6.5') daje

$$g \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial u^1} - 2b_{12}\bar{w}^3 = 2\gamma_{12} - g_{12}\gamma_{11} - \int \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u^2} du^1 - \frac{\partial C(u^2)}{\partial u^2}. \tag{6.7'}$$

Z równania tego wyznaczymy $\bar{w}^3$ przy założeniu $b_{12} \neq 0$. Założenie to nie będzie spełnione tylko dla powierzchni prostokreślnych rozwijalnych.

$$\bar{w}^3 = \frac{1}{2b_{12}} \left[g \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial u^1} - 2\gamma_{12} + g_{12}\gamma_{11} + \int \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u^2} du^1 + \frac{\partial C(u^2)}{\partial u^2} \right]. \tag{6.7}$$

Dla powłok grupy I równanie (6.7') daje nam wprost rozwiązanie ze względu na $\bar{w}^2$. Pozostałe wielkości $\bar{w}^1$, $\bar{w}^3$ dla tej grupy powłok wyznaczymy z równania (6.6) i trzeciego równania układu (6.5'). Przechodząc do powłok grupy III, podstawmy (6.7) i $\bar{w}^1$ z równości (6.6) do trzeciego równania układu (6.5'), a wówczas po jego przekształceniu i uporządkowaniu dojdziemy do następującego równania różniczkowego

$$g \frac{b_{22}}{2b_{12}} \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial u^1} - \sqrt{g} \frac{\partial \sqrt{g}\, \bar{w}^2}{\partial u^2} + \frac{1}{2} g_{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \bar{w}^2 = \frac{b_{22}}{2b_{12}} (2\gamma_{12} - g_{12}\gamma_{11}) +$$

$$+ (g_{12} - \frac{b_{22}}{2b_{12}}) \left[\int \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial u^2} du^1 + \frac{\partial C(u^2)}{\partial u^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \left[\int \gamma_{11} du^1 + C(u^2) \right] - \gamma_{22}. \tag{6.8}$$

6.2. Stan zgięciowy

Warunek $\bar{N}^{ij} = 0$ charakteryzujący stan zgięciowy prowadzi do równości

$$\gamma_{ij} = 0, \tag{6.9}$$

wynikającej z wyrażeń (3.4), (6.4).
Równość (6.9) mówiąca o zerowaniu się składowych tensora odkształcenia γ_{ij} dla stanu zgięciowego, uwzględniona w drugim wyrażeniu (3.4), prowadzi do związku tensora naprężenia zgięciowego $\hat{t}^{ij}$ ze składowymi tensora $\hat{\varrho}_{ij}$ mieszanej deformacji zgięciowej

$$\hat{t}^{ij} = \lambda^* g^{ij} g^{mn} \hat{\varrho}_{mn} + 2\mu \hat{\varrho}^{ij}, \tag{6.10}$$

Rozwiązując równanie (6.10) ze względu na $\hat{\varrho}_{ij}$ otrzymamy

$$\hat{\varrho}_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\, g_{il}g_{jk} - \nu\, g_{ij}g_{lk}\right]\hat{\tau}^{lk}, \tag{6.11}$$

Występujący w (6.11) tensor naprężenia zgięciowego $\hat{\tau}^{lk}$ może być na podstawie drugiego równania układu (3.6″) zastąpiony tensorem momentów M^{lk} z równości

$$M^{lk} = -\frac{4}{3} h^3 \hat{\tau}^{lk}, \tag{6.12}$$

dającej

$$\hat{\varrho}_{ij} = -\frac{3}{4Eh^3}\left[(1+\nu)\, g_{il}g_{jk} - \nu\, g_{ij}g_{lk}\right] M^{lk}. \tag{6.13}$$

Następnie znajomość składowych tensora $\hat{\varrho}_{ij}$ mieszanej deformacji zgięciowej, obliczonych z wyrażenia (6.13), umożliwia rozwiązanie układu równań (2.19) ze względu na kontrawariantne tensory przemieszczenia $\hat{w}^1$ stanu zgięciowego.

Rozpisany układ równań (2.19) dla powłok prostokreślnych wyniesie

$$\frac{b_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^1} + \frac{\partial \delta^1}{\partial u^1} + g_{12}\frac{\partial \delta^2}{\partial u^1} + K\hat{w}^3 = 2\hat{\varrho}_{11},$$

$$b_{12}\frac{\partial \hat{w}^1}{\partial u^1} + \frac{b_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^1} - \frac{g_{12}b_{12}}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\hat{w}^2 + \frac{\partial \delta^1}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}\delta^2}{\partial u^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\delta^2 - (2Hb_{12} - Kg_{12})\,\hat{w}^3 - b_{12}\delta^3 = 2\hat{\varrho}_{12},$$

$$\frac{b_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^2} + \frac{g_{12}b_{12}}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\hat{w}^2 + \frac{b_{12}}{2g}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\hat{w}^1 + g_{12}\frac{\partial \delta^1}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{22}\delta^2}{\partial u^1} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\delta^2 - (2Hb_{12} - Kg_{12})\,\hat{w}^3 - b_{12}\delta^3 = 2\hat{\varrho}_{21}, \tag{6.14}$$

$$b_{12}\frac{\partial \hat{w}^1}{\partial u^2} + b_{22}\frac{\partial \hat{w}^2}{\partial u^2} + \left(H + \frac{b_{12}g_{12}}{2g}\right)\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\hat{w}^1 + \left[\left(H + \frac{b_{12}g_{12}}{2g}\right)\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \right.$$

$$+\frac{1}{2g}(b_{22}g_{12} - b_{12}g_{22})\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\right)\left[w^2 + g_{12}\frac{\partial \delta^1}{\partial u^2} + \right.$$

$$+\sqrt{g_{22}}\,\frac{\partial \sqrt{g_{22}}\,\delta^2}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\delta^1 - (2Hb_{22} - Kg_{22})\,\hat{w}^3 - b_{22}\delta^3 = 2\hat{\varrho}_{22}.$$

Dla układu ortogonalnego układ równań (6.14) przyjmie postać

$$\frac{b_{12}}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^1}+\frac{\partial\delta^1}{\partial u^1}+K\hat{w}^3=2\,\hat{\varrho}_{11},$$

$$b_{12}\,\frac{\partial\hat{w}^1}{\partial u^1}+\frac{b_{22}}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^1}+\frac{\partial\delta^1}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\delta^2-2Hb_{12}\hat{w}^3-b_{12}\delta^3=2\,\hat{\varrho}_{12},$$

$$\frac{b_{12}}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^2}+\frac{b_{12}}{2g}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\,\hat{w}^1+\frac{\partial g\delta^2}{\partial u^1}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\delta^2-2Hb_{12}\hat{w}^3-b_{12}\delta^3=2\,\hat{\varrho}_{21},\tag{6.14'}$$

$$b_{12}\,\frac{\partial\hat{w}^1}{\partial u^2}+b_{22}\,\frac{\partial\hat{w}^2}{\partial u^2}+H\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\,\hat{w}^1+\left[H\,\frac{\partial g}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\,b_{12}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\right]\hat{w}^2+$$

$$+\sqrt{g}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\delta^2}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\delta^1-(2Hb_{22}-Kg_{22})\,\hat{w}^3-b_{22}\delta^3=2\,\hat{\varrho}_{22}.$$

Dalsze uproszczenie równań (6.14$'$) uzyskamy dla powłok grupy I, sparametryzowanych w układzie ortogonalnym

$$\frac{\partial\delta^1}{\partial u^1}=2\,\hat{\varrho}_{11},$$

$$\frac{b_{22}}{g}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^1}+\frac{\partial\delta^1}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\delta^2=2\,\hat{\varrho}_{12},$$

$$\frac{\partial g\delta^2}{\partial u^1}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\delta^2=2\,\hat{\varrho}_{21},\tag{6.14''}$$

$$\frac{b_{22}}{g}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\hat{w}^2}{\partial u^2}+H\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\,\hat{w}^1+\sqrt{g}\,\frac{\partial\sqrt{g}\,\delta^2}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial g}{\partial u^1}\delta^1-2Hb_{22}\hat{w}^3-$$

$$-b_{22}\delta^3=2\,\hat{\varrho}_{22}.$$

Wielkości δ^i występujące w równaniach (6.14) są związane ze składowymi tensora przemieszczenia $\hat{w}^i$. Obecnie zajmiemy się wyprowadzeniem wzorów opisujących wielkości δ^i za pomocą składowych przemieszczenia $\hat{w}^i$. Znajdźmy z iloczynu wektorowego $\vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2{}'$, wektor jednostkowy $\vec{m}'$ prostopadły do powierzchni środkowej powłoki odkształconej

$$\sqrt{g'}\;\vec{m}'=\vec{r}_1{}'\times\vec{r}_2{}'=\vec{r}_1\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\vec{u}_2+\vec{u}_1\times\vec{r}_2+\vec{u}_1\times\vec{u}_2,\tag{6.15}$$

bo $\vec{r}_i{}'=\vec{r}_i+\vec{u}_i$ - patrz 2.2.

Pomijając w (6.15) iloczyn $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ jako wielkość małą oraz podstawiając $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \sqrt{g'}\,\vec{m}'$, napiszemy

$$\sqrt{g'}\ \vec{m}' = \sqrt{g'}\,\vec{m} + \vec{r}_1 \times \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \times \vec{r}_2. \tag{6.15'}$$

Wyznaczmy następnie z (2.6) wektor przemieszczenia $\vec{d}$, przy równoczesnym wykorzystaniu wyrażenia (6.15′)

$$\vec{d} = \frac{\sqrt{g} - \sqrt{g'}}{\sqrt{g'}}\,\vec{m} + \frac{1}{\sqrt{g'}}\left[\vec{r}_1 \times \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \times \vec{r}_2\right]. \tag{6.16}$$

Dla wersji uproszczonej można przyjąć $g' = g$, a wówczas

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\vec{r}_1 \times \vec{u}_2 + \vec{u}_1 \times \vec{r}_2\right]. \tag{6.16'}$$

Rozłóżmy wektor $\vec{u}_i$ w bazie $\vec{r}_i$, $\vec{m}$,

$$\vec{u}_i = \eta^{ik}\,\vec{r}_k + \eta^i\,\vec{m}, \tag{6.17}$$

a następnie podstawmy (6.17) do (6.16′)

$$\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\vec{r}_1 \times \vec{m}\eta^2 + \vec{m} \times \vec{r}_2\eta^1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_k\eta^{2k} + \vec{r}_k \times \vec{r}_2\eta^{1k}\right].$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu otrzamamy

$$\vec{d} = -\eta^1\vec{r}^1 - \eta^2\vec{r}^2 + (\eta^{11} + \eta^{22})\,\vec{m}. \tag{6.18}$$

Teraz z kolei obniżmy w (6.18) wskaźniki przy wektorach $\vec{r}^i$, a tym samym przejdźmy do bazy $\vec{r}_i$, $\vec{m}$

$$\vec{d} = -\eta^l g^{lk}\vec{r}_k + (\eta^{11} + \eta^{22})\,\vec{m}. \tag{6.19}$$

Porównanie wyrażeń (2.15) z (6.19) daje

$$\begin{aligned} \delta^k &= \eta^l\, g^{lk}, \\ \delta^3 &= -(\eta^{11} + \eta^{22}). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Natomiast porównanie (2.11) z (6.17) zezwala opisać η^l, η^{11}

$$\begin{aligned} \eta^l &= \hat{w}^k\, b_{kl} + \hat{w}^3_{,l}, \\ \eta^{11} &= b^1_1\,\hat{w}^3 - \hat{w}^1\big|_1. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Podstawienie wyrażeń (6.21) do równości (6.20) prowadzi do związku wielkości δ^k ze składowymi tensora przemieszczenia $\hat{w}^i$

$$\delta^i = (\hat{w}^k b_{kj} + \hat{w}^3_{,j}) g^{ij},$$
$$\delta^3 = b^k_k \hat{w}^3 - \hat{w}^k|_k. \tag{6.22}$$

Rozwiązując układy równań (6.14) i (6.22) wyznaczymy kontrawariantne składowe tensora przemieszczenia dla stanu zgięciowego. Kontrolą prowadzonych obliczeń będzie tożsamościowe spełnienie środkowych równań układu (6.14), to znaczy musi zachodzić równość

$$\varrho_{12} = \varrho_{21}, \tag{6.23}$$

wynikająca z symetrii kowariantnego tensora ϱ_{ij} określonego wyrażeniem (2.8). Symetria tensora ϱ_{ij} wyrażona warunkiem (6.23) świadczy o regularności powierzchni odkształconej, ponieważ parametry ϱ_{ij} opisują jej kształt.

6.3. Równania nierozdzielności

Na to, by obie formy różniczkowe, pierwsza i druga, powierzchni odkształconej były nimi w pewnym otoczeniu dowolnego punktu tego obszaru potrzeba i wystarcza by wyróżnik pierwszej formy g' był dodatnio określony oraz współczynniki g'_{ij} i b'_{ij} spełniały równania Gaussa i Codazziego. Wyróżnik g' obliczony z (2.3') po odrzuceniu wielkości małych wyższego rzędu wyniesie

$$g' = g\,(1 + 2g^{mn}\gamma_{mn}). \tag{6.24}$$

Dla infinitezymalnego stanu odkształceń jest zawsze

$$1 + 2g^{mn}\gamma_{mn} > 0 \tag{6.25}$$

bo

$$0 \leqslant |2g^{mn}\gamma_{mn}| < 1,$$

czyli

$$g' > 0, \tag{6.26}$$

jeśli

$$g > 0.$$

Równanie Gaussa powierzchni odkształconej posiada kształt [7]

$$R_{1212} = b'_{11}\, b'_{22} - b'_{12}\, b'_{21}. \tag{6.27}$$

Symbol R_{1212} - oznacza tensor Riemanna powierzchni. Tensor R_{1212} można wyrazić za pomocą współczynników pierwszej formy różniczkowej. Korzystając z wyników wyprowadzonych w książce [17] dla infinitezymalnego stanu odkształcenia napiszemy

$$R_{1212} = \overset{o}{R}_{1212} + 2\gamma_{12|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11}. \tag{6.28}$$

Symbol $\overset{o}{R}_{1212}$ - oznacza tensor Riemanna powierzchni przed odkształceniem. Z geometrii różniczkowej wiadomo, że

$$\overset{o}{R}_{1212} = b,$$

czyli wprowadzając w wyrażeniu (6.28) w miejsca tensorów Riemanna, wyróżniki drugich form różniczkowych, otrzymamy

$$b' = b + 2\gamma_{12|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11}. \tag{6.28'}$$

Z drugiej strony wyróżnik b' możemy obliczyć z wyrażenia (2.7'). Odrzucając iloczyny zawierające wielkości nieskończenie małe rzędu wyższego oraz podnosząc wskaźniki ij w bazie b_{ij} podobnie jak to zrobiono w (2.23) uzyskamy

$$b' = b(1 + 2\bar{b}^{mn}\varrho_{mn}). \tag{6.29}$$

Porównanie (6.29) z (6.28') daje następujący związek

$$2b\bar{b}^{mn}\varrho_{mn} = 2\gamma_{12|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11}. \tag{6.30}$$

Równanie Codazziego dla powierzchni odkształconej w ujęciu tensorowym napiszemy w oparciu o pracę [7]

$$b'_{ij\overset{*}{|}k} - b'_{ik\overset{*}{|}j} = 0, \tag{6.31}$$

gdzie symbol $\overset{*}{|}$ oznacza pochodną kowariantną obliczoną na powierzchni odkształconej.

Dla powierzchni będą tylko dwa niezależne równania Codazziego (6.31)

$$\begin{aligned} b'_{11\overset{*}{|}2} - b'_{12\overset{*}{|}1} &= 0, \\ b'_{22\overset{*}{|}1} - b'_{21\overset{*}{|}2} &= 0. \end{aligned} \tag{6.31'}$$

Podstawiając do (6.31′) wyrażenie (2.7′) napiszemy po rozwinięciu

$$\begin{aligned} 2\left(\varrho_{11}\overset{*}{|}_2 - \varrho_{12}\overset{*}{|}_1\right) + b_{11}\overset{*}{|}_2 - b_{12}\overset{*}{|}_1 &= 0, \\ 2\left(\varrho_{22}\overset{*}{|}_1 - \varrho_{21}\overset{*}{|}_2\right) + b_{22}\overset{*}{|}_1 - b_{21}\overset{*}{|}_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (6.31\ )$$

Znajomość symboli Christoffela Γ'^{k}_{ij} powierzchni odkształconej umożliwi nam przeprowadzenie obliczenia pochodnych wyrażeń (6.31″). Wiemy, że

$$\Gamma'^{k}_{ij} = \frac{1}{2}\, g'^{km}\left(g'_{jm,i} + g'_{mi,j} - g'_{ij,m}\right), \qquad (6.32)$$

ale podstawiając za g'_{ij} wyrażenia (2.3′) oraz przyjmując z pracy [17] dla infinitezymalnego stanu odkształceń

$$g'^{ij} = g^{ij} - 2\gamma^{ij} \qquad (6.33)$$

będziemy mogli dla małych odkształceń wyrażeniu (6.32) nadać postać

$$\Gamma'^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij} - \gamma^{km}\,\Gamma_{ijm} + g^{km}\gamma_{ijm}, \qquad (6.32')$$

gdzie Γ_{ijm} są symbolami Christoffela pierwszego rodzaju, a

$$\gamma_{ijm} = \gamma_{jm,i} + \gamma_{mi,j} - \gamma_{ij,m}. \qquad (6.34)$$

Mając Γ'^{k}_{ij} możemy obliczyć pochodne wyrażenia

$$\begin{aligned} b_{11}\overset{*}{|}_2 - b_{12}\overset{*}{|}_1 &= b_{12}|_2 - b_{12}|_1 + \\ &+ b_{k1}\left(\gamma^{km}\,\Gamma_{12m} - g^{km}\gamma_{12m}\right) - \\ &- b_{k1}\left(\gamma^{km}\,\Gamma_{11m} - g^{km}\gamma_{11m}\right), \end{aligned}$$

ale

$$b_{12}|_2 - b_{12}|_1 = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned} b_{11}\overset{*}{|}_2 - b_{12}\overset{*}{|}_1 &= b^{k}_{1}\left(\gamma_{km}\,\Gamma^{m}_{12} - g^{m}_{k}\gamma_{12m}\right) - \\ &- b^{k}_{2}\left(\gamma_{km}\,\Gamma^{m}_{11} - g^{m}_{k}\gamma_{11m}\right). \end{aligned}$$

Dalsze przekształcenie tego wyrażenia doprowadzi do postaci:

$$\begin{aligned} \overset{*}{b}_{11}\big|_2 - \overset{*}{b}_{12}\big|_1 = &- 2H(\vartheta_{11}\big|_2 - \vartheta_{12}\big|_1) + b_2^k \vartheta_{1k}\big|_1 - \\ &- b_1^k \vartheta_{k2}\big|_1 + (b_2^k \Gamma_{11}^m - b_1^k \Gamma_{12}^m)\vartheta_{km}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Podobnie postępując obliczymy pochodne wyrażenia

$$\begin{aligned} \overset{*}{b}_{22}\big|_1 - \overset{*}{b}_{21}\big|_2 = &- 2H(\vartheta_{22}\big|_1 - \vartheta_{12}\big|_2) + b_1^k \vartheta_{k2}\big|_2 - \\ &- b_2^k \vartheta_{k1}\big|_2 + (b_1^k \Gamma_{22}^m - b_2^k \Gamma_{12}^m)\vartheta_{km}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Wielkości (6.35) i (6.36) podstawione do układu (6.31″) dadzą następujący układ równań Codazziego

$$\begin{aligned} &2(\varrho_{11}\big|_2 - \varrho_{12}\big|_1) - 2H(\vartheta_{11}\big|_2 - \vartheta_{12}\big|_1) + b_2^k \vartheta_{k1}\big|_1 - b_1^k \vartheta_{k2}\big|_1 + \\ &\qquad + (b_2^k \Gamma_{11}^m - b_1^k \Gamma_{12}^m)\vartheta_{km} = 0, \\ &2(\varrho_{22}\big|_1 - \varrho_{21}\big|_2) - 2H(\vartheta_{22}\big|_1 - \vartheta_{21}\big|_2) + b_1^k \vartheta_{k2}\big|_2 - b_2^k \vartheta_{k1}\big|_2 + \\ &\qquad + (b_1^k \Gamma_{22}^m - b_2^k \Gamma_{12}^m)\vartheta_{km} = 0. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Równania (6.37) wraz ze związkiem (6.30) będziemy nazywali równaniami nierozdzielności dla powłok. Równania te dla infinitezymalnego stanu odkształcenia muszą być bezwzględnie spełnione, jeśli odkształcona powierzchnia środkowa powłoki ma być powierzchnią regularną.
Powłoki grupy I rozwijalne, sparametryzowane w układzie ortogonalnym dadzą następujące uproszczenia równań (6.37)

$$\begin{aligned} &\varrho_{11}\big|_2 - \varrho_{12}\big|_1 - H(\vartheta_{11}\big|_2 - 2\vartheta_{12}\big|_1) = 0, \\ &\varrho_{22}\big|_1 - \varrho_{21}\big|_2 - H(\vartheta_{22}\big|_1 + \Gamma_{12}^2 \vartheta_{22}) = 0. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Jeśli do równań nierozdzielności (6.30), (6.37) względnie (6.38) podstawimy związki (2.13) i (2.19) oraz (6.22), to uzyskamy spełnienie tożsamościowe tych równań.

6.4. Równania uzupełniające

W dalszych rozważaniach będzie potrzebny związek wiążący tensor momentów M^{ij} z przemieszczeniami w^i. Jeśli do drugiego równania układu(3.6″) podstawimy wyrażenie (3.4) oraz

$$F^{ij} = 2\hat{t}^{ij} + b^j_k \bar{t}^{ik}, \tag{6.39}$$

to po odpowiednim przekształceniu otrzymamy

$$\begin{aligned} M^{ij} = -\frac{2}{3}h^3 \Big\{ & 2\lambda^* g^{ij} g^{mn}\left[\varrho_{mn} - 3H\gamma_{mn}\right] + 4\mu\left[\varrho^{ij} - 3H\gamma^{ij}\right] + \\ & + b^j_k\left[\lambda^* g^{ik} g^{mn}\gamma_{mn} + 2\mu\gamma^{ik}\right] + 2K\Big[\lambda^*(g^{ij}\bar{b}^{mn} + g^{mn}\bar{b}^{ij})\gamma_{mn} + \\ & + 2\mu(\bar{b}^{jn}\gamma^i_n + \bar{b}^{in}\gamma^j_n)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Obniżając w równości (6.40) wskaźnik ij napiszemy

$$\begin{aligned} M_{ij} = -\frac{2}{3}h^3 \Big\{ & 2\lambda^* g_{ij} g^{mn}\left[\varrho_{mn} - 3H\gamma_{mn}\right] + 4\mu\left[\varrho_{ij} - 3H\gamma_{ij}\right] + \\ & + b_{jk}\left[\lambda^*\delta^k_i g^{mn}\gamma_{mn} + 2\mu\gamma^k_i\right] + 2K\Big[\lambda^*(g_{ij}\bar{b}^{mn}\gamma_{mn} + \\ & + \bar{b}^{ls} g_{il} g_{js} g^{mn}\gamma_{mn}) + 2\mu(\bar{b}^{ln} g_{jl}\gamma_{in} + \bar{b}^{ln} g_{il}\gamma_{jn})\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{6.40'}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned} A &= g^{mn}\gamma_{mn}, \\ B &= g^{mn}\varrho_{mn}, \\ C &= \bar{b}^{mn}\gamma_{mn}, \end{aligned} \tag{6.41}$$

a wówczas związkowi (6.40′) można nadać kształt

$$\begin{aligned} M_{ij} = \frac{2}{3}h^3 \Big\{ & 2\lambda^* g_{ij}\left[3AH - B\right] + 4\mu\left[3H\gamma_{ij} - \varrho_{ij}\right] - \\ & - b_{jk}\left[\lambda^* A\delta^k_i + 2\mu\gamma^k_i\right] - 2K\Big[\lambda^*(Cg_{ij} + A\bar{b}^{ls} g_{il} g_{js}) + \\ & + 2\mu(\bar{b}^{ln} g_{jl}\gamma_{in} + \bar{b}^{ln} g_{il}\gamma_{jn})\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{6.40''}$$

Uwaga: wskaźniki przy $\bar{b}^{ij}$ obniżyć w bazie b_{ij} - patrz rozdział 2.3. Dalsze uproszczenia zapisu uzyskamy, jeśli wprowadzimy następujące tensory kowariantne dla odpowiednich sum:

$$E_{ij} = (B + KC)\, g_{ij} - \frac{1}{2} A b_{ij},$$

$$S_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_{jk} \gamma^{k}_{i} + K(\bar{b}^{ln} g_{jl} \gamma_{in} + \bar{b}^{ln} g_{il} \gamma_{jn}). \tag{6.42}$$

Podstawienie (6.42) do (6.40″) daje

$$M_{ij} = \frac{2}{3}h^3 \left\{ 2\lambda^* \left[AHg_{ij} - E_{ij} \right] + 4\mu \left[3H\gamma_{ij} - S_{ij} \right] \right\}. \tag{6.40‴}$$

Wprowadzonym wielkościom (6.41) nadamy postać roboczą pozwalającą przejść z odkształceń na przemieszczenia. W tym celu obliczmy iloczyn zawierający pochodną kowariantną wielkości δ^{k} przy wykorzystaniu (6.22)

$$\delta^{k}\big|_{j}\, g_{ik} = (w^{l} b_{ln} + w^{3}_{,n})\big|_{j}\, g^{kn} g_{ik} = (w^{l} b_{ln} + w^{3}_{,n})\big|_{j} \delta^{n}_{i},$$

czyli

$$\delta^{k}\big|_{j} g_{ik} = (w^{l} b_{li} + w^{3}_{,i})\big|_{j}. \tag{6.43}$$

Drugiemu wyrażeniu (6.22) może być nadana postać

$$\delta^{3} = 2Hw^{3} - w^{k}\big|_{k}, \tag{6.44}$$

ponieważ

$$b^{k}_{k} = 2H.$$

Związki (2.13) i (2.19) uzupełnione wyrażeniami (6.43), (6.44) podstawione do sum (6.41) dadzą po rozwinięciu:

$$A = w^{k}\big|_{k} - 2Hw^{3},$$

$$B = b^{i}_{k} w^{k}\big|_{i} + \frac{1}{2} w^{k}\, b^{j}_{k}\big|_{j} + \frac{1}{2} g^{ij} w^{3}\big|_{ij} - (2H^2 - K)\, w^{3}, \tag{6.45}$$

$$C = \frac{1}{b}\left[b_{22} g_{1k} w^{k}\big|_{1} - b_{12}(g_{1k} w^{k}\big|_{2} + g_{2k} w^{k}\big|_{1}) \right] - 2w^{3}.$$

Dla ilustracji napiszemy rozwinięty układ równań różniczkowych (6.40″) dla powłok grupy I rozwijalnych, sparametryzowanych w układach współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych

$$M_{11} = -\frac{4}{3}h^3\Big\{\lambda^*\Big[2Hw^k\Big|_k + H\Big|_2 w^2 + \frac{1}{2}w^3\Big|_{11} + \frac{1}{2g}w^3\Big|_{22}\Big] +$$

$$+\mu\Big[2Hw^1\Big|_1 + w^3\Big|_{11}\Big]\Big\},$$

$$M_{12} = -\frac{4}{3}\mu h^3\Big[b_{22}w^2\Big|_1 + b_{k1}\Big|_2 w^k + w^3\Big|_{12}\Big],$$

$$M_{21} = \frac{4}{3}\mu h^3\Big[Hw^1\Big|_2 - \frac{1}{2}b_{22}w^2\Big|_1 - b_{k2}\Big|_1 w^k - w^3\Big|_{21}\Big], \qquad (6.46)$$

$$M_{22} = -\frac{4}{3}h^3 g\Big\{\lambda^*\Big[Hw^k\Big|_k + H\Big|_2 w^2 + \frac{1}{2}w^3\Big|_{11} + \frac{1}{2g}w^3\Big|_{22}\Big] +$$

$$+\mu\Big[2Hw^k\Big|_k + 2H\Big|_2 w^2 + \frac{1}{g}w^3\Big|_{22}\Big]\Big\}.$$

Równania środkowe układu (6.46) dadzą następujący związek po wyrugowaniu pochodnych przemieszczenia w^3

$$M_{21} - M_{12} = \frac{4}{3}\mu h^3 H\Big[w^1\Big|_2 + wg^2\Big|_1\Big], \qquad (6.47)$$

ponieważ

$$w^3\Big|_{12} = w^3\Big|_{21},$$

oraz

$$b_{k1}\Big|_2 - b_{k2}\Big|_1 = 0.$$

Przejdziemy obecnie do wydzielania stanu błonowego $\bar{N}^{ij}$ z równań równowagi (4.1). Wyrażenie (3.10) wykorzystane w układach równań (4.1) prowadzą do układu równań stanu błonowego przy odpowiednio dobranych funkcjach obciążeń, bo uzyskane po przekształceniu równania

$$\bar{N}^{ij}\Big|_i + 6H\Big|_i M^{ij} + (6H\delta^j_i - b^j_i)\,Q^i + P^j = 0,$$

$$\bar{N}^{ij}b_{ij} + 6HM^{ij}b_{ij} + Q^j\Big|_j + P^3 = 0, \qquad (6.48)$$

można zapisać w postaci (5.4), jeśli funkcje obciążeń wymuszających $\bar{P}^j$ spełnią następujący układ równań

$$\bar{P}^j = 6H\Big|_i M^{ij} + (6H\delta^j_i - b^j_i)\,Q^i + P^j,$$

$$\bar{P}^3 = 6HM^{ij}b_{ij} + Q^j\Big|_j + P^3, \qquad (6.49)$$

wskaźnik j przyjmuje wartości 1, 2.

Natomiast obciążenia $\hat{P}^j$, $\hat{P}^3$ wymuszające stan zgięciowy muszą spełniać pierwsze i trzecie równanie układu (5.28). Wyznaczając z nich obciążenia $\hat{P}^j$, $\hat{P}^3$ napiszemy

$$\begin{aligned} \hat{P}^j &= -\left[6H\big|_i M^{ij} + (6H\delta^j_i - b^j_i)\,Q^i\right], \\ \hat{P}^3 &= -\left[6HM^{ij}b_{ij} + Q^j\big|_j\right]. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Dodając stronami (6.49) i (6.50) uzyskamy zgodnie z założeniem tożsamość

$$\bar{P}^j + \hat{P}^j = P^j.$$

Siły błonowe $\bar{N}^{ij}$ opisane wzorami (3.9) po podstawieniu wielkości τ^{ij} z (3.4) i wykorzystaniu oznaczeń (6.41) będą mogły być związane z odkształceniami wzorami

$$\bar{N}^{ij} = 2h\left[\lambda^* A g^{ij} + 2\mu\gamma^{ij}\right], \tag{6.51}$$

albo w ujęciu kowariantnym

$$\bar{N}_{ij} = 2h\left[\lambda^* A g_{ij} + 2\mu\gamma_{ij}\right]. \tag{6.52}$$

Jeśli z równań (6.40″), (6.52) wyznaczymy tensory γ_{ij} i ϱ_{ij}, to będą one wówczas wyrażone za pomocą tensorów $\bar{N}_{ij}$, M_{ij} zależnych od obciążeń wymuszających $\bar{P}_i$, $\hat{P}_i$ – patrz rozwiązanie w rozdziale 5. Takie przedstawienie tensorów γ_{ij} i ϱ_{ij} pozwala w ramach wersji uproszczonej, po odrzuceniu wielkości małych rzędu wyższego, wprowadzić uproszczenia w równaniach (6.40‴) prowadzące do związków (6.13). Podobnie możemy uprościć układ równań (6.38). Tak więc zbiorcze równania nierozdzielności (6.30) i (6.38) oraz związki (6.40‴) i (6.52), wersji uproszczonej, przyjmą kształt:

$$\begin{aligned} 2b\bar{b}^{mn}\varrho_{mn} &= 2\gamma_{12|12} - \gamma_{11|22} - \gamma_{22|11}, \\ \varrho_{11|2} - \varrho_{12|1} &= 0, \\ \varrho_{22|1} - \varrho_{21|2} &= 0, \end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{ij} &= 4\mu h\left[\alpha A g_{ij} + \gamma_{ij}\right], \\ M_{ij} &= -\frac{8}{3}\mu h^3\left[\alpha B g_{ij} + \varrho_{ij}\right], \end{aligned} \tag{6.54}$$

gdzie
$$\alpha = \frac{\lambda^*}{2\mu}.$$

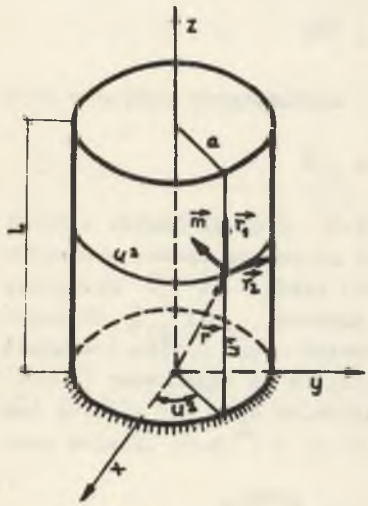
Równania nierozdzielności (6.30), (6.38) względnie ich wersja uproszczona (6.53) mają podstawowe znaczenie dla przedstawionej w pracy teorii, są one bowiem matematycznym opisem więzi nałożonych na wymuszone stany błonowy i zgięciowy rozpatrywane niezależnie.

Równania te mogą posłużyć do wyznaczenia funkcji obciążeń wymuszających występujących w rozwiązaniach ogólnego układu równań powłok prostokreślnych.

7. PRZYKŁADY

7.1. Powłoka walcowa

Dana jest powłoka walcowa zamknięta o promieniu a i wysokości l rys.3 zamocowana u swej podstawy i obciążona ciężarem własnym $\vec{q}$, parciem cieczy znajdującej się wewnątrz $\vec{p}$, oraz parciem wiatru $\vec{W}$.



Rys. 3

7.1.1. Opis geometryczny

Równanie wektorowe powierzchni środkowej:

$$\vec{r} = a\,(\cos u^2\,\vec{i} + \sin u^2\,\vec{j}) + u^1\vec{k}, \tag{7.1}$$

Zmienne u^1 i u^2 są zawarte w przedziałach

$$0 \leqslant u^1 \leqslant l, \qquad 0 \leqslant u^2 \leqslant 2\pi. \tag{7.2}$$

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej oraz ich wyróżniki

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = g = a^2, \qquad b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = a, \quad b = 0. \tag{7.3}$$

Krzywizny - gaussowska i średnia

$$K = 0, \qquad H = \frac{1}{2a}. \tag{7.4}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju dla powierzchni walcowej są równe zeru

$$\Gamma_{ij}^{k} = 0. \tag{7.5}$$

7.2. Ogólny układ równań powłok walcowych

7.2.1. Stan błonowy

Wyrażenia (5.6), (5.8) i (5.10) określające napięcia $\bar{N}^{ij}$ stanu błonowego dla powłoki walcowej będą równe

$$\bar{N}^{22} = -\frac{\bar{P}^3}{a},$$

$$\bar{N}^{12} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial \bar{P}^3}{\partial u^2}\,du^1 - \int \bar{P}^2 du^1 + \frac{1}{a^3} C_1(u^2), \tag{7.6}$$

$$\bar{N}^{11} = -\int \frac{\partial \bar{N}^{12}}{\partial u^2}\,du^1 - \int \bar{P}^1 du^1 + \frac{1}{a} C_2(u^2).$$

Składowe tensora odkształcenia γ_{ij} dla powłoki walcowej napiszemy w oparciu o wyrażenia (6.4)

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2Eh}\left[\bar{N}^{11} - \nu a^2 \bar{N}^{22}\right],$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1+\nu}{2Eh} a^2 \bar{N}^{12}, \tag{7.7}$$

$$\gamma_{22} = \frac{a^2}{2Eh}\left[a^2 \bar{N}^{22} - \nu \bar{N}^{11}\right].$$

7.2.2. Stan zgięciowy

Dla powłoki walcowej pochodne kowariantne $H|_i$ są równe zeru, czyli układ równań (5.30) będzie układem dwóch równań o niewiadomych Q^1 i Q^2. Wyznaczone z tego układu kontrawariantne tensory Q^i dla wielkości geometrycznych określonych wzorami (7.3) - (7.5) wyniosą

$$Q^1 = -\frac{a}{3}\hat{P}^1,$$

$$Q^2 = -\frac{a}{2}\hat{P}^2. \tag{7.8}$$

Z trzeciego równania układu (5.28) wyznaczymy M^{22}

$$M^{22} = -\frac{1}{3}\left[\frac{\partial Q^1}{\partial u^1} + \frac{\partial Q^2}{\partial u^2} + \hat{P}^3\right].$$

Podstawienie do tego równania wyrażeń (7.8) daje

$$M^{22} = \frac{a}{3}\left[\frac{1}{3}\frac{\partial \hat{P}^1}{\partial u^1} + \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{P}^2}{\partial u^2}\right] - \frac{1}{3}\hat{P}^3. \tag{7.9}$$

Drugie równanie układu (5.32) dla powierzchni walcowej przyjmie postać

$$\frac{\partial M^{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial M^{22}}{\partial u^2} - Q^2 = 0.$$

Całkując powyższe równanie względem zmiennej u^1, otrzymamy

$$M^{12} = -\int \frac{\partial M^{12}}{\partial u^2}\, du^1 + \int Q^2 du^1 + C_3\ (u^2). \tag{7.10}$$

Funkcję M^{11} wyznaczymy z pierwszego równania układu (5.32). Równanie to dla powierzchni walcowej wyniesie

$$\frac{\partial M^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial M^{12}}{\partial u^2} - Q^1 = 0,$$

skąd

$$M^{11} = -\int \frac{\partial M^{12}}{\partial u^2}\, du^1 + \int Q^1 du^1 + C_4\ (u^2). \tag{7.11}$$

Napięcia zgięciowe $\hat{N}^{ij}$ uzyskamy z wzoru

$$\hat{N}^{ij} = 6HM^{ij},$$

patrz rozdz. 5.2.
Dla powłoki walcowej jest $H = \frac{1}{2a}$, czyli

$$\hat{N}^{ij} = \frac{3}{a} M^{ij}. \tag{7.12}$$

Składowe tensora mieszanego ϱ_{ij} deformacji zgięciowej obliczymy ze związku (6.13)

$$\varrho_{11} = -\frac{3}{4Eh^3}\left[M^{11} - \nu a^2 M^{22}\right],$$

$$\varrho_{12} = -\frac{3(1+\nu)}{4Eh^3}\ a^2 M^{12}, \tag{7.13}$$

$$\varrho_{22} = -\frac{3a^2}{4Eh^3}\left[a^2 M^{22} - \nu M^{11}\right].$$

7.2.3. Równania uzupełniające

Funkcje obciążeń wymuszających, występujące w rozwiązaniach stanów błonowego i zgięciowego, znajdziemy rozwiązując układ równań nierozdzielności. Posłużymy się wersją uproszczoną równań (6.53), które dla powłoki walcowej przyjmą kształt

$$2a\varrho_{11} = 2\gamma_{12,12} - \gamma_{11,22} - \gamma_{22,11},$$

$$\varrho_{11,2} - \varrho_{12,1} = 0, \tag{7.14}$$

$$\varrho_{22,1} - \varrho_{21,2} = 0.$$

Podstawiając do dwóch ostatnich równań układu (7.14) wielkości (7.13) napiszemy

$$(M^{11} - a^2 M^{22})_{,2} - (1+\nu)\, a^2 M^{12}_{,1} = 0,$$

$$(a^2 M^{22} - M^{11})_{,1} - (1+\nu)\, M^{12}_{,2} = 0.$$

Powyższy układ równań, po przekształceniu i wykorzystaniu równań równowagi (5.28) można też przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}(M^{11} + a^2 M^{22})_{,2} - (1+\nu)\, a^2 Q^2 &= 0,\\ (M^{11} + a^2 M^{22})_{,1} - (1+\nu)\, Q^1 &= 0.\end{aligned} \tag{7.15}$$

Wprowadzając do sumy

$$B = g^{mn}\varrho_{mn}$$

wielkość ϱ_{ij} obliczoną z drugiego wyrażenia (6.54) otrzymamy

$$g_{ij} M^{ij} = -\frac{8\mu h^3}{3}(\alpha+\beta)\, B. \tag{7.16}$$

Widzimy, że lewa strona wyrażenia (7.16) dla powłoki walcowej sparametryzowanej w układzie ortogonalnym jest sumą występującą w układzie równań (7.15), czyli

$$\begin{aligned}\frac{8\mu h^3}{3}(\alpha+\beta)\, B_{,2} + (1+\nu)\, a^2 Q^2 &= 0,\\ \frac{8\mu h^3}{3}(\alpha+\beta)\, B_{,1} + (1+\nu)\, Q^1 &= 0.\end{aligned} \tag{7.15'}$$

Rugując z wyrażeń (7.15') funkcję B, uzyskamy w ramach teorii uproszczonej następujący związek wiążący kontrawariantne tensory sił tnących

$$Q^1_{,2} - a^2 Q^2_{,1} = 0. \tag{7.17}$$

Natomiast uwzględniając w (7.15′) wyrażenia (7.8) uzyskamy kontrawariantne tensory obciążeń wymuszających $\hat{P}^1$, $\hat{P}^2$, które będą jedynie związane z odpowiednimi pochodnymi funkcji B:

$$\hat{P}^1 = \frac{8\mu}{1+\nu} (\alpha + \beta) \left(\frac{h}{a}\right)^3 a^2 B_{,1},$$
$$\hat{P}^2 = \frac{16\mu}{3(1+\nu)} (\alpha + \beta) \left(\frac{h}{a}\right)^3 B_{,2}. \tag{7.18}$$

Podstawiając do prawej strony pierwszego równania układu (7.14), wielkości (7.7) oraz dokonując pewnych przegrupowań, napiszemy

$$2a\,\varrho_{11} = \frac{1}{2Eh}\Big\{(1+\nu)\, a^2 \left[2\bar{N}^{12}_{,12} + \bar{N}^{11}_{,11} + \bar{N}^{22}_{,22}\right] - a^2(\bar{N}^{11} + a^2\bar{N}^{22})_{,11} - (\bar{N}^{11} + a^2\bar{N}^{22})_{,22}\Big\}. \tag{7.19}$$

Uzyskana z równań równowagi (5.4), dla powłoki walcowej, zależność

$$2\bar{N}^{12}_{,12} + \bar{N}^{11}_{,11} + \bar{N}^{22}_{,22} = -(\bar{P}^1_{,1} + \bar{P}^2_{,2}),$$

wraz z sumą

$$g_{ij}\,\bar{N}^{ij} = 4\mu h\,(\alpha + \beta)\, A,$$

podstawione do (7.19) dadzą

$$2a\,\varrho_{11} = \frac{1}{2Eh}\Big\{4\mu h\,(\alpha+\beta)\left[a^2 A_{,11} + A_{,22}\right] + (1+\nu)\, a^2 \left[\bar{P}^1_{,1} + \bar{P}^2_{,2}\right]\Big\}. \tag{7.19′}$$

Lewą stronę wyrażenia (7.19′) możemy z kolei przedstawić za pomocą wielkości (7.13), a wtedy

$$2a\,\varrho_{11} = -\frac{3a}{2Eh^3}\left[M^{11} - \nu a^2 M^{22}\right],$$

albo po wykorzystaniu (7.16)

$$2a\,\varrho_{11} = \frac{3a}{2Eh^3}\left[\frac{8\mu h^3}{3}(\alpha+\beta)\, B + (1+\nu)\, a^2 M^{22}\right]. \tag{7.20}$$

Porównanie (7.19′) z (7.20) daje następujący związek

$$M^{22} + \frac{4\mu}{3(1+\nu)}(\alpha+\beta)\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[a^2 A_{,11} + A_{,22} + 2aB\right] = -\frac{a}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[\bar{P}^1_{,1} + \bar{P}^2_{,2}\right]. \tag{7.21}$$

Związek ten dla wersji uproszczonej może być zapisany w postaci:

$$M^{22} + \frac{4\mu}{3(1+\nu)} (\alpha+\beta) \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[a^2 A_{,11} + A_{,22} + 2a\ B\right] = 0, \tag{7.22}$$

bo prawa strona (7.21) jest wielkością małą rzędu wyższego w porównaniu z M^{22} wziętym z wyrażenia (7.9). Obliczmy drugą pochodną wyrażenia (7.11)

$$M^{11}_{,11} = M^{22}_{,22} - Q^2_{,2} + Q^1_{,1},$$

a następnie za M^{11} podstawmy wielkość z sumy (7.16), to wówczas uzyskamy równanie

$$a^2 M^{22}_{,11} + M^{22}_{,22} - Q^2_{,2} + Q^1_{,1} = -\frac{8\mu\ h^3}{3} (\alpha+\beta)\ B_{,11}, \tag{7.23}$$

które po uwzględnieniu (7.15′) i (7.22) przyjmie postać

$$a^2 X_{,11} + X_{,22} + 2(1-\nu)\ a^3\ B_{,11} = 0, \tag{7.23′}$$

gdzie

$$X = a^2 A_{,11} + A_{,22}. \tag{7.24}$$

Trzecie równanie układu (5.28) po wykorzystaniu (5.15′) daje

$$3M^{22} = \frac{8}{3(1+\nu)} (\alpha+\beta) \left(\frac{h}{a}\right)^3 a\ Y - \hat{P}^3, \tag{7.25}$$

gdzie

$$Y = a^2 B_{,11} + B_{,22}. \tag{7.26}$$

Podstawiając (7.25) do wyrażenia (7.22) znajdziemy funkcję $\hat{P}^3$

$$\hat{P}^3 = \frac{4\mu}{3(1+\nu)} (\alpha+\beta) \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[3X + 2a\ (Y + 3B)\right]. \tag{7.27}$$

Wyrażenia (7.18) i (7.27) przedstawiające funkcje obciążeń wymuszających $\hat{P}^i$ zależą jedynie od wielkości A i B, które są funkcjami opisującymi kształt zdeformowanej powłoki.

Obecnie przejdziemy do opisu funkcji kształtu A i B. Jeśli w równaniu (7.23) w miejsce M^{22} podstawimy (7.25), a za Q^1 wprowadzimy (7.8), to po uporządkowaniu będzie

$$\frac{8\mu\ a}{3(1+\nu)} (\alpha+\beta) \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[a^2 Y_{,11} + Y_{,22} + 3(1+\nu) a^2 B_{,11}\right] = a^2 \hat{P}^3_{,11} + \hat{P}^3_{,22} + \\ + a\hat{P}^1_{,1} - \frac{3}{2}\ a\ \hat{P}^2_{,2}. \tag{7.28}$$

Suma

$$\bar{N}^{11} + a^2\bar{N}^{22} = 4\mu h\ (\alpha+\beta)A,$$

zróżniczkowana dwukrotnie względem zmiennej u^1,celem wprowadzenia w miejsce $\bar{N}^{11}$, $\bar{N}^{22}$ wielkości (7.6), daje równanie

$$-\ 4\mu ha\ (\alpha+\beta)A_{,11} = a^2\bar{P}^3_{,11} + \bar{P}^3_{,22} + a\bar{P}^1_{,1} - a\bar{P}^2_{,2}, \qquad (7.29)$$

które dodane do (7.28) pozwoli na zapis

$$\frac{8\mu a}{3(1+\ )}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3\left[a^2Y_{,11} + Y_{,22} + 3(1+\nu)a^2B_{,11} + B_{,22}\right] - $$
$$-\ 4\mu h\ (\alpha+\beta)aA_{,11} = P, \qquad (7.30)$$

gdzie

$$P = a^2P^3_{,11} + P^3_{,22} + a(P^1_{,1} - P^2_{,2}), \qquad (7.31)$$

bo

$$P^i = \bar{P}^i + \hat{P}^i.$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań (7.23′) i (7.30) o niewiadomych A i B. Rugując z nich funkcję B uzyskamy równanie różniczkowe cząstkowe rzędu ósmego ze względu na funkcję A.
Przyjmując

$$Z = a^2X_{,11} + X_{,22} = -2(1-\nu)a^3B_{,11}, \qquad (7.32)$$

otrzymamy

$$a^2\left[a^2Z_{,11} + Z_{,22}\right]_{,11} + \left[a^2Z_{,11} + Z_{,22}\right]_{,22} + 3(1+\nu)a^2Z_{,11} + Z_{,22} +$$
$$+\ 3(1-\nu^2)\ \left(\frac{a}{h}\right)^2\ a^4A_{,1111} = -\ \frac{3(1-\nu^2)}{4\mu(\alpha+\beta)}\ \left(\frac{a}{h}\right)^3\ a^2P_{,11}. \qquad (7.33)$$

Równanie (7.33) jest ogólnym równaniem różniczkowym rzędu ósmego wersji uproszczonej, uwzględniającym dowolny sposób obciążenia i podparcia powłoki walcowej.
Wyrażenia opisujące wielkości sił wewnętrznych w powłoce, po pewnych przekształceniach i wykorzystaniu użytych oznaczeń, można przedstawić w następującej postaci dogodnej do formułowania warunków brzegowych

Siły błonowe

$$\bar{N}^{11} = - a^2\bar{N}^{22} + 4\mu h\ (\alpha+\beta)\ A,$$

$$\bar{N}^{12} = -\int \bar{N}^{22}_{,2}\,du^1 + \int \hat{P}^2du^1 - \int P^2du^1 + \frac{1}{a^3} C_1(u^2), \qquad (7.34)$$

$$\bar{N}^{22} = \frac{1}{a}\left[\hat{P}^3 - P^3\right],$$

Momenty i siły tnące

$$M^{11} = \frac{4\mu}{3(1+\nu)}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3 a^2\left[X - 2\nu aB\right],$$

$$M^{12} = \frac{4\mu}{3(1+\nu)}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3 \int X_{,2}du^1 + C_3\ (u^2), \qquad (7.35)$$

$$M^{22} = -\frac{4\mu}{3(1+\nu)}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3\left[X + 2aB\right],$$

$$Q^1 = -\frac{8\mu}{3(1+\nu)}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3 a^3B_{,1},$$

$$(7.36)$$

$$Q^2 = -\frac{8\mu}{3(1+\nu)}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3 aB_{,2}.$$

Siły przekrojowe

$$N^{11} = - a^2N^{22} + 4\mu h(\alpha+\beta)\left[A - \frac{2h^2}{a}B\right],$$

$$N^{12} = -\int \bar{N}^{22}_{,2}\,du^1 - \frac{1}{2}\int \hat{P}^2du^1 - \int P^2du^1 + \frac{1}{a^3}C_1(u^2) + \frac{3}{a}C_3(u^2),$$

$$(7.37)$$

$$N^{22} = \frac{8\mu}{3(1+\nu)}\ (\alpha+\beta)\ \left(\frac{h}{a}\right)^3 Y - \frac{1}{a}P^3.$$

Kontrawariantne tensory przemieszczenia w^i wyznaczymy z (6.5") po scałkowaniu.

Całkując wyrażenia

$$w^1_{,1} = \gamma_{11},$$

$$a^2w^2_{,2} + w^1_{,2} = 2\gamma_{12}, \qquad (7.38)$$

$$a^2w^2_{,2} - aw^3 = \gamma_{22},$$

otrzymamy

$$w^1 = \int \gamma_{11} du^1 + C_1(u^2),$$

$$w^2 = \frac{1}{a^2} \int \left[2\gamma_{12} - w^1_{,2} \right] du^1 + C_2(u^2), \tag{7.39}$$

$$w^3 = -\frac{1}{a} \left[\gamma_{22} - a^2 w^2_{,2} \right].$$

Wielkości γ_{ij} występujące w (7.39) należy przyjąć z (7.7). Dla osiowej symetrii odkształceń równania różniczkowe rozwiązujące (7.23′) i (7.33) znacznie się uproszczą i przyjmą kształt

$$X + 2(1\nu)a\,B = C_1,$$

$$a^2 X_{,11} + 3(1+\nu)\,X + 3(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2 A = -\frac{3(1-\nu^2)}{4(\alpha+\beta)}\left(\frac{a}{h}\right)^3 \bar{P} + C_2. \tag{7.40}$$

Wielkości C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi, natomiast

$$X = a^2 A_{,11},$$

$$\bar{P} = P^3 + \frac{1}{a}\int P^1 du^1. \tag{7.41}$$

Rozwiązanie równania ogólnego (7.33) względnie dla osiowej symetrii równania drugiego z układu (7.40) może być zapisane jako suma całek ogólnej równania jednorodnego A^o i szczególnej równania niejednorodnego A^s

$$A = A^o + A^s. \tag{7.42}$$

7.2.4. Równania uzupełniające uściślone

Równania różniczkowe (6.46) dla powłoki walcowej przyjmą postać

$$M_{11} = -\frac{2h^3}{3a^2}\left[(\lambda^* + 2\mu)\, a w^1_{,1} + 2\lambda^* a w^2_{,2} + (\lambda^* + 2\mu) a^2 w^3_{,11} + \lambda^* w^3_{,22} \right],$$

$$M_{12} = -\frac{4}{3}\mu h^3 \left[a w^2_{,1} + w^3_{,12} \right],$$

$$M_{21} = -\frac{2\mu h^3}{3a}\left[a^2 w^2_{,1} - w^1_{,2} + 2a w^3_{,21} \right], \tag{7.43}$$

$$M_{22} = -\frac{2}{3}h^3 \left[(\lambda^* + 2\mu) a w^k_{,k} + \lambda^* a^2 w^3_{,11} + (\lambda^* + 2\mu) w^3_{,22} \right].$$

Natomiast związki (6.5″) i (6.14″) będą równe

$$
\begin{aligned}
\gamma_{11} &= w^1_{,1}, \\
2\gamma_{12} &= w^1_{,2} + a^2 w^2_{,1}, \\
\gamma_{22} &= a^2 w^2_{,2} - aw^3, \\
2\varrho_{11} &= w^3_{,11}, \\
2\varrho_{12} &= aw^2_{,1} + w^3_{,12}, \\
2\varrho_{22} &= 2aw^2_{,2} + w^3_{,22} - w^3.
\end{aligned}
\tag{7.44}
$$

Korzystając z odpowiednich sum (6.41) oraz (6.45) będziemy mogli napisać

$$
\varrho_{22} = a^2(B - \varrho_{11}) \tag{7.45}
$$

Podstawienie do (7.45) wyrażeń (7.44) daje

$$
2aw^2_{,2} = - W + 2w^3 + 2a^2B, \tag{7.46}
$$

gdzie

$$
W = a^2w^3_{,11} + w^3_{,22} + w^3. \tag{7.47}
$$

Podobnie z pierwszego wyrażenia (6.45) po podstawieniu (7.46) wyznaczymy

$$
2aw^1_{,1} = W - 2a^2B + 2aA. \tag{7.48}
$$

Wielkości (7.46) i (7.48) wprowadzone do układu równań (7.43) dadzą po podniesieniu wskaźników

$$
\begin{aligned}
M^{11} &= - \frac{2}{3}\mu a \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[(\alpha+\beta) W + 2a^2w^3_{,11} - 2a^2B + 2\beta aA\right], \\
M^{22} &= - \frac{4\mu}{3a} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[\beta W - a^2w^3_{,11}\right].
\end{aligned}
\tag{7.49}
$$

Funkcję M^{12} przedstawimy jako pochodną $M^{12}_{,2}$, ponieważ wtedy wykorzystamy wyrażenie (7.46)

$$
M^{12}_{,2} = - \frac{2}{3}\mu a \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[W - 2a^2w^3_{,11} + 2a^2B\right]_{,1}. \tag{7.49}
$$

Równanie (6.47) po wykorzystaniu (6.52) i (7.44) umożliwia w najprostszy sposób opisać pozostałą wielkość M^{21}

$$M^{21} = M^{12} + \frac{h^2}{3a} + \frac{h^2}{3a}\, \bar{N}^{12}. \qquad (7.49)$$

W równaniach (7.49) parametry α i β są równe

$$\alpha = \frac{\lambda^*}{2\mu},$$

$$\beta = 1 + \alpha.$$

Obecnie rozpiszemy układ równań (6.52) podstawiając równocześnie związki (7.44) oraz (7.46) - (7.48)

$$\bar{N}^{11} = 2\mu \frac{h}{a}\left[W - 2a^2 B + 2\beta aA\right],$$

$$\bar{N}^{22} = -\frac{2\mu}{a^2}\frac{h}{a}\left[W - 2a^2 B - 2\alpha aA\right]. \qquad (7.50)$$

Kontrawariantny tensor $\bar{N}^{12}$ przedstawimy jako różniczkę wziętą względem zmiennych u^1, u^2, bo w takim ujęciu można wykorzystać wyrażenia (7.46) i (7.48)

$$\bar{N}^{12}_{,12} = -\frac{\mu}{a^2}\frac{h}{a}\left[a^2\,(W - 2w^3 - 2a^2 B)_{,11} - (W - 2a^2 B + 2aA)_{,22}\right]. \qquad (7.51)$$

Tensory sił tnących Q^i wyznaczymy z drugiego wyrażenia układu równań równowagi (5.28).
Równanie

$$M^{11}_{,1} + M^{21}_{,2} - Q^1 = 0,$$

daje po podstawieniu (7.49)

$$Q^1 = -\frac{4}{3}\mu\beta a\, \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[W + aA\right]_{,1} + \frac{h^2}{3a}\, \bar{N}^{12}_{,2}, \qquad (7.51)$$

Natomiast drugie równanie

$$M^{12}_{,1} + M^{22}_{,2} - Q^2 = 0,$$

zróżniczkowane względem zmiennej u^2 po uwzględnieniu (7.49) prowadzi do wyrażenia

$$Q^2_{,2} = \frac{2}{3}\frac{\mu}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[a^2\,(W - 2w^3 - 2a^2 B)_{,11} - 2\beta W_{,22}\right]. \qquad (7.52)$$

Jeśli w wyrażeniu (7.52) uwzględnimy (7.50) i dokonamy całkowania, to

$$Q^2 = -\frac{4}{3}\beta\frac{\mu}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[W - aA\right]_{,2} - \frac{h^2}{3a}\left[\bar{N}^{22}_{,2} + 2\bar{N}^{12}_{,1}\right] + C(u^1),$$

albo po wykorzystaniu (6.48) i odrzuceniu wielkości małych rzędu wyższego będzie

$$Q^2 = -\frac{4}{3}\beta\frac{\mu}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[W - aA\right]_{,2} - \frac{h^2}{3a}\left[\bar{N}^{12}_{,1} - P^2\right] + C(u^1). \quad (7.53)$$

Pierwsze wyrażenie (6.48) daje dla powłoki walcowej układ dwóch równań równowagi stanu błonowego

$$\begin{aligned} &\bar{N}^{11}_{,1} + \bar{N}^{12}_{,2} + \frac{3}{a}Q^1 + P^1 = 0,\\ &\bar{N}^{12}_{,1} + \bar{N}^{22}_{,2} + \frac{2}{a}Q^2 + P^2 = 0. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Jeśli pierwsze równanie (7.54) zróżniczkujemy względem zmiennej u^1, a drugie względem zmiennej u^2, to po podstawieniu w miejsce $\bar{N}^{ij}$ i Q^i wyrażeń (7.50), (7.51), (7.52) i uporządkowaniu otrzymamy

$$\begin{aligned} a^2F_{,11} + F_{,22} + 2a^2w^3_{,11} + 2a(2\beta a^2A_{,11} + A_{,22}) - 4\beta h^2(W + aA)_{,11} +&\\ + \frac{a^3}{\mu h}P^1_{,1} = 0,& \end{aligned} \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} a^2F_{,11} + F_{,22} - 2a^2w^3_{,11} - 2(\alpha+\beta)\,aA_{,22} + \frac{8}{3}\beta\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[W - aA\right]_{,22} -&\\ - \frac{a^3}{\mu h}P^2_{,2} = 0,& \end{aligned} \quad (7.56)$$

gdzie

$$F = W - 2a^2B. \quad (7.56)$$

Pomijając w (7.55) wielkości małe rzędu wyższego oraz wykonując odejmowanie i dodawanie stronami tych równań, uzyskamy

$$\begin{aligned} &a^2F_{,11} + F_{,22} + 2a\,(\beta a^2A_{,11} - \alpha A_{,22}) + \frac{a^3}{2\mu h}\left[P^1_{,1} - P^2_{,2}\right] = 0,\\ &a^2w^3_{,11} + \beta a(a^2A_{,11} + A_{,22}) + \frac{a^3}{4\mu h}\left[P^1_{,1} + P^2_{,2}\right] = 0. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Pozostało jeszcze niewykorzystane trzecie równanie równowagi (6.48)

$$a\bar{N}^{22} + 3M^{22} + Q^i_{,i} + P^3 = 0. \quad (7.58)$$

Podstawiając do (7.58) za $\overline{N}^{22}$, M^{22} i Q^1 odpowiednie wielkości z wyrażeń (7.49), (7.50), (7.51) i (7.53) otrzymamy

$$F - 2\alpha aA + \frac{2}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[\beta(a^2W_{,11}+W_{,22}+3W) - 3a^2w^2_{,11} + \beta a(a^2A_{,11}-A_{,22})\right] - \frac{a^2}{2\mu h}P^3 = 0. \qquad (7.59)$$

Odrzucając w (7.59) wielkości małe rzędu wyższego w porównaniu z jednością, napiszemy

$$F - 2\alpha aA + \frac{2}{3}\beta\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[a^2W_{,11} + W_{,22}\right] - \frac{a^2}{2\mu h}P^3 = 0. \qquad (7.60)$$

Otrzymaliśmy układ trzech równań (7.57), (7.60) o niewiadomych A, F, w^3 rozwiązujący powłoki walcowe.

Podstawiając funkcję F z równania (7.60) do równania pierwszego układu (7.57), uzyskamy

$$2(\alpha+\beta)\, a^3A_{,11} - \frac{2}{3}\beta\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[a^2\overline{W}_{,11} + \overline{W}_{,22}\right] + \frac{a^2}{2\mu h}R = 0, \qquad (7.61)$$

gdzie

$$\overline{W} = a^2W_{,11} + W_{,22},$$
$$R = a^2P^3_{,11} + P^3_{,22} + a(P^1_{,1} - P^2_{,2}). \qquad (7.62)$$

Teraz z kolei rugując wielkość A z równań, drugiego układu (7.57) i (7.61) otrzymamy po uporządkowaniu

$$a^2\overline{\overline{W}}_{,11} + \overline{\overline{W}}_{,22} + 3\,\frac{\alpha+\beta}{\beta^2}\left(\frac{a}{h}\right)^4 a^4w^3_{,1111} =$$
$$= \frac{3a}{4\mu\beta}\left(\frac{a}{h}\right)^3\left[a^2R_{,11} + R_{,22} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)a^3\left(P^1_{,1} + P^2_{,2}\right)_{,11}\right], \qquad (7.63)$$

gdzie

$$\overline{\overline{W}} = a^2\overline{W}_{,11} + \overline{W}_{,22}. \qquad (7.64)$$

Ogólne równanie różniczkowe (7.63) jest dla wersji uściślonej równaniem rzędu ósmego, rozwiązującym powłoki walcowe dowolnie obciążone i podparte. Funkcje tensorowe uogólnionych sił wewnętrznych oraz przemieszczeń są opisane wyrażeniami

$$\bar{N}^{11} = 2\mu \frac{h}{a} \left[F + 2\beta aA\right],$$

$$\bar{N}^{22} = -2\mu \frac{h}{a^3} \left[F - 2\alpha aA\right],$$

$$\bar{N}^{12}_{,2} = -2\mu \frac{h}{a} \left[F + 2\beta aA\right]_{,1} - P^1,$$

$$M^{11} = -\frac{4}{3} \mu a \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[\alpha W + a^2 w^3_{,11}\right] - \frac{h^2}{3a} \bar{N}^{11},$$

$$M^{22} = -\frac{4}{3} \frac{\mu}{a} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[\beta W - a^2 w^3_{,11}\right],$$

$$M^{12}_{,2} = -\frac{2}{3} \mu a \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[2W - 2a^2 w^3_{,11} - F\right]_{,1}, \tag{7.65}$$

$$M^{21} = M^{12} + \frac{h^2}{3a} \bar{N}^{12},$$

$$Q^1 = -\frac{4}{3} \mu \beta a \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[W + aA\right]_{,1} + \frac{h^2}{3a} \bar{N}^{12}_{,2},$$

$$Q^2 = -\frac{4}{3} \mu \frac{\beta}{a} \left(\frac{h}{a}\right)^3 \left[W - aA\right]_{,2} - \frac{h^2}{3a} \bar{N}^{12}_{,1} + \frac{h^2}{3a} P^2 + C(u^1),$$

$$w^1_{,1} = \frac{1}{2a} \left[F + 2aA\right],$$

$$w^2_{,2} = \frac{1}{2a} \left[F - 2w^3\right],$$

oraz

$$N^{ij} = \bar{N}^{ij} + \frac{3}{a} M^{ij}.$$

Osiowa symetria odkształceń daje następujące uproszczenia równań (7.57) prowadzące do jednego równania

$$w^3 + \beta aA + \frac{a}{4\mu h} \int P^1 du^1 = C, \tag{7.66}$$

bo

$$w^2_{,2} = 0 \quad \text{określa} \quad F = 2w^3. \tag{7.67}$$

Równanie różniczkowe rozwiązujące (7.63) dla osiowej symetrii będzie równaniem zwyczajnym czwartego rzędu

$$a^2 W_{,11} + 3 \frac{\alpha+\beta}{\beta 2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 w^3 = \frac{3a}{4\mu\beta} \left(\frac{a}{h}\right)^3 \left[P^3 - \frac{\alpha}{\beta a} \int P^1 du^1 + 4\mu \frac{\alpha}{\beta} \frac{h}{a^2} C\right]. \tag{7.68}$$

Rozwiązanie równania (7.63) względnie dla osiowej symetrii 7.68) może być przedstawione podobnie jak w (7.42) za pomocą sumy złożonej z całki ogólnej $\overset{\circ}{w}{}^3$ równania jednorodnego i całki szczególnej $\overset{*}{w}{}^3$ równania niejednorodnego

$$w^3 = \overset{\circ}{w}{}^3 + \overset{*}{w}{}^3. \tag{7.69}$$

7.3. Wpływy obciążeń

7.3.1. Wpływ ciężaru własnego

Wpływ ciężaru własnego, wyrażony wektorem $\vec{q}$, rozłożony po osiach trójścianu $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{m}$ zgodnie z wzorem (4.2) będzie równy

$$\vec{P} = \vec{q} = -q\,\vec{r}_1 = P^i\vec{r}_i + P^3\vec{m}.$$

Z równania tego otrzymamy

$$P^1 = -q, \qquad P^2 = 0, \qquad P^3 = 0, \tag{7.70}$$

gdzie $q = 2h\,\gamma$ jest ciężarem przypadającym na jednostkę długości. Wielkość γ określa ciężar objętościowy materiału, z którego jest wykonana powłoka.

Wpływ ciężaru własnego jest rozłożony osiowosymetrycznie, ponadto podparcie dolnego brzegu rozpatrywanej powłoki jest również osiowosymetryczne to też przemieszczenia w^i będą również osiowosymetryczne. Wielkość B możemy więc w tym przypadku obliczyć z wyrażenia (7.40)

$$B = \frac{1}{2(1-\nu)a}\left[C_1 - X\right]. \tag{7.71}$$

Jeśli następnie podstawimy (7.71) do (7.72), to po odpowiednim przeliczeniu otrzymamy wyrażenie opisujące obciążenie wymuszające $\hat{P}^3$

$$\hat{P}^3 = -\xi\left[a^2X_{,11} + 3\nu X - 3C_1\right], \tag{7.72}$$

gdzie

$$\xi = \frac{4\mu}{3(1-\nu^2)}\,(\alpha+\beta)\,\left(\frac{h}{a}\right)^3. \tag{7.73}$$

Obciążenie wymuszające $\hat{P}^3$, po wykorzystaniu równania (7.40), może też przyjąć postać

$$\hat{P}^3 = 3\xi\left[X + (1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2 A + C_1 - \frac{1}{3}C_2\right] + \bar{P}. \tag{7.72'}$$

Wielkości sił i momentów opisane wyrażeniami (7.34) - (7.37) oraz przemieszczenia (7.39) dla wpływu ciężaru własnego przyjmą kształt

$$
\begin{aligned}
\bar{N}^{11} &= -\S a\left[3(X+C_1) - C_2\right] + qu^1,\\
\bar{N}^{22} &= \frac{1}{a}\hat{P}^3,\\
\bar{N}^{12} &= 0,\\
M^{11} &= \S a^2\left[X - \nu C_1\right],\\
M^{22} &= \left[\nu X - C_1\right],\\
M^{12} &= M^{21} = 0,\\
N^{11} &= -\S a\left[3(1+\nu)C_1 - C_2\right] + qu^1,\\
N^{22} &= -\S a\, X_{,11},\\
Q^1 &= \S a^2 X_{,1},\\
Q^2 &= 0,\\
w^1 &= \frac{1}{2Eh}\int\left[\bar{N}^{11} - \nu a^2\bar{N}^{22}\right]du^1 \cdot C_3,\\
w^2 &= 0,\\
w^3 &= \frac{a}{2Eh}\left[\nu\bar{N}^{11} - a^2\bar{N}^{22}\right].
\end{aligned}
\tag{7.74}
$$

<u>Warunki brzegowe</u>

Dla $u^1 = l$, jest $N^{11} = 0$, $M^{11} = 0$, $Q^1 = 0$.
Warunki $N^{11}_l = 0$ i $M^{11}_l = 0$ pozwolą wyznaczyć stałe C_1 i C_2, bo

$$
\begin{aligned}
N^{11}_l &= 0 \rightarrow -\S a\left[3(1+\nu)C_1 - C_2\right] + ql = 0,\\
M^{11}_l &= 0 \rightarrow X_1 - \nu C_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{7.75}
$$

Natomiast dla $u^1 = 0$ jest $w^1 = 0$, $w^3 = 0$, $w^3_{,1} = 0$.

Wielkości fizyczne

$$N^{\rceil}_{11} = ql\left[\frac{u^1}{l} - 1\right],$$

$$N^{\rceil}_{22} = -\S a^3 X_{,11},$$

$$N^{\rceil}_{12} = N^{\rceil}_{21} = 0,$$

$$M^{\rceil}_{11} = 0,$$

$$M^{\rceil}_{12} = \S a^2\left[X - \nu C_1\right],$$

$$M^{\rceil}_{21} = -\S a^2\left[\nu X - C_1\right], \tag{7.76}$$

$$M^{\rceil}_{22} = 0,$$

$$Q^{\rceil}_1 = \S a^2 X_{,1},$$

$$Q^{\rceil}_2 = 0.$$

$$w^{\rceil}_1 = -\frac{1}{2Eh}\int_l^{u^1}\left[\bar{N}^{11} - \nu a^2 \bar{N}^{22}\right] du^1,$$

$$w^{\rceil}_2 = 0,$$

$$w^{\rceil}_3 = \frac{a}{2Eh}\left[\nu \bar{N}^{11} - a^2 \bar{N}^{22}\right].$$

Wzory uściślone

Całka szczególna $\overset{\S}{w}{}^3$ równania (7.68) dla wpływu ciężaru własnego wyniesie

$$\overset{\S}{w}{}^3 = \frac{\alpha}{4\mu\,(\alpha+\beta)}\,\frac{a}{h}\left[qu^1 + 4\mu\frac{h}{a}\,C\right]. \tag{7.77}$$

Wielkości sił, momentów oraz przemieszczeń opisanych wyrażeniami (7.65) dla tego wpływu będą równe

$$\bar{N}^{11} = qu^1 + 4\mu\frac{h}{a}\,C,$$

$$\bar{N}^{22} = -4\mu\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{h}{a^3}\,\overset{\S}{w}{}^3, \tag{7.78}$$

$$\bar{N}^{12} = 0,$$

$$M^{11} = -\frac{4}{3}\mu a \left(\frac{h}{a}\right)^3\left[\beta a^2 \overset{\circ}{w}{}^3_{,11} + \alpha \overset{\circ}{w}{}^3\right] - \frac{(\beta h)^2}{3(\alpha+\beta)a}\bar{N}^{11},$$

$$M^{22} = -\frac{4}{3}\frac{\mu}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[\alpha a^2 \overset{\circ}{w}{}^3_{,11} + \beta \overset{\circ}{w}{}^3\right] \quad \frac{\alpha\beta}{3(\alpha+\beta)a}\frac{h^2}{a}N^{11},$$

$$M^{12} = M^{21} = 0,$$

$$Q^1 = -\frac{4}{3}\mu a \left(\frac{h}{a}\right)^3\left[\beta a^2 \overset{\circ}{w}{}^3_{,11} + \alpha \overset{\circ}{w}{}^3\right]_{,1} - \frac{(\beta h)^2}{3(\alpha+\beta)a}\bar{N}^{11}_{,1}, \tag{7.78}$$

$$Q^2 = 0,$$

$$w^1 = \int\left[\frac{\alpha}{\beta a}\overset{\circ}{w}{}^3 + \frac{\beta}{4\mu h(\alpha+\beta)}\bar{N}^{11}\right]du^1 + \bar{C},$$

$$w^2 = 0,$$

$$w^3 = \overset{\circ}{w}{}^3 + \overset{\S}{w}{}^3.$$

Warunki brzegowe

Dla $u^1 = 1$ jest $N^{11} = 0$, $M^{11} = 0$, $Q^1 = 0$.

Warunek $N^{11}_1 = 0$ daje

$$ql + 4\mu\frac{h}{a}C = 0. \tag{7.79}$$

Dla $u^1 = 0$ jest $w^1 = 0$, $w^3 = 0$, $w^3_{,1} = 0$.

Wielkości fizyczne

$$N_{\rceil 11} = ql\left[\frac{u^1}{l} - 1\right],$$

$$N_{\rceil 22} = -4\mu\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{h}{a}\overset{\circ}{w}{}^3 + 3aM^{22},$$

$$N_{\rceil 12} = N_{\rceil 21} = 0,$$

$$M_{\rceil 11} = 0, \tag{7.80}$$

$$M_{\rceil 12} = M^{11},$$

$$M_{\rceil 21} = -a^2 M^{22},$$

$$M_{\rceil 22} = 0,$$

$$Q_1^{\rceil} = Q^1,$$

$$Q_2^{\rceil} = 0,$$

$$w_1^{\rceil} = -\int_1^{u^1} \left[\frac{\alpha}{\beta a} \overset{\circ}{w}{}^3 + \frac{\beta}{4\mu h(\alpha+\beta)} \bar{N}^{11} \right] du^1, \tag{7.80}$$

$$w_2^{\rceil} = 0,$$

$$w_3^{\rceil} = w^3.$$

7.3.2. Wpływ parcia cieczy

Zgodnie z wzorem (4.2) będzie

$$\vec{P} = \vec{p} = \gamma^* (u^1 - 1)\,\vec{m} = P^1 \vec{r}_1 + P^3 \vec{m},$$

skąd

$$P^1 = P^2 = 0,$$

$$P^3 = \gamma^* (u^1 - 1). \tag{7.81}$$

Współczynnik γ^* zależy od rodzaju cieczy i na przykład dla wody wynosi 1. Wpływ parcia cieczy powoduje pracę osiowosymetryczną, czyli wielkości B i $\hat{P}^3$ będą opisane wyrażeniami (7.71) i (7.72) lub (7.72'). Siły momenty i przemieszczenia z wzorów (7.34) - (7.37) i (7.39) dla tego obciążenia będą równe

$$\bar{N}^{11} = -\S a \left[3(X + C_1) - C_2 \right],$$

$$\bar{N}^{22} = \frac{1}{a} \left[\hat{P}^3 - P^3 \right],$$

$$\bar{N}^{12} = 0,$$

$$M^{11} = \S a^2 \left[X - \nu C_1 \right],$$

$$M^{22} = \S \left[\nu X - C_1 \right], \tag{7.82}$$

$$M^{12} = M^{21} = 0,$$

$$N^{11} = -\S a \left[3(1-\nu) C_1 - C_2 \right],$$

$$N^{22} = -\S a X_{,11},$$

$$Q^1 = \S a^2 X_{,1},$$

$$Q^2 = 0,$$

$$w^1 = \frac{1}{2Eh}\int\left[\bar{N}^{11} - \nu a^2 \bar{N}^{22}\right] du^1 + C_3, \tag{7.82}$$

$$w^2 = 0,$$

$$w^3 = \frac{a}{2Eh}\left[\nu \bar{N}^{11} - a^2 \bar{N}^{22}\right].$$

Warunki brzegowe

Dla $u^1 = 1$ jest $\bar{N}^{11} = 0$, $M^{11} = 0$, $Q^1 = 0$.

Warunki $\underset{1}{N^{11}} = 0$, $\underset{1}{M^{11}} = 0$ dają

$$3(1-\nu)\, C_1 - C_2 = 0,$$

$$X_1 - \nu C_1 = 0. \tag{7.83}$$

Pierwszy warunek (7.83) określa $\bar{N}^{11}$

$$\bar{N}^{11} = 0.$$

Dla brzegu utwierdzonego $u^1 = 0$ będzie

$$w^1 = 0, \quad w^3 = 0, \quad w^3_{,1} = 0.$$

Wielkości fizyczne

$$N_{\overline{11}} = 0,$$

$$N_{\overline{12}} = N_{\overline{21}} = 0,$$

$$N_{\overline{22}} = -\S a^2 X_{,11},$$

$$M_{\overline{11}} = 0,$$

$$M_{\overline{12}} = \S a^2\left[X - \nu C_1\right], \tag{7.84}$$

$$M_{\overline{21}} = -\S a^2\left[\nu X - C_1\right],$$

$$M_{\overline{22}} = 0,$$

$$Q_{\overline{1}} = \S a^2 X_{,1},$$

$$Q_2^{\urcorner} = 0,$$

$$w_1^{\urcorner} = -\frac{1}{2Eh}\int_1^{u^1}\left[\bar{N}^{11} - \nu a^2\bar{N}^{22}\right]du^1,$$

$$w_2^{\urcorner} = 0, \tag{7.84}$$

$$w_3^{\urcorner} = \frac{a}{2Eh}\left[\nu\bar{N}^{11} - a^2\bar{N}^{22}\right].$$

<u>Wzory uściślone</u>

Całka szczególna dla parcia cieczy będzie równa

$$\overset{s}{w}{}^3 = \frac{\beta}{4\mu(\alpha+\beta)}\,\frac{a}{h}\left[\gamma^*\left(\frac{u^1}{l} - 1\right) al + 4\mu\,\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{h}{a}\,C\right]. \tag{7.85}$$

Siły, momenty i przemieszczenia wywołane parciem cieczy wyniosą

$$\bar{N}^{11} = 4\mu\,\frac{h}{a}\,C,$$

$$\bar{N}^{22} = -4\mu\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{h}{a^3}\,\overset{s}{w}{}^3 + \frac{\gamma^* l}{a}\left(1 - \frac{u^1}{l}\right),$$

$$\bar{N}^{12} = 0,$$

$$M^{11} = -\frac{4}{3}\mu a\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[\beta a^2\overset{o}{w}{}^3_{,11} + \alpha\,\overset{o}{w}{}^3\right] - \frac{(\beta h)^2}{3(\alpha+\beta)a}\,\bar{N}^{11} + \gamma^*\frac{\alpha\beta l}{3(\alpha+\beta)}\,h^2\left(1 - \frac{u^1}{l}\right),$$

$$M^{22} = -\frac{4}{3}\frac{\mu}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[\alpha a^2\,\overset{o}{w}{}^3_{,11} + \beta\,\overset{o}{w}{}^3\right] - \frac{\alpha\beta}{3(\alpha+\beta)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\bar{N}^{11} +$$

$$+\gamma^*\frac{\beta^2 l}{3(\alpha+\beta)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(1 - \frac{u^1}{l}\right), \tag{7.85}$$

$$M^{12} = M^{21} = 0,$$

$$Q^1 = -\frac{4}{3}\mu a\left(\frac{h}{a}\right)^3\left[\beta a^2\,\overset{o}{w}{}^3_{,11} + \alpha\,\overset{o}{w}{}^3\right]_{,1} - \gamma^*\frac{\alpha\beta}{3(\alpha+\beta)}\,h^2,$$

$$Q^2 = 0,$$

$$w^1 = \frac{\alpha}{\beta a}\int\overset{o}{w}{}^3du^1 + \gamma^*\frac{\alpha l}{4\mu(\alpha+\beta)}\,\frac{a}{h}\left(\frac{u^1}{2l} - 1\right)u^1 + \frac{\beta}{(\alpha+\beta)a}\,Cu^1 + \bar{C},$$

$$w^2 = 0,$$

$$w^3 = \overset{o}{w}{}^3 + \overset{s}{w}{}^3.$$

Warunki brzegowe

Dla $u^1 = 1 \rightarrow N^{11} = 0, \quad M^{11} = 0, \quad Q^1 = 0,$
a dla $u^1 = 0$ jest $w^1 = 0, w^3 = 0, w^3_{,1} = 0.$
Warunek $N^{11}_1 = 0$ daje

$$C = 0, \tag{7.86}$$

czyli

$$N^{11} = 0.$$

Wielkości fizyczne

$$
\begin{aligned}
N_{\overline{11}} &= 0,\\
N_{\overline{12}} &= N_{\overline{21}} = 0,\\
N_{\overline{22}} &= -4\mu\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{h}{a}\overset{\circ}{w}{}^3 + \gamma^* al\left(1 - \frac{u^1}{l}\right) + 3aM^{22},\\
M_{\overline{11}} &= 0,\\
M_{\overline{12}} &= M^{11},\\
M_{\overline{21}} &= -a^2M^{22},\\
M_{\overline{22}} &= 0,\\
Q_{\overline{1}} &= Q^1,\\
Q_{\overline{2}} &= 0,\\
w_{\overline{1}} &= -\frac{\alpha}{\beta a}\int_1^{u^1}\overset{\circ}{w}{}^3 du^1 + \gamma^* \frac{al}{4\mu(\alpha+\beta)}\frac{a}{h}\left(\frac{u^1}{2l} - 1\right)u^1,\\
w_{\overline{2}} &= 0,\\
w_{\overline{3}} &= w^3.
\end{aligned}
\tag{7.87}
$$

7.3.3. Wpływ parcia wiatru

Podobnie jak poprzednio, wzorem (4.2) rozłożymy parcie wiatru W

$$\vec{P} = \vec{W} = W\vec{i} = P^1\vec{r}_1 + P^2\vec{r}_2 + P^3\vec{m}. \tag{7.88}$$

Rozwiązując układ równań (7.88) po podstawieniu $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{m}$ obliczonych z (7.1) i przyjmując $P^2 = 0$, bo jest to składowa styczna do powłoki nie wpływająca na jej pracę, otrzymamy:

$$P^1 = 0,$$

$$P^2 = 0, \tag{7.89}$$

$$P^3 = W \cos u^2.$$

Kierunek wiatru założono równoległy do osi x, ponadto przyjęto że wpływ ssania jest też równy W. Wielkość B wyznaczymy całkując wyrażenie(7.32)

$$B = \frac{1}{2(1-\nu)a}\left[u^1C_1(u^2) + C_2(u^2) - X - \frac{1}{a^2}\iint X_{,22}du^1du^1\right]. \tag{7.90}$$

albo

$$B = \frac{1}{2(1-\nu)a}\left[u^1C_1(u^2) + C_2(u^2) - \frac{1}{a^2}\iint Z\, du^1du^1\right].$$

Natomiast funkcję A otrzymamy rozwiązując równanie różniczkowe cząstkowe (7.33). Tensory sił, momentów i przemieszczeń uzyskamy z wyrażeń(7.34) - (7.39) przy spełnieniu następujących warunków brzegowych

dla

$$u^1 = 1, \text{ jest } N^{11} = 0, \quad N^{12} = 0, \quad M^{11} = 0, \quad M^{12} = 0, \quad Q^1 = 0,$$

dla (7.91)

$$u^1 = 0 \text{ jest } w^1 = 0, \quad w^2 = 0, \quad w^3 = 0, \quad w^3_{,1} = 0.$$

Wielkości fizyczne obliczymy z wzorów

$$N_{11}^{\urcorner} = N^{11},$$

$$N_{12}^{\urcorner} = N_{21}^{\urcorner} = a\,N^{12},$$

$$N_{22}^{\urcorner} = a^2N^{22},$$

$$M_{11}^{\urcorner} = -a\,M^{12}, \tag{7.92}$$

$$M_{12}^{\urcorner} = M^{11},$$

$$M_{21}^{\urcorner} = -a^2M^{22},$$

$$M_{22}^{\urcorner} = a\,M^{21},$$

$$
\begin{aligned}
Q_1^{\urcorner} &= Q^1, \\
Q_2^{\urcorner} &= a\,Q^2, \\
w_1^{\urcorner} &= w^1, \\
w_2^{\urcorner} &= a w^2, \\
w_3^{\urcorner} &= w^3.
\end{aligned}
\qquad (7.92)
$$

Wzory uściślone

Rozwiązując równanie (7.63) wyznaczymy w^3, a następnie z równań (7.57) i (7.60) otrzymamy funkcje A i F. Mając określone A, F i w^3, możemy z wyrażeń (7.65) uzyskać tensory sił, momentów i przemieszczeń przy założeniu warunków brzegowych jak w (7.91). Przejścia z funkcji tensorowych do wielkości fizycznych dokonamy wzorami (7.92).

Obliczenie przykładów liczbowych przeprowadzono w Centrum Obliczeniowym Politechniki Wrocławskiej w oparciu o programy opracowane dla obu metod. Podwójne programy realizujące poszczególne metody niezależnie, posłużyły między innymi do przeprowadzenia testów sprawdzających.

W przeliczonych przykładach szczegółowych przyjęto pełne zamocowanie wzdłuż dolnej krawędzi walca, rys. 3 oraz różne rodzaje materiałów, z których są utworzone powłoki, a mianowicie: stal i żelbet. Przyjęto następujące dane wyjściowe dla stali i żelbetu:

stal:

$h = 0{,}5$ cm

$a = 1{,}0$ m

$l = 5{,}0$ m

$\nu = 0{,}3$

$E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2

żelbet:

$h = 5{,}0$ cm

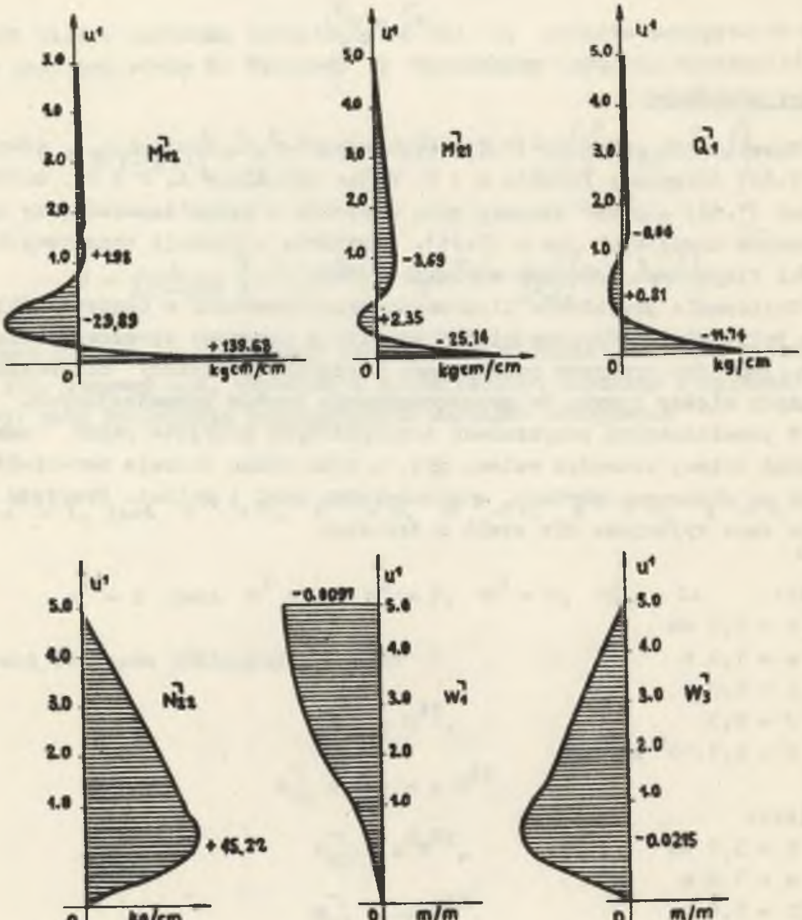
$a = 1{,}0$ m

$l = 5{,}0$ m

$\nu = 0{,}18$

$E = 0{,}21 \cdot 10^6$ kg/cm^2.

Wyniki przeliczonych przykładów dla wpływów ciężaru własnego i parcia cieczy załączono w tablicach zamieszczonych w końcowej części pracy.



u'
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
M11
+1.98
-29,89
+139.68
kgcm/cm
M21
-3.69
+2.35
-25.14
kgcm/cm
Q1
-0.84
+0.81
-11.74
kg/cm
N11
+45,22
kg/cm
-0.0097
W1
m/m
W3
-0.0215
m/m

Rys. 4

Drukowane w tablicach wartości poszczególnych wielkości fizycznych, na przykład M12, W1 są podawane w kolumnach w zapisie półlogarytmicznym, to znaczy wielkość M12 = 2.2861986o-02 należy odczytać $M12 = 2.2861986 \cdot 10^{-2}$. Symbol ∂ równy 10 jest podstawą wykładnika potęgowego, a liczba za nim stojąca jego wykładnikiem.

Na rys. 4 przedstawiono charakterystyczne wykresy obliczonych wielkości sił, momentów zginających i przemieszczeń tylko dla parcia cieczy w zbiorniku żelbetowym. Rysunek bowiem nie potrafi oddać wszystkich subtelności wynikających z dużej rozpiętości skali liczb, lepiej to robi tablica liczbowa.

Analiza otrzymanych wyników i porównanie ich z rozwiązaniami podawanymi w literaturze, potwierdza słuszność podanej w pracy metody.

WPLYW CIEZARU WLASNEGO ZELBET NI=0.18 H=5 A=100

U1 [CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	5.3813226E 00	-9.6863807E-01	-4.9684832E-01	-1.2000000E 01	-2.1600000E 00	.0000000E 00	-2.771793E-15
10	1.4609239E 00	-2.6296631E-01	-2.9247538E-01	-1.1760000E 01	-1.8531220E 00	-5.5268930E-05	-1.255610E-05
20	-6.2652823E-01	1.1277508E-01	-1.3440832E-01	-1.1520000E 01	-1.2938731E 00	-1.0938209E-04	-3.712985E-05
30	-1.4182818E 00	2.5529072E-01	-3.3054499E-02	-1.1280000E 01	-7.4897658E-01	-1.6264607E-04	-6.102016E-05
40	-1.4498007E 00	2.6096413E-01	1.9838925E-02	-1.1040000E 01	-3.3455618E-01	-2.1513127E-04	-7.869732E-05
50	-1.1338465E 00	2.0409233E-01	3.6998658E-02	-1.0800000E 01	-7.2887097E-02	-2.6676630E-04	-8.910061E-05
60	-7.3428560E-01	1.3217141E-01	3.8696480E-02	-1.0560000E 01	6.0835296E-02	-3.1751697E-04	-9.341120E-05
70	-3.8826526E-01	6.9887748E-02	2.9751550E-02	-1.0320000E 01	1.0684256E-01	-3.6723138E-04	-9.354488E-05
80	-1.4498610E-01	2.6097498E-02	1.8974336E-02	-1.0080000E 01	1.0311255E-01	-4.1565958E-04	-9.131012E-05
90	-3.0813109E-03	5.5463596E-04	9.6305022E-03	-9.8400000E 00	7.7968212E-02	-4.6335735E-04	-8.805563E-05
100	6.1139893E-02	-1.1005181E-02	3.4994992E-03	-9.6000000E 00	4.8967735E-02	-5.0970207E-04	-8.461777E-05
110	7.5967552E-02	-1.3674159E-02	-1.5109658E-04	-9.3600000E 00	2.4832341E-02	-5.5488594E-04	-8.141106E-05
120	6.5309894E-02	-1.1755781E-02	-1.7263857E-03	-9.1200000E 00	8.3776910E-03	-5.9890956E-04	-7.857057E-05
130	4.5670778E-02	-8.2207400E-03	-2.0474416E-03	-8.8800000E 00	-8.9504615E-04	-6.4177216E-04	-7.607166E-05
140	2.6482424E-02	-4.7668364E-03	-1.7250308E-03	-8.6400000E 00	-4.8419605E-03	-6.8349363E-04	-7.382657E-05
150	1.1864280E-02	-2.1355705E-03	-1.1879905E-03	-8.4000000E 00	-5.5063610E-03	-7.2406305E-04	-7.173779E-05
175	-3.2307320E-03	5.8153176E-04	-1.5809669E-04	-7.8000000E 00	-2.3716695E-03	-8.2048354E-04	-6.674421E-05
200	-2.7503500E-03	4.9506299E-04	1.0249446E-04	-7.2000000E 00	-1.1333086E-04	-9.0976580E-04	-6.170889E-05
225	-5.5434136E-04	9.9781445E-05	5.7991077E-05	-6.6000000E 00	2.7724282E-04	-9.9190851E-04	-5.658465E-05
250	1.6967458E-04	-3.0541368E-05	7.0802454E-06	-6.0000000E 00	1.1472835E-04	-1.0669089E-03	-5.143403E-05
275	1.3522811E-04	-2.4341059E-05	-5.2319602E-06	-5.4000000E 00	4.0244473E-06	-1.1347662E-03	-4.628591E-05
300	2.5804236E-05	-4.6447625E-06	-2.6275145E-06	-4.8000000E 00	-1.3934896E-05	-1.1954805E-03	-4.114219E-05
325	-8.8035353E-06	1.5954364E-06	-3.1377204E-07	-4.2000000E 00	-5.5424077E-06	-1.2491519E-03	-3.599974E-05
350	-6.6413122E-06	1.1954362E-06	2.6638624E-07	-3.6000000E 00	-1.2179086E-07	-1.2954805E-03	-3.085714E-05
375	-1.1963063E-06	2.1535514E-07	1.3768800E-07	-3.0000000E 00	6.9931170E-07	-1.3347662E-03	-2.571432E-05
400	4.6020817E-07	-8.2837471E-08	1.3702141E-08	-2.4000000E 00	2.6736065E-07	-1.3669091E-03	-2.057144E-05
425	3.2497034E-07	-5.8494661E-08	-1.3500486E-08	-1.8000000E 00	1.7270379E-09	-1.3919091E-03	-1.542857E-05
450	5.7674387E-08	-1.0381390E-08	-6.4285505E-09	-1.2000000E 00	-3.6355529E-08	-1.4097662E-03	-1.028571E-05
475	-1.0988353E-08	1.9779035E-09	-9.6179984E-11	-6.0000000E-01	-1.2470287E-08	-1.4204805E-03	-5.142857E-06
500	3.6488724E-19	-6.5679704E-20	.0000000E 00	.0000000E 00	1.1024434E-08	-1.4240519E-03	-5.249731E-13

WPLYW CIEZARU WLASNEGO STAL NI=0.3 H=0.5 A=100

U1[CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	3.4458693D-01	-1.0351608D-01	-9.0044682D-02	-3.9000000D 00	-1.1700000D 00	.0000000D 00	.0000000D 00
10	-6.8389073D-02	2.0516722D-02	-6.0156220D-03	-3.8220000D 00	-3.9556737D-01	-1.7202673D-05	-5.576346D-05
20	-3.7088424D-02	1.1126527D-02	5.9178474D-03	-3.7440000D 00	2.9127040D-02	-3.5029822D-05	-5.487772D-05
30	-4.5226275D-04	1.3567883D-04	1.4227937D-03	-3.6660000D 00	3.4974778D-02	-5.2734968D-05	-5.403639D-05
40	2.7881245D-03	-8.3643735D-04	-2.3649648D-04	-3.5880000D 00	3.1515560D-03	-7.0030427D-05	-5.140722D-05
50	4.6500734D-04	-1.3950220D-04	-1.4612253D-04	-3.5100000D 00	-2.2080020D-03	-8.6929335D-05	-5.003768D-05
60	-1.4310055D-04	4.2930165D-05	-4.3205176D-06	-3.4320000D 00	-5.8362609D-04	-1.0345589D-04	-4.900078D-05
70	-5.7909540D-05	1.7372692D-05	1.0593098D-05	-3.3540000D 00	8.0159296D-05	-1.1961280D-04	-4.791810D-05
80	2.0923948D-06	-6.2771643D-07	1.9672485D-06	-3.2760000D 00	5.7339268D-05	-1.3539864D-04	-4.680273D-05
90	4.7851275D-06	-1.4355382D-06	-5.1275464D-07	-3.1980000D 00	2.6696336D-06	-1.5081296D-04	-4.568584D-05
100	5.7702692D-07	-1.7310808D-07	-2.3069797D-07	-3.1200000D 00	-4.0064811D-06	-1.6585581D-04	-4.457124D-05
110	-2.7969980D-07	8.3909940D-08	3.9184653D-09	-3.0420000D 00	-8.2384152D-07	-1.8052724D-04	-4.345710D-05
120	-8.7616280D-08	2.6284884D-08	1.8381307D-08	-2.9640000D 00	1.8162120D-07	-1.9482724D-04	-4.234287D-05
130	8.0350398D-09	-2.4105119D-09	2.5339610D-09	-2.8860000D 00	9.1503079D-08	-2.0875581D-04	-4.122858D-05
140	7.9910577D-09	-2.3973173D-09	-1.0254526D-09	-2.8080000D 00	1.2221755D-10	-2.2231295D-04	-4.011429D-05
150	6.1372561D-10	-1.8411768D-10	-3.5346690D-10	-2.7300000D 00	-7.0320436D-09	-2.3549867D-04	-3.900000D-05
175	-1.7797820D-11	5.3393460D-12	1.3662159D-11	-2.5350000D 00	2.9137721D-10	-2.6683795D-04	-3.621429D-05
200	4.2877821D-13	-1.2863346D-13	-5.2305607D-13	-2.3400000D 00	-1.1990150D-11	-2.9585581D-04	-3.342857D-05
225	-5.3651494D-15	1.6095448D-15	1.9811486D-14	-2.1450000D 00	4.9008215D-13	-3.2255224D-04	-3.064286D-05
250	-2.7253684D-16	8.1761652D-17	-7.4118658D-16	-1.9500000D 00	-1.0893841D-14	-3.4692724D-04	-2.785714D-05
275	3.0899205D-17	-9.2697614D-18	2.7328832D-17	-1.7550000D 00	8.0260517D-16	-3.6898081D-04	-2.507143D-05
300	-2.0514113D-18	6.1542339D-19	-9.9002051D-19	-1.5600000D 00	-3.2155356D-17	-3.8871295D-04	-2.228571D-05
325	1.1508790D-19	-3.4526370D-20	3.5076127D-20	-1.3650000D 00	1.2793903D-18	-4.0612367D-04	-1.950000D-05
350	-5.9326470D-21	1.7797941D-21	-1.2068571D-21	-1.1700000D 00	-5.1539058D-20	-4.2121295D-04	-1.671429D-05
375	2.9042635D-22	-8.7127905D-23	3.9854920D-23	-9.7500000D-01	1.9812945D-21	-4.3398081D-04	-1.392857D-05
400	-1.3725273D-23	4.1175820D-24	-1.2361971D-24	-7.8000000D-01	-7.7042167D-23	-4.4442724D-04	-1.114286D-05
425	6.3207010D-25	-1.8962103D-25	3.4357729D-26	-5.8500000D-01	2.9692376D-24	-4.5255224D-04	-8.357143D-06
450	-2.8529679D-26	8.5589036D-27	-7.4255193D-28	-3.9000000D-01	-1.1331088D-25	-4.5835581D-04	-5.571429D-06
475	1.2646097D-27	-3.7938290D-28	3.4600606D-30	-1.9500000D-01	4.2682563D-27	-4.6183795D-04	-2.785714D-06
500	.0000000D 00	.0000000D 00	.0000000D 00	.0000000D 00	4.8334628D-29	-4.6299867D-04	-2.501839D-33

WPLYW PARCIA CIECZY ZELBET NI=0.18 H=5 A=100

U1[CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W5 [CM]
0	1.2456765 02	-2.2422178 01	-1.1501119 01	.0000000 00	7.7759576 -10	.0000000 00	-4.434869 -14
10	3.3817684 01	-6.0871851 00	-6.7702654 00	.0000000 00	6.1036581 00	-1.2270149 -05	-2.906504 -04
20	-1.4502968 01	2.6105543 00	-3.1113038 00	.0000000 00	1.6049734 01	-2.3400135 -05	-8.594875 -04
30	-3.2830597 01	5.9095075 00	-7.6515043 -01	.0000000 00	2.9662579 01	-4.0463280 -05	-1.412504 -03
40	-3.3560202 01	6.0408564 00	4.5923437 -01	.0000000 00	3.6255644 01	-6.5096792 -05	-1.821697 -03
50	-2.6246442 01	4.7243596 00	9.0274624 -01	.0000000 00	4.3312799 01	-9.6111527 -05	-2.062514 -03
60	-1.6997352 01	3.0595233 00	8.9575186 -01	.0000000 00	4.5408224 01	-1.3132666 -04	-2.162296 -03
70	-8.9876219 00	1.6177719 00	6.8869329 -01	.0000000 00	4.5473207 01	-1.6861538 -04	-2.165391 -03
80	-3.3561597 00	6.0410874 -01	4.3922075 -01	.0000000 00	4.4386865 01	-2.0635804 -04	-2.113660 -03
90	-7.1326641 -02	1.2838795 -02	2.2755792 -01	.0000000 00	4.2804620 01	-2.4353126 -04	-2.038325 -03
100	1.4152755 00	-2.5474955 -01	8.1006926 -02	.0000000 00	4.1133397 01	-2.7961146 -04	-1.958735 -03
110	1.7585081 00	-3.1653147 -01	-3.0346432 -03	.0000000 00	3.9574823 01	-3.1441796 -04	-1.884515 -03
120	1.5118031 00	-2.7212456 -01	-3.4962031 -02	.0000000 00	3.8193928 01	-3.4796473 -04	-1.818758 -03
130	1.0571939 00	-1.9029491 -01	-4.7394481 -02	.0000000 00	3.6979281 01	-3.8034967 -04	-1.760918 -03
140	6.1301908 -01	-1.1034345 -01	-3.9931268 -02	.0000000 00	3.5887918 01	-4.1168597 -04	-1.708948 -03
150	2.7463612 -01	-4.9434502 -02	-2.7499779 -02	.0000000 00	3.4872538 01	-4.4206790 -04	-1.660597 -03
175	-7.4785403 -02	1.3461383 -02	-3.6596456 -03	.0000000 00	3.2445100 01	-5.1422221 -04	-1.545005 -03
200	-6.3665509 -02	1.1459792 -02	2.3725569 -03	.0000000 00	2.9997377 01	-5.8108669 -04	-1.428447 -03
225	-1.2831970 -02	2.3097557 -03	1.3423861 -03	.0000000 00	2.7506418 01	-6.4269027 -04	-1.309829 -03
250	3.9276477 -03	-7.0697658 -04	1.6389457 -04	.0000000 00	2.5002656 01	-6.9894969 -04	-1.190603 -03
275	3.1302802 -03	-5.6345944 -04	-1.2111019 -04	.0000000 00	2.7500093 01	-7.4984640 -04	-1.071435 -03
300	5.9732028 -04	-1.0751765 -04	-6.5451725 -05	.0000000 00	1.9999677 01	-7.9538224 -04	-9.525656 -04
325	-2.0517443 -04	3.6931397 -05	-7.2632416 -06	.0000000 00	1.7499872 01	-8.3556634 -04	-8.333272 -04
350	-1.5573408 -04	2.7672134 -05	6.1663462 -06	.0000000 00	1.4999997 01	-8.7058158 -04	-7.142856 -04
375	-2.7692270 -05	4.9846098 -06	3.1872225 -06	.0000000 00	1.2500016 01	-8.9964586 -04	-5.952389 -04
400	1.0652967 -05	-1.9175341 -06	3.1717919 -07	.0000000 00	1.0000006 01	-9.2395303 -04	-4.761908 -04
425	7.5224615 -06	-1.3540451 -06	-3.1251124 -07	.0000000 00	7.5000000 00	-9.4270504 -04	-3.571429 -04
450	1.3350552 -06	-2.4030994 -07	-1.4880904 -07	.0000000 00	4.9999992 00	-9.5609589 -04	-2.380952 -04
475	-2.5436001 -07	4.5784802 -08	-2.2265677 -09	.0000000 00	2.4999997 00	-9.6413161 -04	-1.190476 -04
500	.0000000 00	.0000000 00	-3.6486724 -19	.0000000 00	2.5519524 -07	-9.6681118 -04	-1.215215 -11

WPLYW PARCIA CIECZY STAL NI=0.3 H=0.5 A=100

U1[CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	1.4717390@ 01	-4.4152170@ 00	-3.8480633@ 00	.0000000@ 00	.0000000@ 00	.0000000@ 00	.0000000@ 00
10	-2.9226099@ 00	8.7678298@-01	-2.8271889@-01	.0000000@ 00	3.2095411@ 01	-2.0156949@-05	-1.528353@-03
20	-1.5849754@ 00	4.7549262@-01	2.5289946@-01	.0000000@ 00	4.9244745@ 01	-8.1445380@-05	-2.344988@-03
30	-1.9327468@-02	5.7982404@-03	6.0803150@-02	.0000000@ 00	4.8494649@ 01	-1.5196445@-04	-2.309269@-03
40	1.1915062@-01	-3.5745186@-02	-1.0106687@-02	.0000000@ 00	4.6134682@ 01	-2.1941995@-04	-2.196890@-03
50	1.9872108@-02	-5.9616325@-03	-6.2445525@-03	.0000000@ 00	4.4905607@ 01	-2.8437327@-04	-2.138362@-03
60	-6.1154081@-03	1.8346224@-03	-1.8463750@-04	.0000000@ 00	4.3975059@ 01	-3.4785837@-04	-2.094050@-03
70	-2.4747709@-03	7.4243128@-04	4.5269649@-04	.0000000@ 00	4.3003426@ 01	-4.0999150@-04	-2.047782@-03
80	8.9418580@-05	-2.6825574@-05	8.4070449@-05	.0000000@ 00	4.2002450@ 01	-4.7071094@-04	-2.000117@-03
90	2.0449263@-04	-6.1347788@-05	-2.1912600@-05	.0000000@ 00	4.1000114@ 01	-5.2999820@-04	-1.952386@-03
100	2.4659270@-05	-7.3977810@-06	-9.8588874@-06	.0000000@ 00	3.9999829@ 01	-5.8785518@-04	-1.904754@-03
110	-1.1952983@-05	3.5858949@-06	1.6745664@-07	.0000000@ 00	3.8999965@ 01	-6.4428561@-04	-1.857141@-03
120	-3.7442855@-06	1.1232856@-06	7.8552595@-07	.0000000@ 00	3.8000008@ 01	-6.9928360@-04	-1.809524@-03
130	3.4337777@-07	-1.0301333@-07	1.0828896@-07	.0000000@ 00	3.7000004@ 01	-7.5285504@-04	-1.761905@-03
140	3.4149819@-07	-1.0244946@-07	-4.3822759@-08	.0000000@ 00	3.6000000@ 01	-8.0499790@-04	-1.714286@-03
150	2.6227590@-08	-7.8682771@-09	-1.5105423@-08	.0000000@ 00	3.5000000@ 01	-8.5571218@-04	-1.666667@-03
175	-7.6059059@-10	2.2817718@-10	5.8385294@-10	.0000000@ 00	3.2500000@ 01	-9.7624790@-04	-1.547619@-03
200	1.8323855@-11	-5.4971565@-12	-2.2352824@-11	.0000000@ 00	3.0000000@ 01	-1.0878550@-03	-1.428571@-03
225	-2.2927989@-13	6.8783966@-14	8.4664472@-13	.0000000@ 00	2.7500000@ 01	-1.1905336@-03	-1.309524@-03
250	-1.1646959@-14	3.4940877@-15	-3.1674640@-14	.0000000@ 00	2.5000000@ 01	-1.2842836@-03	-1.190476@-03
275	1.3204788@-15	-3.9614365@-16	1.1678988@-15	.0000000@ 00	2.2500000@ 01	-1.3691050@-03	-1.071429@-03
300	-8.7667150@-17	2.6300145@-17	-4.2308569@-17	.0000000@ 00	2.0000000@ 01	-1.4449979@-03	-9.523810@-04
325	4.9182863@-18	-1.4754859@-18	1.4989798@-18	.0000000@ 00	1.7500000@ 01	-1.5119622@-03	-8.333333@-04
350	-2.5353192@-19	7.6059576@-20	-5.1575092@-20	.0000000@ 00	1.5000000@ 01	-1.5699979@-03	-7.142857@-04
375	1.2411382@-20	-3.7234147@-21	1.7032017@-21	.0000000@ 00	1.2500000@ 01	-1.6191050@-03	-5.952381@-04
400	-5.8655014@-22	1.7596504@-22	-5.2828934@-23	.0000000@ 00	1.0000000@ 01	-1.6592836@-03	-4.761905@-04
425	2.7011543@-23	-8.1034628@-24	1.4680654@-24	.0000000@ 00	7.5000000@ 00	-1.6905336@-03	-3.571429@-04
450	-1.2192170@-24	3.6576511@-25	-3.1732988@-26	.0000000@ 00	5.0000000@ 00	-1.7128550@-03	-2.380952@-04
475	5.4043148@-26	-1.6212944@-26	1.4786696@-28	.0000000@ 00	2.5000000@ 00	-1.7262479@-03	-1.190476@-04
500	6.3073830@-38	-1.8922149@-38	7.8842287@-39	.0000000@ 00	2.0657534@-27	-1.7307122@-03	-9.836921@-32

WZORY USCIŚLONE

WPLYW CIEZARU WLASNEGO ZELBET NI=0.18 H=5 A=100

U1[CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	7.0340375@ 00	-1.0861267@ 00	-5.0913922@-01	-1.2000000@ 01	-2.1274162@ 00	.0000000@ 00	-3.736037@-16
10	2.9723036@ 00	-3.8046735@-01	-3.0787608@-01	-1.1760000@ 01	-1.8431535@ 00	-5.4819305@-05	-1.248726@-05
20	7.2775728@-01	-2.2612480@-02	-1.5003359@-01	-1.1520000@ 01	-1.2999276@ 00	-1.0888973@-04	-3.680924@-05
30	-2.1312833@-01	1.0189556@-01	-4.7017659@-02	-1.1280000@ 01	-7.6544643@-01	-1.6229804@-04	-6.038145@-05
40	-3.7144195@-01	9.6260914@-02	8.5431334@-03	-1.1040000@ 01	-3.5570419@-01	-2.1497373@-04	-7.782779@-05
50	-1.5377284@-01	3.5591429@-02	3.0628019@-02	-1.0800000@ 01	-9.3609553@-02	-2.6679300@-04	-8.816439@-05
60	1.7568686@-01	-3.5213036@-02	3.2967031@-02	-1.0560000@ 01	4.4129206@-02	-3.1763647@-04	-9.256537@-05
70	4.7523623@-01	-9.3300620@-02	2.6075670@-02	-1.0320000@ 01	9.5896212@-02	-3.6741384@-04	-9.289034@-05
80	6.8919508@-01	-1.3189594@-01	1.6675055@-02	-1.0080000@ 01	9.8046736@-02	-4.1606789@-04	-9.088047@-05
90	8.1238093@-01	-1.5253283@-01	8.2944042@-03	-9.8400000@ 00	7.7821119@-02	-4.6356900@-04	-8.783101@-05
100	8.6303615@-01	-1.5930518@-01	2.2563069@-03	-9.6000000@ 00	5.2283253@-02	-5.0990642@-04	-8.454781@-05
110	8.6560071@-01	-1.5792614@-01	-1.5796920@-03	-9.3600000@ 00	3.0153964@-02	-5.5508011@-04	-8.143887@-05
120	8.4171917@-01	-1.5233740@-01	-3.1382692@-03	-9.1200000@ 00	1.4505508@-02	-5.9909477@-04	-7.864454@-05
130	8.0690984@-01	-1.4531600@-01	-3.6709772@-03	-8.8800000@ 00	5.2262605@-03	-6.4195613@-04	-7.615558@-05
140	7.7048228@-01	-1.3840968@-01	-3.5430196@-03	-8.6400000@ 00	8.2678645@-04	-6.8360908@-04	-7.389879@-05
150	7.3690486@-01	-1.3227446@-01	-3.1528595@-03	-8.4000000@ 00	4.5271119@-04	-7.2423702@-04	-7.178948@-05
175	6.7023800@-01	-1.2045852@-01	-2.2748804@-03	-7.8000000@ 00	1.4018836@-03	-8.2065800@-04	-6.675182@-05
200	6.1779949@-01	-1.1118433@-01	-2.0026234@-03	-7.2000000@ 00	3.1005930@-03	-9.0994142@-04	-6.170310@-05
225	5.6778040@-01	-1.0221710@-01	-2.0167253@-03	-6.6000000@ 00	3.2661003@-03	-9.9208442@-04	-5.658093@-05
250	5.1680757@-01	-9.3033968@-02	-2.0569768@-03	-6.0000000@ 00	2.8942800@-03	-1.0670848@-03	-5.143349@-05
275	4.6517314@-01	-8.3732279@-02	-2.0700294@-03	-5.4000000@ 00	2.5253364@-03	-1.1349420@-03	-4.628635@-05
300	4.1341189@-01	-7.4413565@-02	-2.0700402@-03	-4.8000000@ 00	2.2254997@-03	-1.1956565@-03	-4.114253@-05
325	3.6168540@-01	-6.5102395@-02	-2.0678870@-03	-4.2000000@ 00	1.9413441@-03	-1.2492277@-03	-3.599944@-05
350	3.1004353@-01	-5.5805157@-02	-2.0622669@-03	-3.6000000@ 00	1.6376851@-03	-1.2956562@-03	-3.085541@-05
375	2.5862950@-01	-4.6549389@-02	-2.0505337@-03	-3.0000000@ 00	1.3494335@-03	-1.3349417@-03	-2.571205@-05
400	2.0759210@-01	-3.7542636@-02	-2.0563692@-03	-2.4000000@ 00	1.2649678@-03	-1.3670848@-03	-2.057832@-05
425	1.5497010@-01	-2.7959276@-02	-2.1657888@-03	-1.8000000@ 00	1.6146694@-03	-1.3920857@-03	-1.546552@-05
450	9.7807946@-02	-1.7694525@-02	-2.4222805@-03	-1.2000000@ 00	1.5999749@-03	-1.4099451@-03	-1.033665@-05
475	3.6446222@-02	-6.3102387@-03	-2.3187884@-03	-6.0000000@-01	-2.8116675@-03	-1.4206586@-03	-4.999954@-06
500	1.8824511@-14	1.3969845@-03	-2.1498687@-05	.0000000@ 00	-1.6805724@-02	-1.4242106@-03	7.982769@-07

WPLYW CIEZARU WLASNEGO STAL NI=0.5 H=0.5 A=100

U1 [CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	3.5180339@-01	-1.0456602@-01	-9.0253393@-02	-3.9000000@ 00	-1.1668630@ 00	.0000000@ 00	9.300827@-38
10	-6.3464674@-02	1.9369757@-02	-6.8430864@-03	-3.8220000@ 00	-3.9700709@-01	-1.7193433@-05	-3.572257@-05
20	-3.3656233@-02	1.0073482@-02	5.8458068@-03	-3.7440000@ 00	2.7763710@-02	-3.5027064@-05	-5.482219@-05
30	2.7272534@-03	-8.4712175@-04	1.4258579@-03	-3.6660000@ 00	3.4760296@-02	-5.2733213@-05	-5.402547@-05
40	6.0293848@-03	-1.8115199@-03	-2.3300192@-04	-3.5880000@ 00	3.2996994@-03	-7.0028316@-05	-5.141166@-05
50	3.6887597@-03	-1.1048301@-03	-1.5202819@-04	-3.5100000@ 00	-2.1241749@-03	-8.6927144@-05	-5.004013@-05
60	3.0063373@-03	-9.0141471@-04	-1.2343983@-05	-3.4320000@ 00	-5.5674859@-04	-1.0345372@-04	-4.900077@-05
70	3.0138659@-03	-9.0422195@-04	3.1506174@-06	-3.3540000@ 00	1.0173730@-04	-1.1961064@-04	-4.791784@-05
80	3.0015185@-03	-9.0050248@-04	-5.1453146@-06	-3.2760000@ 00	8.3336650@-05	-1.3539648@-04	-4.680268@-05
90	2.9332179@-03	-8.7996789@-04	-7.6212613@-06	-3.1980000@ 00	2.9431360@-05	-1.5081080@-04	-4.568586@-05
100	2.8577483@-03	-8.5732129@-04	-7.3702301@-06	-3.1200000@ 00	2.1875181@-05	-1.6585365@-04	-4.457125@-05
110	2.7854525@-03	-8.3563500@-04	-7.1415216@-06	-3.0420000@ 00	2.4239504@-05	-1.8052507@-04	-4.345710@-05
120	2.7141986@-03	-8.1425973@-04	-7.1252279@-06	-2.9640000@ 00	2.4593493@-05	-1.9482507@-04	-4.234287@-05
130	2.6428657@-03	-7.9285918@-04	-7.1402209@-06	-2.8860000@ 00	2.3875065@-05	-2.0875365@-04	-4.122858@-05
140	2.5714363@-03	-7.7143088@-04	-7.1437984@-06	-2.8080000@ 00	2.3144094@-05	-2.2231077@-04	-4.011429@-05
150	2.5000007@-03	-7.5000020@-04	-7.1432054@-06	-2.7300000@ 00	2.2493346@-05	-2.3549650@-04	-3.900000@-05
175	2.3214285@-03	-6.9642857@-04	-7.1428437@-06	-2.5350000@ 00	2.0893101@-05	-2.6683579@-04	-3.621429@-05
200	2.1428571@-03	-6.4285714@-04	-7.1428577@-06	-2.3400000@ 00	1.9285711@-05	-2.9585365@-04	-3.342857@-05
225	1.9642857@-03	-5.8928571@-04	-7.1428571@-06	-2.1450000@ 00	1.7678569@-05	-3.2255007@-04	-3.064286@-05
250	1.7857143@-03	-5.3571429@-04	-7.1428571@-06	-1.9500000@ 00	1.6071426@-05	-3.4692507@-04	-2.785714@-05
275	1.6071429@-03	-4.8214286@-04	-7.1428571@-06	-1.7550000@ 00	1.4464284@-05	-3.6897865@-04	-2.507143@-05
300	1.4285714@-03	-4.2857143@-04	-7.1428571@-06	-1.5600000@ 00	1.2857141@-05	-3.8871079@-04	-2.228571@-05
325	1.2500000@-03	-3.7500000@-04	-7.1428571@-06	-1.3650000@ 00	1.1249998@-05	-4.0612150@-04	-1.950000@-05
350	1.0714286@-03	-3.2142857@-04	-7.1428571@-06	-1.1700000@ 00	9.6428557@-06	-4.2121079@-04	-1.671429@-05
375	8.9285715@-04	-2.6785714@-04	-7.1428576@-06	-9.7500000@-01	8.0357349@-06	-4.3397865@-04	-1.392857@-05
400	7.1428567@-04	-2.1428570@-04	-7.1428446@-06	-7.8000000@-01	6.4281085@-06	-4.4442508@-04	-1.114286@-05
425	5.3571509@-04	-1.6071454@-04	-7.1432095@-06	-5.8500000@-01	4.8331422@-06	-4.5255008@-04	-8.357143@-06
450	3.5712951@-04	-1.0713861@-04	-7.1331122@-06	-3.9000000@-01	2.9198109@-06	-4.5835565@-04	-5.571415@-06
475	1.7873741@-04	-5.3627360@-05	-7.4081706@-06	-1.9500000@-01	8.9717323@-06	-4.6183579@-04	-2.786065@-06
500	.0000000@ 00	1.5263224@-07	-1.2933949@-08	.0000000@ 00	-1.8316327@-04	-4.6299640@-04	8.721843@-09

WZORY UŚCIŚLONE

WPLYW PARCIA CIECZY ZELBET NI=0.18 H=5 A=100

U1[CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	1.3967679@ 02	-2.5141825@ 01	-1.1759334@ 01	.0000000@ 00	7.5425469@-01	.0000000@ 00	-2.801958@-16
10	4.6118139@ 01	-8.8071146@ 00	-7.0804649@ 00	.0000000@ 00	6.3344086@ 00	-1.8701019@-06	-2.890569@-04
20	-5.3759888@ 00	-5.2345703@-01	-3.4267034@ 00	.0000000@ 00	1.7909083@ 01	-1.2003105@-05	-8.520657@-04
30	-2.6692785@ 01	2.3586936@ 00	-1.0420754@ 00	.0000000@ 00	2.9281333@ 01	-3.2406965@-05	-1.397719@-03
40	-2.9894490@ 01	2.2282619@ 00	2.4405401@-01	.0000000@ 00	3.7766107@ 01	-6.1450195@-05	-1.801569@-03
50	-2.4392890@ 01	8.1924604@-01	7.5527822@-01	.0000000@ 00	4.2833112@ 01	-9.6266443@-05	-2.040842@-03
60	-1.6303545@ 01	-8.1511658@-01	8.0942200@-01	.0000000@ 00	4.5021509@ 01	-1.3409335@-04	-2.142717@-03
70	-8.9065688@ 00	-2.1597366@ 00	6.4989976@-01	.0000000@ 00	4.5219820@ 01	-1.7283895@-04	-2.150239@-03
80	-3.4908548@ 00	-3.0531466@ 00	4.3229295@-01	.0000000@ 00	4.4269600@ 01	-2.1117988@-04	-2.105715@-03
90	-1.7636741@-01	-3.5262229@ 00	2.3829639@-01	.0000000@ 00	4.2801415@ 01	-2.4843062@-04	-2.033125@-03
100	1.4591702@ 00	-3.6876200@ 00	9.8571918@-02	.0000000@ 00	4.1210260@ 01	-2.8434179@-04	-1.957125@-03
110	1.9814979@ 00	-3.6556977@ 00	1.4358983@-02	.0000000@ 00	3.9698008@ 01	-3.1891256@-04	-1.885159@-03
120	1.8916474@ 00	-3.5263287@ 00	-2.6348817@-02	.0000000@ 00	3.8335776@ 01	-3.5225188@-04	-1.820476@-03
130	1.5488391@ 00	-3.3637964@ 00	-3.8680014@-02	.0000000@ 00	3.7129978@ 01	-3.8449237@-04	-1.762860@-03
140	1.1685715@ 00	-3.2039279@ 00	-3.5718021@-02	.0000000@ 00	3.6019138@ 01	-4.1574714@-04	-1.710620@-03
150	8.5427966@-01	-3.0619089@ 00	-2.6686527@-02	.0000000@ 00	3.4989520@ 01	-4.4609510@-04	-1.661793@-03
175	4.6847364@-01	-2.7883919@ 00	-6.3629563@-03	.0000000@ 00	3.2532451@ 01	-5.1824063@-04	-1.545181@-03
200	4.1202476@-01	-2.5737114@ 00	-6.0955808@-05	.0000000@ 00	3.0071775@ 01	-5.8515189@-04	-1.428313@-03
225	4.1157048@-01	-2.3661345@ 00	-3.8793007@-04	.0000000@ 00	2.7575606@ 01	-6.4676242@-04	-1.309744@-03
250	3.8903186@-01	-2.1535576@ 00	-1.3193117@-03	.0000000@ 00	2.5066990@ 01	-7.0302048@-04	-1.190590@-03
275	3.5123765@-01	-1.9382455@ 00	-1.6162068@-03	.0000000@ 00	2.2558420@ 01	-7.5391584@-04	-1.071442@-03
300	3.1073294@-01	-1.7225813@ 00	-1.6045028@-03	.0000000@ 00	2.0051470@ 01	-7.9945143@-04	-9.523711@-04
325	2.7120534@-01	-1.5071406@ 00	-1.5616155@-03	.0000000@ 00	1.7545098@ 01	-8.3962965@-04	-8.333278@-04
350	2.3242590@-01	-1.2918533@ 00	-1.5438936@-03	.0000000@ 00	1.5038715@ 01	-8.7445090@-04	-7.142858@-04
375	1.9394030@-01	-1.0765737@ 00	-1.5354998@-03	.0000000@ 00	1.2532271@ 01	-9.0391512@-04	-5.952368@-04
400	1.5554645@-01	-8.6134115@-01	-1.5417655@-03	.0000000@ 00	1.0025954@ 01	-9.2802231@-04	-4.761959@-04
425	1.1623253@-01	-6.4597040@-01	-1.6229646@-03	.0000000@ 00	7.5199617@ 00	-9.4677300@-04	-3.571706@-04
450	7.3357485@-02	-4.2993780@-01	-1.8168180@-03	.0000000@ 00	5.0136996@ 00	-9.6016755@-04	-2.381334@-04
475	2.7334720@-02	-2.1306600@-01	-1.7391093@-03	.0000000@ 00	2.5041410@ [illegible]	-9.6820273@-04	-1.189404@-04
500	3.1374184@-15	1.0477313@-03	-1.6123625@-03	.0000000@ 00	-1.2604207@-[illegible]	-9.7086070@-04	5.987036@-07

WZORY UŚCISLONE

WPLYW PARCIA CIECZY STAL NI=0,5 H=0,5 A=100

U1[CM]	M12 [KGCM/CM]	M21 [KGCM/CM]	Q1 [KG/CM]	N11 [KG/CM]	N22 [KG/CM]	W1 [CM]	W3 [CM]
0	1.4895444@ 01	-4.4686532@ 00	-3.8567048@ 00	.0000000@ 00	1.3405900@-01	.0000000@ 00	3.577241@-37
10	-2.8482767@ 00	8.2776741@-01	-2.9216181@-01	.0000000@ 00	3.2033885@ 01	-1.9762079@-05	-1.526606@-03
20	-1.5716339@ 00	4.3049067@-01	2.5009858@-01	.0000000@ 00	4.9186483@ 01	-8.1327538@-05	-2.542826@-03
30	-1.4006265@-02	-3.6201784@-02	6.1211875@-02	.0000000@ 00	4.8485483@ 01	-1.5188946@-04	-2.308781@-03
40	1.2988824@-01	-7.7415380@-02	-9.6795691@-03	.0000000@ 00	4.6141013@ 01	-2.1932975@-04	-2.197080@-03
50	3.2659502@-02	-4.7214963@-02	-6.2191535@-03	.0000000@ 00	4.4909223@ 01	-2.8427966@-04	-2.138467@-03
60	6.2537525@-03	-3.8521996@-02	-2.4974286@-04	.0000000@ 00	4.3976207@ 01	-3.4776579@-04	-2.094050@-03
70	9.5532442@-03	-3.8641964@-02	4.1241955@-04	.0000000@ 00	4.3004348@ 01	-4.0989923@-04	-2.047771@-03
80	1.1603554@-02	-3.8483012@-02	5.7892537@-05	.0000000@ 00	4.2003561@ 01	-4.7061859@-04	-2.000115@-03
90	1.1462303@-02	-3.7605466@-02	-4.7917150@-05	.0000000@ 00	4.1001258@ 01	-5.2990582@-04	-1.952387@-03
100	1.1014685@-02	-3.6657662@-02	-3.7189519@-05	.0000000@ 00	4.0000935@ 01	-5.8776281@-04	-1.904754@-03
110	1.07[illegible]1090@-02	-3.5710898@-02	-2.7415452@-05	.0000000@ 00	3.9001036@ 01	-6.4419124@-04	-1.857141@-03
120	1.04[illegible]5839@-02	-3.4797424@-02	-2.6719139@-05	.0000000@ 00	3.8001051@ 01	-6.9919123@-04	-1.809524@-03
130	1.0165115@-02	-3.3882871@-02	-2.7359867@-05	.0000000@ 00	3.7001020@ 01	-7.5276267@-04	-1.761905@-03
140	9.8904385@-03	-3.2967132@-02	-2.7512755@-05	.0000000@ 00	3.6000989@ 01	-8.0490555@-04	-1.714286@-03
150	9.6154142@-03	-3.2051291@-02	-2.7487408@-05	.0000000@ 00	3.5000961@ 01	-8.5561981@-04	-1.666667@-03
175	8.9285705@-03	-2.9761904@-02	-2.7471951@-05	.0000000@ 00	3.2500893@ 01	-9.7615552@-04	-1.547619@-03
200	8.2417583@-03	-2.7472527@-02	-2.7472550@-05	.0000000@ 00	3.0000824@ 01	-1.0877627@-03	-1.428571@-03
225	7.5549451@-03	-2.5183150@-02	-2.7472527@-05	.0000000@ 00	2.7500755@ 01	-1.1904412@-03	-1.309524@-03
250	6.8681319@-03	-2.2893773@-02	-2.7472528@-05	.0000000@ 00	2.5000687@ 01	-1.2841912@-03	-1.190476@-03
275	6.1813187@-03	-2.0604396@-02	-2.7472527@-05	.0000000@ 00	2.2500618@ 01	-1.3690127@-03	-1.071429@-03
300	5.4945055@-03	-1.8315018@-02	-2.7472527@-05	.0000000@ 00	2.0000549@ 01	-1.4449055@-03	-9.523810@-04
325	4.8076923@-03	-1.6025641@-02	-2.7472527@-05	.0000000@ 00	1.7500481@ 01	-1.5118698@-03	-8.333333@-04
350	4.1208791@-03	-1.3736264@-02	-2.7472527@-05	.0000000@ 00	1.5000412@ 01	-1.5699055@-03	-7.142857@-04
375	3.4340659@-03	-1.1446886@-02	-2.7472529@-05	.0000000@ 00	1.2500343@ 01	-1.6190127@-03	-5.952381@-04
400	2.7472526@-03	-9.1575091@-03	-2.7472479@-05	.0000000@ 00	1.0000275@ 01	-1.6591912@-03	-4.761905@-04
425	2.0604427@-03	-6.8681328@-03	-2.7473883@-05	.0000000@ 00	7.5002061@ 00	-1.6904412@-03	-3.571429@-04
450	1.3735750@-03	-4.5787382@-03	-2.7435047@-05	.0000000@ 00	5.0001362@ 00	-1.7127627@-03	-2.380952@-04
475	6.8745159@-04	-2.2895924@-03	-2.8492964@-05	.0000000@ 00	2.5000970@ 00	-1.7261555@-03	-1.190490@-04
500	-4.1700084@-18	5.8704709@-07	-4.9745961@-08	.0000000@ 00	-7.0447412@-04	-1.7306194@-03	3.354555@-08

LITERATURA

1. Bielak S., Praca statyczna powłoki śrubowej obciążonej powierzchniowo, praca doktorska, Politechnika Śląska 1969.
2. Bielak S. Statyka powłoki śrubowej w błonowym stanie naprężenia, XII Konferencja Naukowa Komit. Nauki PZITB, Wrocław - Krynica 1966.
3. Bielak S., O możliwości pracy powłoki śrubowej w bezmomentowym stanie napięcia, Politechnika Śląska, Budownictwo z. 22, Gliwice 1968.
4. Boroch H., Rozwiązanie niektórych zagadnień brzegowych równań bezmomentowej teorii prostokreślnych powłok sprężystych, praca doktorska, Uniwersytet Wrocławski 1962.
5. Boroch H., The momentless theory of one-sheet hyperboloidal shells, Zastosowania matematyki V, 1960.
6. Cicala P., Homogeneous stress states in helicoidal shells J.Appl.Mech. 29, 1962.
7. Connell A.J., Application of tensor analysis, New York 1957 przekład w języku rosyjskim - Wwiedienie w tienzornyj analiz, Moskwa 1963.
8. Czernina W.S., Statika tonkostiennych obołoczek wraszczienia Moskwa 1968.
9. Czernych K.F., Liniejnaja tieoria obołoczek. Uniwersytet Leningradzki, 1962 - I tom i 1964 - II tom.
10. Flüge W., Statik u. Dynamik der Schalen, Berlin 1962.
11. Goetz A. Geometria różniczkowa, Uniwersytet Wrocławski, 1959.
12. Girkman K., Dźwigary powierzchniowe, tłum. z niemieckiego,Warszawa 1957.
13. Goldenwejzer A.Ł., Tieoria uprugich tonkich obołoczek, Moskwa 1953.
14. Kaczanow L.M.,Razcziet procznosti łopasti wodianoj turbiny. Sbornik Statiej, Leningrad 1954.
15. Ledwoń J., Żelbetowe chłodnie powłokowe, Warszawa 1959
16. Łysik B. Rozwiązanie zadania brzegowego w przemieszczeniach dla bezmomentowego stanu napięcia w powłoce konoidalnej,II Sesja Naukowa WBL Politechniki Wrocławskiej 1963.
17. Łysik B., Metody geometryczne w fizyce i technice - Matematyczna teoria sprężystości, Warszawa 1968.
18. O'Mathuna U., Rotationally symmetric deformations in helicoidal shells J, Mth. and Phys. Nr 2, 1963.
19. Michlin S.G., Uprugije obołoczki, blizkije k płaskim plastinam, Sbornik Statiej, Leningrad 1954.
20. Nazarow A.A., Osnowy tieorii i mietody razczieta połogich obołoczek. Leningrad 1966 Moskwa.
21. Niewiadomski J., Praca statyczna powłokowych chłodni kominowych z uwzględnieniem stanu zgięciowego, Politechnika Śląska z.n. nr 127,Gliwice 1965.

22. Nikiriejew W.M., Szadurski W.L., Prakticzeskieje mietody razczieta obołoczek, Moskwa 1966.

23. Nowożiłow W.W., Tieoria tonkich obołoczek, Leningrad 1962.

24. Ogibałow L.M. Kołtunow M.A., Obołoczki i plastiny, Moskwa 1969.

25. Pogoriełow A.W., Lekcjii po difieriencialnoj gieometrii, Charków 1961.

26. Reissner E., Smoll rotationally symmetric deformations of shallow helicoidal shells, J. Apll. Mech. 22, 1955.

27. Sneddon J.N., Berry P.S., The classical theory of elasicity przekład w języku rosyjskim - Klassiczeskaja tieoria uprugosti, Moskwa 1961.

28. Sneddon J.N., Równania różniczkowe cząstkowe, Warszawa 1962.

29. Stiepanow W.W., Równania różniczkowe, Warszawa 1956.

30. Timoszenko S., Goodier J.N., Teoria spreżystości, Warszawa 1962.

31. Timoszenko S., Woinowsky-Krieger S., Teoria płyt i powłok, Warszawa 1962.

Резюме

В работе приводятся решения линейчатых оболочек построенных из однородного изотропного материала, находящихся в моментном напряженном состоянии. Принята математическая модель определяющая состояние напряжения в оболочке, основанная на линейной теории оболочек, причем материальную сребу составляющую оболочку принято как среду Гука (Hooke'a). Эта модель ведет к системе линейных уравнений с частными производными, называемых уравнениями равновесия, а также к линейным дифференциальным зависимостьям между функциями, определяющими деформацию оболочки, а координатами вектора смещения ее срединной поверхности. Эти уравнения - дополненные алгебраическими отношениями между моментами и напряженниями, а функциями определяющими деформацию оболочки, получаемые из принятой модели среды - приводят к системе уравнений определяющих статическую работу оболочки.

Существенной проблемой в теории оболочек является определение деформированной поверхности по отношению к срединной поверхности оболочки. В настоящей работе, характеристику деформированной поверхности - кроме вектора смещения $\vec{u}$ определяющего положение отдельных точек этой поверхности и связанного с первой дифференциальной формой - введен новый вектор $\vec{d}$, связанный с вращением и второй дифференциальной формой. Такой подход к делу разрешил глубже проникнуть в сущность работы оболочки, вызванной моментным режимом и на том основании позволил ввести новые понятия тензоров: ϱ_{ij} - смешанной моментной деформации, связанного с второй дифференциальной формой и ϑ_{ij} моментной деформации, связанного с третией дифференциальной формой.

Новые величины ϱ_{ij} и ϑ_{ij} позволили просто определить любой, паралельный - по отношению к срединной поверхности - слой оболочки. Благодаря тому показалось, что в физических отношениях между напряжениями и деформацией, напряжения в любой точке оболочки, в области линейной теории, можно рассматривать как сумму состоящую из напряжений вызванных безмоментной и моментной работами.

Следовательно, интегралы определяющие усилия и моменты могут быть расчитаны и представлены с помощью соответственных сумм состоящих из воздействия работ: безмоментной и моментной.

Приведенные в работе решения общей системы уравнений линейчатых оболочек, работающих в моментном режиме, основуется на независимом рассматривании двух вынужденных состоянии: безмоментного и моментного. В условиях

сплошной среди (континуум) подчиненной закону Гука, применяя принцип суперпозиции, при соответственно подобранных функциях нагрузок, можно рассматривать отдельные влияния независимо.

Следует подчеркнуть, что функции нагрузок вынуждающих определенные состоянния т.е. безмоментные и моментные, плотно связаны с определенным заданным состояннием перемещений и поэтому их форма ясно определена. Осуществляя, именно только безмоментное либо моментное состояние, мы вводим в рассматриваемое континуум, каким является оболочка, некоторые добавочные связи придающие обсуждаемой модели жёсткость. Влияние этих добавочных связей полностью компенсируется соответственно подобранной функцией нагрузок вынуждающей определенное состояние и потому оно не передается на работу второго состояния. Такая процедура, по отношению к линейчатым оболочкам - основанная на введении двух вынужденных состояний: бвзмоментного и моментного - позволяет получить решение системы дифференциальных уравнений обсуждаемого класса оболочек, что - обще говоря - невозможно путем прямого расчета.

Существенным отрезком общей системы уравнений являются уравнения неразделимости. Единый подход к этому вопросу мы получаем, исходя из условий необходимости, выполнения - коэффициентами первой и второй дифференциальной формы деформированной поверхности - уравнений Гауса и Кодации. Принятые понятия тензоров ϱ_{ij} и ϑ_{ij} облегчают задачу и дают как решение три уравнения, а именно уравнения неразделимости. Эти уравнения являются соответственными нетолко для оболочек, но - принимая $H = 0$ - тоже для пластин.

Уравнения неразделимости имеют основное значение для представленной в работе теории, так как они являются математическим видом связей наложенных на вынужденные, безмоментное и моментное состояния, рассматриваемые независимо. Они могут быть использованы также для определения функции вынуждающих нагрузок выступающих в решениях общей системы уравнений линейчатых оболочек. Следует тоже заметить, что большенство представленных в работе решений касается всех видов оболочек, нетолько линейчатых. Приведенный в конце работы численный пример, иллюстрирующий обсужденный метод решения, разчитанный для цилиндрической оболочки, подтверждает ее полную пригодность.

S u m m a r y

The paper treats of stress analysis of rectilinearly drawn shell structures constructed of homogenous material working in moment state. The assumed mathematical model representing the stress in shell is based on the linear theory of shell structures admitting that the material medium of which shells are made is subject to the principle of Hooke.The assumed model leads to some linear equations with partial derivatives, called the equations of equilibrium and to linear differential connections between the functions describing the deformations of the shell and the coordinates of the displacement vector of the middle inner surface of the shell. These equations supplemented by algebraic connections between forces, moments and functions describing the deformation of the shell resulting from the assumed model of the material medium lead to a set of equations describing the static work of the shell.

The essential problem in the theory of shell structures is the description of the deformed surface relatively to the inner middle surface of the shell.

In this paper to the description of the deformed surface, beside the vector of displacement $\vec{u}$ defining the positions of the individual points of the surface and connected with the first differential form,another vector $\vec{d}$ has been introduced connected with turn and with the second differential form. This way of formulation allows of a better insight into the character of the work of the shell as resulting from the moment state and of introducing on these grounds new conceptions of tensors: ϱ_{ij} of compound bending deformation connected with the second differential form and, ϑ_{ij} of bending deformation connected with the third differential form.

The introduction of new values ϱ_{ij} and ϑ_{ij} allows of a simple description of whichever layer parallel to the middle inner surface of the shell. With regard to what has been said above it has been proved that concerning the physical relations linking stresses with deformations, the stresses in any point of the shell may be examined within the limits of the linear theory as a sum consisting of stresses resulting from the momentless and moment work of the shell.

Thus integrals defining sectional forces and moments may be computed and defined also by means of adequate sums composed of effects of the momentless and moment work of the shell.

The solution of the general scheme of equations of rectilinearly drawn shell structures working in moment state as given in the paper consists in examination of the two forced states independently, the momentless and the moment state. Employing the principle of superposition and applying the adequately selected functions of loads we can examine for continuous material media subject to the principle of Hooke the particular effects independently.

It should be emphasised however that the functions of loads forcing the particular states i.e. the momentless and the moment state, are closely connected with a given state of displacements and therefore their character is univocally defined. Because by working out the momentless or the moment state only we introduce into the continuous material medium under examination what a shell exactly is, additional bonds stiffning the particular model. The effect of these additional bonds is totally compensated by the adequately selected function of loads forcing the given state and therefore is not transfered to the work of the other state.

This procedure in reference to rectilinearly drawn shell structures, introducing two forced states, the momentless and the moment state, allows of achieving the solution of differential equations pertaining to this class of shell structure, what cannot be accomplished commenly by direct calculation.

An important fragment of the general scheme of equations are equations of continuity of the shell. The uniform formulation of this problem may be obtained if we begin from the condition of the necessity of fulfilling the equations of Gauss and Codazzi by coefficients of the first and second differential forms of the deformed surface.

The previously introduced conceptions of tensors ϱ_{ij} and ϑ_{ij} facilitate this issue and in solution give three equations called the equations of continuity of the shell. These equations do not hold good for shell structure only but are also valid for flat and upright plates under assumptions that $H = 0$.

The equations of continuity of the shell are of basic importance for the theory presented in the paper, as they are the mathematical description of bonds put on both forced states, the momentless and the moment state independently examined. They may be also employed for defining functions of forcing loads, coming in solutions of the general scheme of equations of rectilinearly drawn shell structures. It should be underlined that most of the issues presented in the paper refer to all shell structures and not to rectilinearly drawn only.

The example given in the final part of the paper computed for a cylindrical shell structure illustrating the proposed method of solution, fully proves its practibility.