

Stanisław Chmielniak

ITERACYJNE OBLICZANIE KONSTRUKCJI NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

Streszczenie. Praca zajmuje się obliczaniem symetrycznych konstrukcji odkształcalnych na jednorodnym podłożu. Za podłoże przyjęto półprzestrzeń sprężystą. Zamiast rozwiązywania równań kanonicznych zaproponowano szybko zbieżne postępowanie iteracyjne skuteczne zarówno dla przypadków z odrywaniem, jak i bez odrywania konstrukcji wiotkiej od podłoża. Podano sposób przyspieszenia iteracji oraz sposób wyznaczenia rzędnych powierzchni ugięcia konstrukcji i podłoża.

1. Wstęp

Przedstawiony w pracy [1] iteracyjny sposób rozwiązywania symetrycznych konstrukcji nieskończenie sztywnych może być bezpośrednio stosowany również do obliczania konstrukcji mało odkształcalnych, o sztywności nieporównywalnie większej od sztywności podłoża.

Jako kryterium dostatecznie dużej sztywności można przy tym, według Gorbunowa-Posadowa [2], przyjmować wyróżniki t . Przykładowo dla belki na półprzestrzeni sprężystej

$$t = \frac{\pi E_0 l^3 b}{EJ(1 - \mu_0^2)} \leq 1,$$

gdzie:

- E_0, μ_0 - parametry podłoża,
- EJ - sztywność konstrukcji,
- l, b - długość i szerokość belki.

Wszelkie konstrukcje o wyróżniku t większym od określonych wartości granicznych, (np. dla belek $t > 1$), czyli o sztywności mniejszej, porównywalnej z sztywnością podłoża, trzeba już rozwiązywać uwzględniając odkształcalność konstrukcji. Uzasadnione poprzednio w [1] dla konstrukcji sztywnych wygodne postępowanie iteracyjne wymaga więc rozszerzenia na konstrukcje odkształcalne.

Wynikające z odkształcalności konstrukcji drobne uzupełnienia merytoryczne, w nawiązaniu do [1], uzasadniono w niżej podanym rozumowaniu.

Celem uwypuklenia istoty i łatwego wskazania toku obliczania konstrukcji dla przypadków z odrywaniem i bez odrywania podstawy fundamentu od podłoża, posłużono się prostym przykładem pasa płyty wiotkiej, ułożonej na jednorodnej półprzestrzeni sprężystej.

1. Uzasadnienie uzupełnień sposobu postępowania

Dla symetrycznego pasa płyty wiotkiej (rys. 1a), stanowiącej segment żelbetowego podłoża kolei, otrzymuje się wg [7]¹⁾ układ równań wyjściowych podany w tabelicy 1.

Wyrazy wolne równań przedstawiają w założonych punktach oddziaływań x_1 ugięcia δ_1^P , wywołane obciążeniem zewnętrznym $\sum P_z$, dla pomocniczego schematu konstrukcji oddzielonej od podłoża i utwierdzonej w osi symetrii (rys. 1b). Ugięcia te są stałe dla stałego obciążenia zewnętrznego $\sum P_z = \text{const}$.

Zmierzając do zastosowania opisanego poprzednio iteracyjnego sposobu rozwiązywania przyjmijmy, że konstrukcja po pierwotnym odkształceniu w schemacie pomocniczym, o wartości δ_1^P , zastyga w odkształconej pozycji i staje się nieskończenie sztywną (rys. 1d). W konsekwencji przyjętego wyżej usztywnienia konstrukcji przyjmijmy myślowo zamiast podłoża rzeczywistego (rys. 1c) podłożę fikcyjne (rys. 1d) o od-

¹⁾Celem nawiązania i porównania zaczerpnięto przykład z pracy [7] str. 104.

kształceniach V_i , równych sumie odpowiednich odkształceń konstrukcji rzeczywistej i podłoża rzeczywistego

$$V_i = V_i^k + V_i^G. \quad (1)$$

Ponieważ jednostkowe przemieszczenia wzajemne δ_{ij} pomiędzy rzeczywistą konstrukcją wiotką a rzeczywistym podłożem składają się (tabl.1) wg [7] z odkształcenia konstrukcji δ_{ij}^k i odkształcenia podłoża δ_{ij}^G i są sumą tych odkształceń, odkształcenia V_i ustroju fikcyjnego, obliczane wg [1] na bazie wsp. $\delta_{ij}^k + \delta_{ij}^G$, będą automatycznie równe odkształceniom ustroju rzeczywistego. Układ równań kanonicznych metody sił [4], opisujący przyjęty ustrój fikcyjny (rys. 1d), będzie identyczny z układem opisującym zadanie rzeczywiste (rys. 1a). Rozwiązania układu dla ustroju fikcyjnego będą więc równocześnie rozwiązaniami zadania rzeczywistego.

Rozwiążmy zatem zadanie w usztywnionym ustroju fikcyjnym. W ustroju tym można już zastosować podany poprzednio w [1] iteracyjny sposób postępowania, uzasadniony dla konstrukcji sztywnych. Nie występujące poprzednio odkształcenie podstawy fundamentu wywoła tu jednak drobną modyfikację przebiegu iteracji.

Rozważmy równanie równowagi symetrycznej konstrukcji sztywnej o odkształconej już uprzednio podstawie, na przyjmowanym do obliczeń sprężonym modelu podłoża (rys. 1d):

$$y_0 \cdot K_z + \sum_{i=0}^{i=n} \delta_i^P \cdot K_i + \sum P_z = 0 \quad (2)$$

Osiadanie y_0 w przyjętym modelu obliczymy więc po uwzględnieniu odpowiednich znaków jako

$$y_0 = \frac{\sum P_z - \sum_{i=0}^{i=n} \delta_i^P \cdot K_i}{K_z}. \quad (3)$$

Do wyznaczenia w każdym przybliżeniu wielkości osiadania y_0 trzeba tu dodatkowo obliczać wartość sumy:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \delta_i^P \cdot K_1 \quad (4)$$

Iloczyny $\delta_i^P \cdot K_1$ przedstawiają, w odpowiednich punktach, oddziaływanie podłoża wywołane tylko wstępnym, myślowym odkształceniem podstawy konstrukcji. Suma (4) przedstawia, łączne dla całej rozważanej bryły, oddziaływanie podłoża wywołane tym odkształceniem.

Całkowite oddziaływanie x_1 sprężyn modelu musimy tu obliczać jako sumy wpływów odkształcenia podstawy δ_i^P i ogólnego osiadania konstrukcji y_0 .

$$x_1 = \delta_i^P \cdot K_1 + y_0 \cdot K_1 \quad (5)$$

Są to jedyne, dodatkowe czynności jakie należy wykonać w przedstawionym poprzednio [1] algorytmie postępowania.

2. Przykład liczbowy

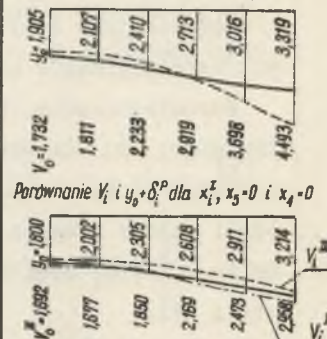
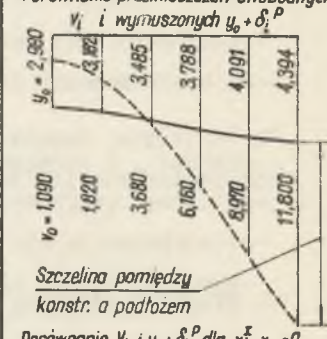
Modyfikujemy tablicę 1 wg poprzednio podanych zasad [1]. Nowy zapis współczynników umieszczono w górnej części tabl. 2.

Przemieszczenie V_1^I oraz sztywności K_1^I i K_z^I obliczono jak poprzednio. Pod wierszem "sztywności" wprowadzono nowy wiersz stałych odkształceń konstrukcji wywołanych obciążeniem zewnętrznym $\sum P_z = 1$, czyli wiersz wyrazów wolnych δ_i^P . W następnym wierszu obliczono iloczyny $\delta_i^P \cdot K_1^I$ oraz w kolumnie " $K_z^I / \sum \delta_i^P \cdot K_1^I$ " sumę tych iloczynów zgodnie z (4).

W kolumnie " $(-)y_0$ " obliczono osiadanie konstrukcji y_0^I wg zależności (3). Oddziaływanie podłoża x_1^I obliczono wg (5) sumując odpowiednie wartości wierszy " $\delta_i^P \cdot K_1^I$ " oraz " $y_0^I \cdot K_1^I$ ".

Tablica 2

Opis	Izn.	Równania					K_2	$\Delta \Delta x_i$	$\sum_{i=0}^n \delta_i^p$	Przybliżenia						
		0	1	2	3	4				5	I	II	III	IV	V	VI
Niewiadome x_i	0	1,867	0,829	0,469	0,323	0,246	0,197	$K_2 = \sum_{i=0}^n \delta_i^p \cdot \frac{\Delta \Delta x_i}{K_i}$	$\sum_{i=0}^n \delta_i^p = 0,066$	0,498	0,547	0,532	0,500	0,483	0,467	
	1	1,658	2,538	1,657	1,523	1,631	1,825			0,318	0,369	0,379	0,386	0,392	0,399	
	2	0,938	1,657	3,729	3,954	4,674	5,717			0,173	0,188	0,218	0,226	0,232	0,238	
	3	0,646	1,523	3,954	7,486	9,152	11,501			0,112	0,103	0,135	0,135	0,133	0,131	
	4	0,492	1,631	4,674	9,152	14,919	18,716			0,082	0,066	-	-	-	-	
	5	0,394	1,825	5,717	11,501	18,716	27,217			0,066	-	-	-	-	-	
Przemieszcz. Sztynwn. 1/ V_i	V_i	5,995	10,003	20,200	33,939	49,338	65,173	0,298	$y_0 = \frac{1-0,102}{0,298} = 2,98$	Sprawdzenie warunku równowagi $\sum_{i=0}^n x_i^k - 0,5 x_0^k = 1,0$						
Przemieszcz. $\delta_i^p \cdot K_i$	δ_i^p	0	0,202	0,505	0,808	1,111	1,414			1,249	1,273	1,264	1,247	1,240	1,235	
$\Delta x_i = \delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,020	0,025	0,024	0,022	0,021			0,249	0,273	0,268	0,250	0,241	0,234	
$x_i = \Delta x_i + y_0 \cdot K_i$		0,498	0,318	0,173	0,112	0,082	0,066	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000			
Przem. spraw. $y_0 + \delta_i^p$		1,090	1,820	3,680	6,160	8,970	11,800	Przemieszczenia sprawdzono obliczono mnożąc wartości V_i przez $\frac{\delta_i^p}{n} = \frac{1}{5}$ Dla połowy belki przyjęto $n = 5, \frac{1}{2} = 5,5$								
		2,980	3,182	3,485	3,788	4,091	4,394	Porównanie przemieszczeń swobodnych V_i i wymuszonych $y_0 + \delta_i^p$								
II Drugie przybl. przyjęte $x_5 = 0$	0	0,930	0,412	0,234	0,161	0,122	0,098	0,457	$y_0 = \frac{1-0,129}{0,457} = 1,905$	2,980	3,182	3,485	3,788	4,091	4,394	
	1	0,528	0,808	0,528	0,485	0,518	0,580			1,905	1,820	3,680	6,160	8,970	11,800	
	2	0,162	0,286	0,645	0,684	0,808	0,990			0,287	0,175	0,078	0,038	0,042	-	
	3	0,072	0,171	0,443	0,839	1,025	1,290			0	0,035	0,039	0,031	0,024	-	
	4	0,040	0,134	0,383	0,750	1,225	1,535			0,547	0,369	0,188	0,103	0,066	-	
Przemieszcz. Sztynwności $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	1,732	1,811	2,233	2,919	3,698	4,493	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493		
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,035	0,039	0,031	0,024	-	0,547	0,369	0,188	0,103	0,066	-			
$y_0 + \delta_i^p$		1,905	2,107	2,410	2,713	3,016	3,319	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493		
Przem. dla $x_4 = 0$ Sztynwn. $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	1,692	1,677	1,850	2,169	2,473	2,958	0,483	$y_0 = \frac{1-0,128}{0,483} = 1,800$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,038	0,048	0,042	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,800	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
x_i		0,532	0,379	0,218	0,135	0	0			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,800	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
Przem. dla $x_4 = 0$ Sztynwności $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	0,295	0,189	0,094	0,052	-	-	0,482	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,482} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,038	0,048	0,042	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,800	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
x_i		0,532	0,379	0,218	0,135	0	0			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,800	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
Przem. dla $x_4 = 0$ Sztynwności $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	1,913	1,970	2,224	2,621	3,004	3,596	0,482	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,482} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,039	0,050	0,042	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,905	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
x_i		0,500	0,347	0,176	0,093	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,905	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
IV Czwarte przybliżenie	0	0,993	0,441	0,249	0,172	0,131	0,105	0,482	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,482} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	1	0,628	0,962	0,628	0,577	0,618	0,692			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	2	0,205	0,361	0,813	0,862	1,020	1,246			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	3	0,087	0,206	0,534	1,010	1,235	1,553			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	4	-	-	-	-	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
Przemieszcz. Sztynwności $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	1,913	1,970	2,224	2,621	3,004	3,596	0,131	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,482} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,039	0,050	0,042	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,905	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
x_i		0,500	0,347	0,176	0,093	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,905	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
V Piąte przybliż.	0	0,933	0,415	0,235	0,162	0,123	0,099	0,480	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,480} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	1	0,640	0,980	0,640	0,588	0,629	0,704			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	2	0,212	0,375	0,843	0,894	1,055	1,293			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	3	0,087	0,206	0,534	1,010	1,235	1,553			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
	4	-	-	-	-	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
Przemieszcz. Sztynwności $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	1,872	1,976	2,252	2,654	3,042	3,649	0,131	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,480} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,039	0,051	0,041	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,905	2,002	2,305	2,608	2,911	3,214			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
x_i		0,483	0,382	0,232	0,133	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$y_0 + \delta_i^p$		1,810	2,012	2,315	2,618	2,921	3,224			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
Przem. dla $x_4 = 0$ Sztynwności $\delta_i^p \cdot K_i$	V_i	0,016	0,007	0,006	0,002	-	-	0,131	$y_0 = \frac{1-0,131}{0,480} = 1,810$	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
$\delta_i^p \cdot K_i$	K_i	0	0,039	0,051	0,041	-	-			1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493
Ostatecznie x_i VI		0,467	0,399	0,238	0,131	-	-	1,905	1,732	1,911	2,233	2,919	3,698	4,493		



Wartości oddziaływań x_1^I przeniesiono do kolumny "I przybliżenie" gdzie każdorazowo należy sprawdzić spełnienie się warunku równowagi.

Obliczone przemieszczenia v_1^I odpowiadają swobodnemu działaniu sił jednostkowych we wszystkich punktach założonych oddziaływań x_1 .

Celem aktywnego kierowania iteracją obliczono dodatkowo przemieszczenia $v_1^I \cdot \frac{\sum P_z}{n}$, odpowiadające swobodnemu działaniu obciążenia $\sum P_z$ równomiernie rozdzielonego na punkty oddziaływań x_1 . W następnym wierszu obliczono wymuszone odkształcenia modelu podłoża wywołane osiadaniem y_0 oraz odkształceniem podstawy konstrukcji $\frac{\delta^P}{n}$, równe $y_0 + \delta_1^P$. Z wykresu odkształceń swobodnych podłoża $v_1^I \frac{\sum P_z}{n}$ i nałożonej linii podstawy konstrukcji ($y_0 + \delta_1^P$), przedstawionego w tablicy 2 widać, że w punktach: 5, 4, 3 występuje wyraźna przerwa pomiędzy konstrukcją a podłożem.

Dostrzeżona przerwa świadczy o braku zakładanej w równaniach metody sił nierozdzielności odkształceń.

Dalsze rozwiązanie, podobnie jak innymi sposobami, można prowadzić dwójako:

- dla układów nie zapewniających przyczepności w styku lub dla podłoży nie posiadających wytrzymałości na rozciąganie,
- dla układów zapewniających przyczepność i wytrzymałość podłoża na rozciąganie.

Dotychczasowe rozwiązywanie zadania, przez obliczenie niewiadomych oddziaływań x_1 z układu równań, prowadzi do wyznaczenia wartości ujemnych mających sens praktyczny tylko dla niektórych specjalnych przypadków. Uwzględnienie możliwości odrywania się konstrukcji od podłoża wymaga w dotychczasowym sposobie [3] ponownego rozwiązywania układu równań przy założeniu wartości zerowych w miejscu poprzednio obliczonych oddziaływań ujemnych. Jeśli w ponownym rozwiązaniu pojawiają się nowe oddziaływania ujemne, układ trzeba rozwiązywać jeszcze raz.

Przy rozwiązywaniu iteracyjnym wyznaczenie oddziaływań x_1 jest bezpośrednio i jednakowo proste dla obu przypadków. W przypadkach z odrywaniem uzyskuje się nawet istotne uproszczenie obliczenia. Tok postępowania jest w obu przypadkach jednakowy, ale aktywne kierowanie iteracją i wprowadzenie pomocniczych przyjęć wydatnie przyspiesza roz-

wiązanie. Przykład liczbowy rozwiązano więc dla obu przypadków, wskazując na możliwe przyjęcia usprawniające rozwiązanie.

W przypadku z odrywaniem przyjmujemy w drugim przybliżeniu, celem przyspieszenia iteracji, wartość $x_5 = 0$ lub nawet wartość x_5 i $x_4 = 0$. Przykład iteracji dla tego przypadku przedstawiono w tabl. 2. Poustaleniu się w pierwszych kolejnych przybliżeniach wartości y_0 , iterację można przyspieszyć przez dodanie poprawek do wyznaczonych wartości x_1^k . Poprawki obliczymy jako iloczyny różnic przemieszczeń swobodnych i wymuszonych Δy_1 , obliczonych i przedstawionych na wykresie w tabl. 2 przez odpowiednie sztywności K_1 ;

$$\delta x_1 = \Delta y_1 \cdot K_1. \quad (6)$$

Przykładem obliczenia poprawek zakończono iteracje w tej tablicy.

W przypadku drugim (bez odrywania) wygodniej jest założyć w dalszych przybliżeniach dodatkową stałą siłę rozciągającą w miejscu przewidywanego rozciągania. Wartość tej siły dobieramy tak, by z pewnym nadmiarem zamknąć szczelinę pomiędzy wartościami V_1 a wartościami $(y_0 + \delta_1^P)$. Dodatkową stałą siłę rozciągającą uwzględniamy w każdej następnej iteracji przy obliczaniu przemieszczeń V_1 oraz dodajemy jej wartość do sumy obciążeń zewnętrznych.

W dalszych iteracjach wyznaczamy dla x_1 w miejscu rozciągania wg niezmiennych zasad częściową wartość dodatnią. Ostateczna wartość x_1 w tym miejscu będzie sumą założonej stałej wartości ujemnej i wyznaczonej częściowej wartości dodatniej. W czasie iteracji sprawdzamy na bieżąco zgodność odkształceń V_1 z wymuszeniem $(y_0 + \delta_1^P)$ i w miarę potrzeby wprowadzamy stałe siły ujemne w innych punktach. Przykład iteracji wg przypadku 2 dla poprzednio rozwiązane zadania (rys 1a) przedstawiono w tablicy 3. W tablicy tej wykorzystano wartości V_1^{II} obliczone już w drugim przybliżeniu tabl. 2. Celem przyspieszenia iteracji w V i VI przybliżeniu obliczono poprawki δx_1 wg (6).

Poważniejsze przyspieszenie rozwiązania można uzyskać wstawiając jako pierwsze przybliżenie wartości oddziaływań x_1 obliczone metodami przybliżonymi lub ustalone orientacyjnie.

Tablica 3

Opis	zn	0	1	2	3	4	5	Kz	γ_{y_0}	I	II	III	IV	V	*
Przemieszc. ΔV_i dla $x_5 = 0.1$	V_i	1,732	1,811	2,233	2,919	3,698	4,493			0,472	0,485	0,457	0,433		0,416
$V_i + \Delta V_i$	(-)	0,039	0,183	0,572	1,150	1,872	2,722			0,352	0,373	0,391	0,395		0,398
Sztywności $\delta_i^P \cdot K_i$	K_i	0,294	0,195	0,104	0,063	0,045	0,006	0,560	$1 - 0,202 + 0,1 = 0,898$	0,220	0,221	0,233	0,243		0,272
$y_0 \cdot K_i$		0	0,039	0,053	0,051	0,050	0,009	0,202		0,152	0,141	0,135	0,134		0,120
x_i		0,472	0,313	0,187	0,101	0,072	0,010			0,122	0,106	0,097	0,095		0,071
$y_0 + \delta_i^P$		0,472	0,352	0,220	0,152	0,122	0,010			0,081	0,084	0,085	0,081		0,069
$y_0 + \delta_i^P$		1,604	1,808	2,109	2,412	2,715	3,018			1,318	1,326	1,313	1,300		
$y_0 = 1 - 0,202 + 0,1 = 0,898$															
Druge przybliżenie															
	0	0,681	0,391	0,221	0,152	0,116	0,093			1,237	1,242	1,228	1,215		
	1	0,583	0,693	0,583	0,537	0,574	0,649			0,236	0,242	0,228	0,216		
	2	0,207	0,365	0,880	0,870	1,025	1,258			1,000	1,000	1,000	1,000		
	3	0,098	0,232	0,602	1,139	1,393	1,750			Porównanie V_i i $y_0 + \delta_i^P$ dla $x_0 = -0,1 + 0,019 = -0,081$					
	4	0,060	0,199	0,570	1,117	1,820	2,285								
	5	0,007	0,035	0,109	0,218	0,356	0,518								
Przemieszc. ΔV_i dla $x_5 = -0,1$	V_i	1,836	2,115	2,905	4,033	5,284	6,547			Porównanie V_i i $y_0 + \delta_i^P$					
$V_i + \Delta V_i$	(-)	0,039	0,183	0,572	1,150	1,872	2,722								
Sztywności $\delta_i^P \cdot K_i$	K_i	0,263	0,182	0,094	0,053	0,036	0,005	0,502							
$y_0 \cdot K_i$		0	0,037	0,047	0,043	0,040	0,007	0,174		Porównanie V_i i $y_0 + \delta_i^P$					
x_i		0,485	0,373	0,221	0,141	0,106	0,016								
$y_0 + \delta_i^P$		1,847	2,049	2,352	2,655	2,958	3,261								
$y_0 = 1 - 0,174 + 0,1 = 0,926$															
Trzecie przybliżenie															
	0	0,905	0,402	0,228	0,157	0,119	0,098			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
	1	0,618	0,947	0,618	0,568	0,608	0,681								
	2	0,208	0,367	0,825	0,875	1,030	1,264								
	3	0,091	0,215	0,558	1,055	1,290	1,622			Porównanie V_i i $y_0 + \delta_i^P$					
	4	0,052	0,173	0,495	0,970	1,582	1,985								
	5	0,006	0,020	0,092	0,184	0,300	0,436								
Przemieszc. ΔV_i	V_i	1,880	2,133	2,816	3,809	4,929	6,084			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
$V_i + \Delta V_i$	(-)	0,039	0,183	0,572	1,150	1,872	2,722								
Sztywności $\delta_i^P \cdot K_i$	K_i	0,789	0,191	0,099	0,053	0,035	0,005	0,515							
$y_0 \cdot K_i$		0	0,039	0,050	0,043	0,039	0,007	0,178		Porównanie V_i i $y_0 + \delta_i^P$					
x_i		0,471	0,381	0,227	0,138	0,102	0,016								
$y_0 + \delta_i^P$		1,789	1,991	2,294	2,597	2,900	3,203								
Poprawki Δx_i bilans popr		(-) 14	(+) 8	(+) 5	(-) 3	(-) 5	(-) 1			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
x_i		0,457	0,391	0,233	0,135	0,097	0,015								
$y_0 = 1 - 0,178 + 0,1 = 0,922$															
Czwarte przybliżenie															
	0	0,853	0,379	0,214	0,148	0,112	0,090			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
	1	0,648	0,993	0,648	0,598	0,638	0,714								
	2	0,219	0,386	0,869	0,922	1,097	1,330								
	3	0,087	0,206	0,934	1,010	1,235	1,553			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
	4	0,048	0,158	0,453	0,887	1,448	1,818								
	5	0,006	0,027	0,086	0,173	0,281	0,408								
Przemieszc. ΔV_i	V_i	1,861	2,149	2,804	3,738	4,801	5,913			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
$V_i + \Delta V_i$	(-)	0,039	0,183	0,572	1,150	1,872	2,722								
Sztywności $\delta_i^P \cdot K_i$	K_i	0,251	0,199	0,104	0,052	0,033	0,005	0,519							
$y_0 \cdot K_i$		0	0,040	0,053	0,042	0,037	0,007	0,179		Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
x_i		0,445	0,353	0,185	0,092	0,059	0,012								
$y_0 + \delta_i^P$		1,773	1,975	2,278	2,581	2,884	3,187								
Poprawki Δx_i		(-) 12	(+) 2	(+) 5	0	(-) 1	0			Różnice przemieszczeń Δy w tysięcznych					
x_i		0,433	0,395	0,243	0,134	0,095	0,019								
$y_0 = 1 - 0,179 + 0,1 = 0,921$															

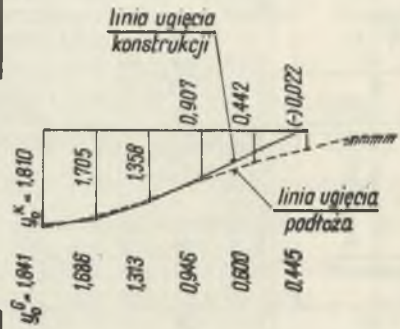
Przy projektowaniu konstrukcji odkształcalnych, oprócz oddziaływań niezbędna jest również znajomość ich odkształceń. Dlatego, po rozwiązaniach przykładowych, wskazano również na sposób wyznaczania rzędnych linii ugięcia konstrukcji i podłoża.

Tablica 4

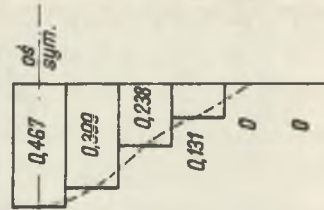
Tablica 4

Opis	0	1	2	3	4	5	x_i	
δ_{ij}^k	0	-	-	-	-	-	0,467	
	1	-	0,202	0,505	0,808	1,111	1,414	0,399
	2	-	0,505	1,616	2,828	4,040	2,252	0,238
	3	-	0,808	2,828	5,454	8,181	10,908	0,131
	4	-	1,111	4,040	8,181	12,928	17,776	-
	5	-	1,414	5,252	10,908	17,776	25,250	-
$\{\delta_{ij}^k\} \cdot \{x_i\}$	0	-	-	-	-	-	-	
	1	-	0,081	0,202	0,323	0,444	0,566	
	2	-	0,120	0,384	0,674	0,962	1,250	
	3	-	0,106	0,371	0,714	1,073	1,430	
	4	-	-	-	-	-	-	
	5	-	-	-	-	-	-	
Przem. K od x_i (-)	0	0,307	0,957	1,711	2,479	3,246		
$y_a + \delta_i^p$ (+)	1,810	2,012	2,315	2,618	2,921	3,224		
y_i^k (konstr)	1,810	1,705	1,358	0,907	0,442	0,022		
δ_{ij}^g	0	1,867	0,829	0,469	0,323	0,246	0,197	0,467
	1	1,658	2,336	-1,152	0,715	0,520	0,411	0,399
	2	0,938	1,152	2,113	1,026	0,634	0,465	0,238
	3	0,646	0,715	1,026	2,032	0,971	0,593	0,131
	4	0,492	0,520	0,634	0,971	1,991	0,940	-
	5	0,394	0,411	0,465	0,593	0,940	1,967	-
$\{\delta_{ij}^g\} \cdot \{x_i\}$	0	0,872	0,367	0,219	0,151	0,115	0,092	
	1	0,862	0,931	0,458	0,285	0,207	0,164	
	2	0,223	0,274	0,502	0,244	0,151	0,111	
	3	0,084	0,094	0,134	0,266	0,127	0,078	
	4	-	-	-	-	-	-	
	5	-	-	-	-	-	-	
Przem. G od x_i (+)	1,841	1,686	1,313	0,946	0,600	0,445		

Wykres ugięć



Wykres oddziaływań



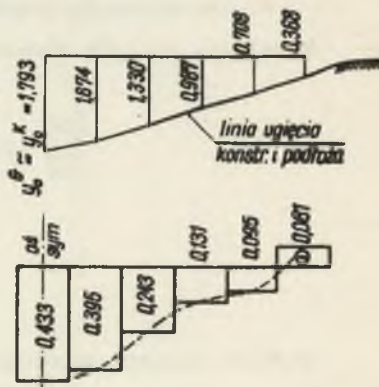
Obliczenie odkształcenia konstrukcji i podłoża rzeczywistego dla przypadku z odrywaniem przedstawiono w tablicy 4, zaś dla przypadku bez odrywania w tablicy 5. Macierze oznaczone $\{\delta_{ij}^K\}$ i $\{\delta_{ij}^G\}$ przedstawiają tam; rozdzielone odkształcenia jednostkowe δ_{ij}^K i δ_{ij}^G dla konstrukcji i dla podłoża. Dla przypadku pierwszego, celem wyznaczenia wymiarów szczeliny pod konstrukcją, oddzielnie wyznaczamy linię ugięcia konstrukcji przy pomocy tablicy $\{\delta_{ij}^K\}$ oraz linię ugięcia podłoża przy pomocy tablicy $\{\delta_{ij}^G\}$. Ostateczne wielkości odkształceń w odpowiednich jednostkach obliczymy, mnożąc otrzymane wartości bezwymiarowe przez cytowany poprzednio mnożnik β podany w pracach [5], [7].

Tablica 5

Tablica 5

Opis	0	1	2	3	4	5	x_i	
δ_{ij}^G	0	1,887	0,929	0,469	0,323	0,248	0,197	0,433
	1	1,858	2,336	1,152	0,715	0,520	0,411	0,395
	2	0,938	1,152	2,113	1,026	0,634	0,465	0,243
	3	0,646	0,715	1,026	2,032	0,971	0,593	0,134
	4	0,492	0,520	0,634	0,971	1,991	0,940	0,095
	5	0,394	0,411	0,465	0,593	0,940	1,967	0,081
$\{\delta_{ij}^G\} \{x_i\}$ (dla przyp. 2)	0	0,808	0,359	0,203	0,140	0,106	0,085	
	1	0,655	0,923	0,455	0,282	0,205	0,162	
	2	0,228	0,280	0,513	0,249	0,154	0,113	
	3	0,087	0,096	0,137	0,272	0,130	0,079	
	4	0,047	0,049	0,060	0,092	0,189	0,089	
	(-) 5	1,825	1,707	1,368	1,035	0,784	0,528	
Przem. θ od x_i		1,793	1,674	1,330	0,987	0,708	0,368	

Wykresy ugięć i oddziaływań



3. Uwagi końcowe

W przedstawionym ujęciu proponowany algorytm nadaje się do iteracyjnego rozwiązywania dowolnych układów równań metody sił, ułożonych wg zasad przyjętych w [7], dla wszelkich konstrukcji symetrycznych na jednorodnym podłożu. Równania wyjściowe można układać dla dowolnych modeli podłoża (np. dla warstwy sprężystej Własowa [6], [5]) i przy dowolnej metodzie wyznaczania odkształceń jednostkowych.

Przedstawiony algorytm można więc stosować do rozwiązywania szeregu różnych zadań, między innymi do obliczania fundamentów z uwzględnieniem sztywności nadbudowy, wyznaczając odkształcenia jednostkowe δ_{ij}^K dla konstrukcji wg W. Króla [3].

Drobne wyżej uzasadnione uzupełnienie algorytmu przedstawionego w [1] pozwoliło na poważne rozszerzenie jego zastosowań, przy zachowaniu poprzednio wymienionych zalet. Nawet duże zadania można nim łatwo rozwiązać suwakiem rachunkowym. Program postępowania dla maszyny cyfrowej pozostaje nadal bardzo prosty. Wspomniany poprzednio elektryczny model analogowy może być również nadal wykorzystywany.

Po rozszerzeniu proponowany algorytm może służyć do rozwiązywania wszelkich układów równań liniowych typu

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^{j=n} x_j \cdot \delta_{ij} + y_0 + w_1 &= 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=0}^{j=n} x_j + \sum P_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

których macierz współczynników przy niewiadomych ma tylko jedynki w skrajnym wierszu i skrajnej kolumnie. Macierz wyrazów wolnych może być dowolna.

$$\left| \begin{array}{cccc|c|c} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1j} & 1 & w_1 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2j} & 1 & w_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \dots & \delta_{ij} & 1 & w_i \\ \hline 1 & 1 & & 1 & 0 & \sum P_z \end{array} \right|$$

Układy powyższe można sprawniej rozwiązać zaproponowanym tu sposobem iteracyjnym.

LITERATURA

1. Chmieliak S.: Algorytm iteracyjnego obliczania konstrukcji na sprężystym podłożu - Referaty XVII Konferencji Naukowej KI PAN i KN PZITB, Krynica 1971. I s. 43.
2. Gurbunow-Posadow M.J.: Obliczenia konstrukcji na sprężystym podłożu (przekład). BA, Warszawa, 1956.
3. Król W.: Statyka fundamentów żelbetowych z uwzględnieniem sztywności nadbudowy. Arkady, Warszawa, 1964.
4. Nowacki W.: Mechanika budowli, t.I, PWN, Warszawa, 1957 r.
5. Polska Akademia Nauk Komitet Inżynierii; Budownictwo Betonowe, t.IX Fundamenty, Arkady, Warszawa 1966.
6. Własow W.Z., Leontiew N.N.: Bałki, płyty i obołoczki na uprugom osnowanii. Rozdz. I-II. Moskwa, 1960.
7. Żemoczkin B.N., Sinicyn A.F.: Prakticzeskije metody rasczota fundamientnych bałok i plit na uprugom osnowanii. Gosstrojizdat, Moskwa, 1962.

ИТЕРАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИИ
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Р е з ю м е

Работа занимается расчетом гибких симметричных конструкций на однородном основании в виде упругого полупространства. Задачу решено итерационным методом удалившим необходимость решения исходных канонических уравнений. Предложенный общий метод, в случае отрицательных реакции, исключает необходимость вторичного решения задачи. В статье предложено способ определения координат поверхности деформации конструкции и основания.

COMPUTING OF STRUCTURES ON ELASTIC SOIL BASEMENT
BY ITERATION

S u m m a r y

This paper deals with the computation of symmetric deformable structures on homogeneous soil basement, treated as elastic halfspace. Quick - convergent iteration replaces solving of canonic simultaneous equation set. The presented way is effective for the case in which a flexible foundation is teared off the soil and for others in which the soil is loaded on all the base of the foundation. The method of iteration acceleration and the way of determining the bending of the structure and soil basement surface is given.