

Stefan Jendrzejek

UGIĘCIA BELKI MOSTOWEJ OBCIĄŻONEJ RUCHOMĄ GRUPĄ SIŁ DOWOLNIE ZMIENNYCH W CZASIE

Streszczenie. W pracy wyznaczono ugięcia belki mostowej obciążonej grupą sił ruchomych o dowolnej zmienności w czasie. Belkę mostową reprezentuje układ o ciągłym rozkładzie masy z tłumieniem o oporach proporcjonalnych do pędu masy. Rozwiązanie może znaleźć zastosowanie przy obliczaniu ugięć teoretycznych znacznej grupy mostów drogowych [7] obciążonych pojazdami wieloosiowymi, lub przy szukaniu związku między pomierzonymi obciążeniami osi pojazdu a ugięciami mostu.

1. Wstęp

Bezpośrednią przyczyną drgań belki mostowej są siły działające na nią. Ogólnie stwierdzić można, że drgania powstają na skutek zmiany:

- położenia sił na belce,
- intensywności działania sił.

Zmianę położenia siły na belce charakteryzuje prędkość i czas, natomiast wartości sił obciążających belkę uzależnione są od następujących czynników:

- profilu nawierzchni,
- parametrów pojazdu,
- parametrów mostu,
- prędkości przejazdu.

Nie zajmując się bliżej wyznaczeniem wartości sił obciążających, którym to problemem zajmowano się w kilku pracach (np. [1],[2]), w niniejszej pracy założono, że intensywności sił w czasie przejazdu przez belkę dane są w postaci funkcji zależnych jedynie od czasu.

2. Założenia

W rozważaniach wzięto pod uwagę belkę wolnopodpartą o rozpiętości L przy następujących założeniach:

- materiał belki jest doskonale sprężysty, jednorodny i izotropowy,
- belka ma stałą sztywność EI na długości,
- masa belki μ jest równomiernie rozłożona
- w belce występuje tłumienie o oporach proporcjonalnych do pędu masy.

Materiały stosowane w konstrukcjach mostowych wykazują własności reologiczne i mogą wykazywać odkształcenia trwałe po cyklu obciążającym, jak również nie są jednorodne i izotropowe. Potraktowanie obciążenia mostu jako działania jednorazowego, nie zaś jako procesu ciągłego w czasie oraz oscylacja naprężeń w granicach sprężystości materiału jest koniecznym przybliżeniem, które umożliwia przyjęcie modelu ciała doskonale sprężystego. Niejednorodność i anizotropia wynika ze struktury stosowanych materiałów oraz konstrukcji mostów betonowych i stalowych. Uwzględnienie tych własności komplikowałoby jednak, a w wielu przypadkach niepotrzebnie - zadanie. Dlatego - za dotychczasowymi badaczami dynamiki mostów - przyjęto założenie jednorodności i izotropowości materiału.

Wolnopodparte konstrukcje mostowe charakteryzują się nieznaczną zmianą sztywności przekrojów poprzecznych na długości mostu, a ich ciężar własny jest praktycznie stały na długości.

Charakter tłumienia w konstrukcjach mostowych jest bardzo złożony [3]. Traktując w przybliżeniu tłumienie w mostach jako zjawisko jednolite, przyjęto proporcjonalność oporów ruchu do pędu masy.

W rozważaniach pominięto wpływ sił poprzecznych na pracę odkształcenia oraz energię kinetyczną związaną z obrotem przekrojów belki. Dla belek stosowanych w mostownictwie stosunek rozpiętości do wymiarów poprzecznych jest bardzo znaczny, co pozwala na pominięcie wpływu sił poprzecznych na ugięcia belki. Również zaniedbanie obrotów przekrojów nieznacznie wpływa na ugięcia belki [4].

Ponieważ mosty są obciążone pojazdami wielocosiowymi, rozpatrywano przejazd grupy sił oddalonych od siebie w stałych odległościach. Intensywność sił jest dowolnie zmienna w czasie, a przejazd następuje ze stałą prędkością v .

Przed wjazdem obciążenia belka znajduje się w spoczynku, w położeniu równowagi statycznej.

3. Rozwiązanie zadania pomocniczego

Chcąc wyznaczyć ugięcia belki mostowej obciążonej ruchomą grupą sił dowolnie zmiennych w czasie konieczne jest rozwiązanie zadania pomocniczego polegającego na określeniu ugięć belki dla dowolnie zmiennego w czasie, ruchomego obciążenia skupionego.

Uwzględniając założenia dotyczące belki równanie różniczkowe ugięć belki można zapisać [4], [5] w postaci:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = p(x,t), \quad (1)$$

gdzie $p(x,t)$ jest intensywnością obciążenia.

Podstawiając współrzędne bezwymiarowe (2)

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{v}{L} t, \quad (2)$$

oraz współczynniki bezwymiarowe (3)

$$\zeta = vL \sqrt{\frac{\mu}{EI}}, \quad \bar{\gamma} = \frac{L}{v} \gamma' = \frac{L}{v} \frac{\eta}{2\mu}, \quad (3)$$

równanie (1) można zapisać następująco:

$$\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^4 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2\bar{\gamma} \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{I^2}{\mu v^2} P(\xi, \tau). \quad (4)$$

Równanie (4) rozwiązywano przy założeniu przesuniętych w lewo od początku belki układach położenia przekroju i siły (rys. 1) uwzględniając warunki początkowe drgań belki (5) dla $\tau = \tau_n$

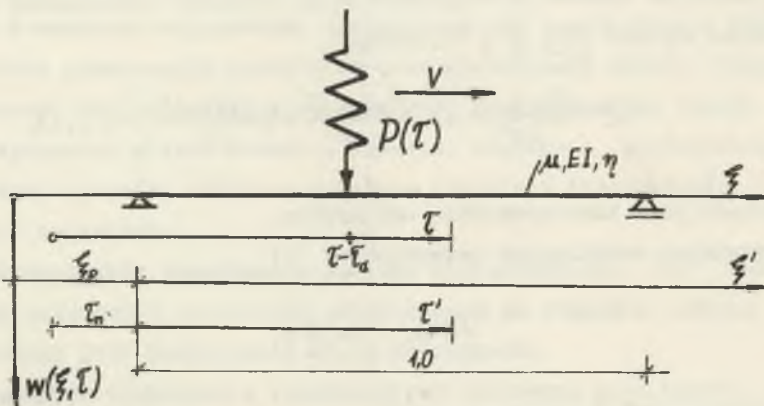
$$w(\xi, \tau_n) = w(\xi), \quad \frac{\partial w(\xi, \tau_n)}{\partial \tau} = \dot{w}(\xi), \quad (5)$$

oraz warunki brzegowe (6).

$$w(\xi_p, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(\xi_p, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \quad (6)$$

$$w(1+\xi_p, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(1+\xi_p, \tau)}{\partial \xi^2} = 0.$$

Ugięcie belki można wyznaczyć dla ξ należącego do przedziału $[\xi_p, 1 + \xi_p]$.



Rys. 1. Układy współrzędnych przy rozwiązywaniu belki obciążonej siłą dowolnie zmienną w czasie

Rozwiązania równania (4) dokonano stosując bezpośredni rachunek operatorowy [6] przy uwzględnieniu, że warunki początkowe są zadane tylko w jednym punkcie różnym od zera, a warunki brzegowe w dwóch punktach, z których żaden nie jest równy zeru. Możliwe jest w tym przypadku rozwiązanie zadania najpierw tak, jak gdyby warunki początkowe dane były w punkcie o współrzędnej zero, warunki brzegowe zaś w punktach o współrzędnych 0 i 1, pamiętając o konieczności odpowiedniego odwrotnego przesunięcia układu współrzędnych.

W nowym układzie współrzędnych τ' , ξ' , gdzie

$$\begin{aligned}\tau' &= \tau - \tau_n, \\ \xi' &= \xi - \xi_p,\end{aligned}\quad (7)$$

równanie (4) przyjmie postać (8), warunki początkowe (5) formę (9), a warunki brzegowe (6) postać (10).

$$\frac{1}{6^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\bar{\gamma} \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1^2}{\mu v^2} P(\xi' + \xi_p, \tau' + \tau_n), \quad (8)$$

gdzie $w = w(\xi', \tau')$.

$$w(\xi' + \xi_p, 0) = w(\xi' + \xi_p), \quad \frac{\partial}{\partial \tau'} w(\xi' + \xi_p, 0) = \dot{w}(\xi' + \xi_p). \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned}w(0, \tau' + \tau_n) &= 0, \\ w(1, \tau' + \tau_n) &= 0,\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} w(0, \tau' + \tau_n) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} w(1, \tau' + \tau_n) &= 0.\end{aligned} \quad (10)$$

Wykonując na równaniu (8) transformację Laplace'a i uwzględniając warunki początkowe (9) otrzymano

$$\frac{1}{6^2} \frac{d^4 \bar{w}}{d\xi'^4} + s^2 \bar{w} + 2\bar{\gamma} s \bar{w} = \frac{1^2}{\mu v^2} \bar{p}(\xi' + \xi_p, s) + (s + 2\bar{\gamma}) w(\xi' + \xi_p) + \dot{w}(\xi' + \xi_p), \quad (11)$$

gdzie

$$\bar{w} = \int_0^{\infty} w e^{-s\tau'} d\tau', \quad \bar{p} = \int_0^{\infty} P(\xi' + \xi_p, \tau' + \tau_n) e^{-s\tau'} d\tau'.$$

Funkcje własne znaleźć można z równania jednorodnego wynikającego z równania (8). Uwzględniając warunki brzegowe (10) i normując funkcje własne można je zapisać (por. [4]) w postaci

$$\bar{w}_n(\xi') = \sqrt{2} \sin n\pi\xi' \quad (12)$$

Rozwinięto funkcje \bar{w} , \bar{p} , $w(\xi'+\xi_p)$, $\dot{w}(\xi'+\xi_p)$ w szeregi według funkcji własnych.

$$\begin{aligned} \bar{w}(\xi', s) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} w_n^*(s) \sin n\pi\xi', \\ \bar{p}(\xi'+\xi_p, s) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_n^*(s) \sin n\pi\xi', \\ w(\xi'+\xi_p) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin n\pi\xi', \\ \dot{w}(\xi'+\xi_p) &= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \sin n\pi\xi'. \end{aligned} \quad (13)$$

Współczynniki rozwinięcia tych funkcji można zapisać wzorami (14).

$$\begin{aligned} w_n^*(s) &= \sqrt{2} \int_0^1 \bar{w}(\xi', s) \sin n\pi\xi' d\xi', \\ p_n^*(s) &= \sqrt{2} \int_0^1 \bar{p}(\xi'+\xi_p, s) \sin n\pi\xi' d\xi', \\ A_n^* &= \sqrt{2} \int_0^1 w(\xi'+\xi_p) \sin n\pi\xi' d\xi', \\ B_n^* &= \sqrt{2} \int_0^1 \dot{w}(\xi'+\xi_p) \sin n\pi\xi' d\xi'. \end{aligned} \quad (14)$$

Mnożąc równanie (11) przez funkcje własne (12), całkując od 0 do 1 i uwzględniając warunki brzegowe (10), otrzymano następujące równanie algebraiczne:

$$w_n^*(s) \left[\frac{(n\pi)^4}{6^2} + s^2 + 2\bar{f}s \right] = \frac{L^2}{\mu v^2} p_n^*(s) + (s+2\bar{f})A_n^* + B_n^*. \quad (15)$$

Korzystając z pierwszego z wzorów (13) wykonano odwrotną transformację skończoną otrzymując

$$\bar{w}(\xi', s) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{L^2}{\mu v^2} P_n^*(s) + (s + 2\bar{\gamma}) A_n^* + B_n^* \right]}{\frac{(n\pi)^4}{6^2} + s^2 + 2\bar{\gamma}s} \sin n\pi\xi' \quad (16)$$

Mianownik pod znakiem sumy można przedstawić w postaci

$$\frac{(n\pi)^4}{6^2} + s^2 + 2\bar{\gamma}s = (s + \bar{\gamma})^2 + \bar{\delta}_n^2, \quad (17)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_n &= \sqrt{\bar{B}_n^2 - \bar{\gamma}^2} = \frac{L}{v} \delta_n, \\ \bar{\beta}_n &= \frac{(n\pi)^2}{6} = \frac{L}{v} \beta_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Wielkości β_n i δ_n oznaczają odpowiednio częstotliwości kołowe drgań własnych nietłumionych i tłumionych belki.

Biorąc pod uwagę zależność (17) i korzystając ze związków (14), równanie (16) przekształcono do postaci

$$\begin{aligned} \bar{w}(\xi', s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi'}{(s + \bar{\gamma})^2 + \bar{\delta}_n^2} \int_0^1 \left[\frac{L^2}{\mu v^2} \bar{p}(\xi_0 + \xi_p, s) + (s + 2\bar{\gamma}) \bar{w}(\xi_0 + \xi_p) + \right. \\ \left. + \bar{w}(\xi_0 + \xi_p) \right] \sin n\pi\xi_0 d\xi_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Wykonując odwrotną transformację Laplace'a i wykorzystując twierdzenie o splocie, mamy

$$\begin{aligned}
 w(\xi', \tau') &= \\
 &= \frac{2L^2}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinn} \mathcal{N} \xi'}{\delta_n} \int_0^1 \sin n \mathcal{N} \xi_0 \int_0^{\tau' - \bar{\gamma}(\tau' - \tau'_0)} e^{-\bar{\gamma}(\tau' - \tau'_0)} p(\xi_0 + \xi_p, \tau'_0 + \tau_n) \sin \bar{\delta}_n (\tau' - \tau'_0) d\tau'_0 d\xi_0 + \\
 &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \mathcal{N} \xi' e^{-\bar{\gamma} \tau'} \int_0^1 \left\{ w(\xi_0 + \xi_p) \cos \bar{\delta}_n \tau' + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\delta_n} \left[\dot{w}(\xi_0 + \xi_p) + \bar{\gamma} w(\xi_0 + \xi_p) \right] \sin \bar{\delta}_n \tau' \right\} \sin n \mathcal{N} \xi_0 d\xi_0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Wracając odpowiednio do układu ξ, τ oraz podstawiając za zmienną całkowania $\tau_0 = \tau'_0 + \tau_n$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \tau) &= \\
 &= \frac{2L^2}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sinn} \mathcal{N}(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_0^1 \operatorname{sinn} \mathcal{N} \xi_0 \int_{\tau_n}^{\tau - \bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} p(\xi_0 + \xi_p, \tau_0) \sin \bar{\delta}_n (\tau - \tau_0) d\tau_0 d\xi_0 + \\
 &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \mathcal{N}(\xi - \xi_p) e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_n)} \int_0^1 \left\{ w(\xi_0 + \xi_p) \cos \bar{\delta}_n (\tau - \tau_n) + \frac{1}{\delta_n} \left[\dot{w}(\xi_0 + \xi_p) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \bar{\gamma} w(\xi_0 + \xi_p) \right] \sin \bar{\delta}_n (\tau - \tau_n) \right\} \sin n \mathcal{N} \xi_0 d\xi_0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Jest to wzór na ugięcie belki wolnopodpartej dla przekrojów zawartych w przedziale $(\xi_p, 1 + \xi_p)$ przy zadanych warunkach początkowych drgań dla $\tau = \tau_n$.

Chcąc znaleźć ugięcie belki obciążonej siłą skupioną dowolnie zmienną w czasie, intensywność obciążenia opisujemy w postaci (rys. 1)

$$p(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{L} P(\tau) \delta[\xi - (\tau - \tau_d)] \eta(\tau - \tau_n) & \text{dla } \tau - \tau_d \in (\xi_p, 1 + \xi_p), \\ 0 & \text{dla } \tau - \tau_d \notin (\xi_p, 1 + \xi_p). \end{cases} \quad (22)$$

gdzie δ oznacza tutaj funkcję Diraca, a η - funkcję Heaviside'a, zaś przez $\tau - \tau_d$ określono położenie siły w czasie τ .

Ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(\xi_0 + \xi_p, \tau) \sin n\pi \xi_0 d\xi_0 &= \frac{1}{L} P(\tau) \eta(\tau - \tau_n) \int_0^1 \delta[\xi_0 + \xi_p - (\tau - \tau_d)] \sin n\pi \xi_0 d\xi_0 = \\ &= \frac{1}{L} P(\tau) \eta(\tau - \tau_n) \sin n\pi (\tau - \tau_d - \xi_p) \end{aligned}$$

dla warunków podanych w (22), ugięcia belki można zapisać

$$\begin{aligned} w(\xi, \tau) &= \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_{\tau_n}^{\tau} \bar{y}(\tau - \tau_0) P(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_d - \xi_p) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi(\xi - \xi_p) e^{-\bar{y}(\tau - \tau_n)} \int_0^1 \left\{ w(\xi_0 + \xi_p) \cos \bar{\delta}_n(\tau - \tau_n) + \frac{1}{\delta_n} \left[\dot{w}(\xi_0 + \xi_p) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \bar{y} w(\xi_0 + \xi_p) \right] \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_n) \right\} \sin n\pi \xi_0 d\xi_0, \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie $\tau - \tau_d \in (\xi_p, 1 + \xi_p)$.

Wzór (23) przedstawia ugięcia belki poddanej obciążeniu siłą skupioną dowolnie zmienną w czasie, poruszającą się po belce ze stałą prędkością przy przesuniętych w lewo od początku belki układach położenia przekroju belki o wielkości $\xi_p L$ i czasu o $\tau_n \frac{L}{v}$ oraz położenia siły w miejscach określonych czasem $(\tau - \tau_d) \frac{L}{v}$.

Pomijając tłumienie w belce oraz przyjmując $\xi_p = \tau_n = \tau_d = 0$, wzór (23) sprowadza się do formy podanej w pracy [4].

4. Ugięcia belki obciążonej grupą sił ruchomych

Korzystając z wielkości opisanych na rysunku 2 ugięcia belki pod działaniem siły $P_1(\tau)$ można zapisać na podstawie wzoru (23) podstawiając $\tau_d = 0$ i $\tau_n = \tau_1$ oraz uwzględniając zerowe warunki początkowe (p.2) w postaci

$$w_1(\xi, \tau) = - \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sinn} n(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\tilde{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_1(\tau_0) \text{sinn} n(\tau_0 - \xi_p) \text{sin} \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0, \quad (24)$$

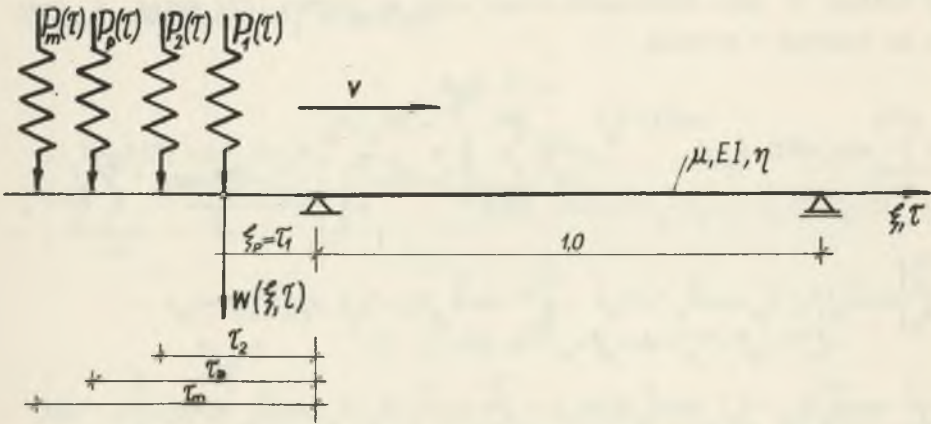
gdzie $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

W momencie wjazdu drugiej siły na belkę (dla $\tau = \tau_2$) ugięcie belki będzie równe

$$w_1(\xi) = w_1(\xi, \tau_2) = - \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sinn} n(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\tilde{\gamma}(\tau_2 - \tau_0)} P_1(\tau_0) \text{sinn} n(\tau_0 - \tau_1) \text{sin} \bar{\delta}_n(\tau_2 - \tau_0) d\tau_0, \quad (25)$$

prędkość ugięcia zaś wynosi w dowolnym przekroju ξ belki

$$\dot{w}_1(\xi) = \frac{\partial}{\partial \tau} w_1(\xi, \tau_2) = - \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sin} n\mathcal{K}(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\tilde{\gamma}(\tau_2 - \tau_0)} P_1(\tau_0) \text{sin} n\mathcal{K}(\tau_0 - \tau_1) \cdot [\bar{\delta}_n \cos \bar{\delta}_n(\tau_2 - \tau_0) - \tilde{\gamma} \text{sin} \bar{\delta}_n(\tau_2 - \tau_0)] d\tau_0. \quad (26)$$



Rys. 2. Przejazd przez belkę mostową grupy sił dowolnie zmiennych w czasie

Ugięcie belki po wjeździe drugiej siły można określić sumując ugięcia od sił $P_1(\tau)$ i $P_2(\tau)$ przy zadanych warunkach początkowych uwzględniając, że siły działają od czasu $\tau = \tau_2$, a ich położenia są określone: dla siły $P_1(\tau)$ czasem τ , a dla siły $P_2(\tau)$ czasem $\tau - (\tau_2 - \tau_1)$.

Korzystając z wzoru (24) ugięcie belki po wjeździe drugiej siły można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 w_2(\xi, \tau) = & \frac{2L}{\mu v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_{\tau_2}^{\tau} e^{-\tilde{\gamma}(\tau - \tau_0)} \left\{ P_1(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \xi_p) + \right. \\
 & + P_2(\tau_0) \sin n\pi[\tau_0 - (\tau_2 - \tau_1) - \xi_p] \left. \right\} \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 + \\
 & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi(\xi - \xi_p) e^{-\tilde{\gamma}(\tau - \tau_2)} \int_0^1 \left\{ w_1(\xi_0 + \xi_p) \cos \bar{\delta}_n(\tau - \tau_2) + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{\delta_n} \left[\dot{w}_1(\xi_0 + \xi_p) + \tilde{\gamma} w_1(\xi_0 + \xi_p) \right] \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_2) \right\} \sin n\pi \xi_0 d\xi_0,
 \end{aligned} \tag{27}$$

gdzie $\tau \in [\tau_2, \tau_3]$.

Wprowadzając warunki początkowe (25) i (26), w których sumy opisano według j oraz oznaczając drugą sumę we wzorze (27) przez S można ją zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\mathcal{N}(\xi - \xi_p) e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_2)} \cdot \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\bar{\gamma}(\tau_2 - \tau_0)} P_1(\tau_0) \sin j\mathcal{N}(\tau_0 - \xi_p) \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{\delta_j} \left\{ \sin \bar{\delta}_j(\tau_2 - \tau_0) \cos \bar{\delta}_n(\tau - \tau_2) + \frac{\bar{\delta}_j}{\delta_n} \cos \bar{\delta}_j(\tau_2 - \tau_0) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_2) - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{\gamma}}{\delta_n} \sin \bar{\delta}_j(\tau_2 - \tau_0) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_2) + \frac{\bar{\gamma}}{\delta_n} \sin \bar{\delta}_j(\tau_2 - \tau_0) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_2) \right\} \cdot \quad (28) \\
 & \cdot \int_0^1 \sin n\mathcal{N}\xi_0 \sin j\mathcal{N}\xi_0 d\xi_0 d\tau_0.
 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_n B_j \int_0^1 \sin n\mathcal{N}\xi_0 \sin j\mathcal{N}\xi_0 d\xi_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n & \text{dla } j = n, \\ 0 & \text{dla } j \neq n, \end{cases}$$

oraz korzystając z przekształceń na funkcjach trygonometrycznych zapis sumy S znacznie się uprości.

$$S = \frac{L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\mathcal{N}(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_1(\tau_0) \sin n\mathcal{N}(\tau_0 - \xi_p) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0. \quad (29)$$

Podstawiając wyżej otrzymane wyrażenie do równania (27) i uwzględniając równość $\xi_p = \tau_1$ otrzymano

$$w_2(\xi, \tau) =$$

$$= \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_1(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_1) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_2}^{\tau} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_2(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_2) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 \right\} \quad (30)$$

Wyznaczając z kolei warunki początkowe drgań belki z równania (30) dla chwili wjazdu trzeciej siły ($\tau = \tau_3$) i wprowadzając je do równania na ugięcie belki po wjeździe trzeciej siły, otrzymano po przekształceniach podobnych do przekształceń (28) i (29) następującą postać:

$$w_3(\xi, \tau) =$$

$$= \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_1(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_1) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 + \right.$$

$$+ \int_{\tau_2}^{\tau} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_2(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_2) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 +$$

$$\left. + \int_{\tau_3}^{\tau} e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} P_3(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_3) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 \right\}, \quad (31)$$

gdzie $\tau \in [\tau_3, \tau_4]$.

Ogólnie po wjeździe i -tej siły ugięcie belki można zapisać

$$w_1(\xi, \tau) =$$

$$= \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \sum_{p=1}^i \int_{\tau_p}^{\tau} P_p(\tau_0) e^{-\bar{\gamma}(\tau - \tau_0)} \sin n\pi(\tau_0 - \tau_p) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0, \quad (32)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, m$,

$$\tau \in \begin{cases} [\tau_i, \tau_{i+1}] & \text{dla } i < m, \\ [\tau_m, 1 + \tau_1] & \text{dla } i = m. \end{cases}$$

Opisując ugięcie i prędkość ugięcia belki w chwili zjazdu pierwszej siły z belki ($\tau = 1 + \tau_1$) i wprowadzając je do wzoru na ugięcia belki od wpływu sił pozostałych otrzymano

$$\begin{aligned} w_{m+1}(\xi, \tau) = & \\ = \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_D)}{\delta_n} & \left\{ \sum_{p=2}^m \int_{\tau_p}^{\tau} P_p(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_p) e^{-\bar{f}(\tau - \tau_0)} \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 \right. \\ & \left. + \int_{\tau_1}^{1 + \tau_1} P_1(\tau_0) \sin n\pi(\tau_0 - \tau_1) e^{-\bar{f}(\tau - \tau_0)} \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie $\tau \in [1 + \tau_1, 1 + \tau_2]$.

Postępując podobnie przy zjazdach z belki następnych sił można po zjeździe i -tej siły zapisać ugięcie w postaci

$$\begin{aligned} w_{m+1}(\xi, \tau) = & \\ = \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_D)}{\delta_n} & \left\{ \sum_{p=i+1}^m \int_{\tau_p}^{\tau} P_p(\tau_0) e^{-\bar{f}(\tau - \tau_0)} \sin n\pi(\tau_0 - \tau_p) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^i \int_{\tau_p}^{1 + \tau_p} P_p(\tau_0) e^{-\bar{f}(\tau - \tau_0)} \sin n\pi(\tau_0 - \tau_p) \sin \bar{\delta}_n(\tau - \tau_0) d\tau_0 \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

gdzie:

$$\tau \in \begin{cases} [1+\tau_i, 1+\tau_{i+1}] & \text{dla } i < m, \\ [1+\tau_m, \infty) & \text{dla } i = m. \end{cases}$$

Na podstawie wzorów (32) i (34) możliwe jest ogólne opisanie ugięć belki obciążonej ruchomą grupą m sił dowolnie zmiennych w czasie.

$$w(\xi, \tau) = \frac{2L}{\mu v^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(\xi - \xi_p)}{\delta_n} \sum_{p=1}^m \int_{\tau_p}^{\mathcal{X}(\tau)} P_p(\tau_0) e^{-\bar{f}(\tau - \tau_0)} \sin n\pi(\tau_0 - \tau_p) \sin \delta_n(\tau - \tau_0) d\tau_0, \quad (35)$$

gdzie:

$$\mathcal{X}(\tau) = \begin{cases} \tau_p & \text{dla } \tau \leq \tau_p, \\ \tau & \text{dla } \tau_p < \tau < 1+\tau_p, \\ 1+\tau_p & \text{dla } \tau \geq 1+\tau_p. \end{cases}$$

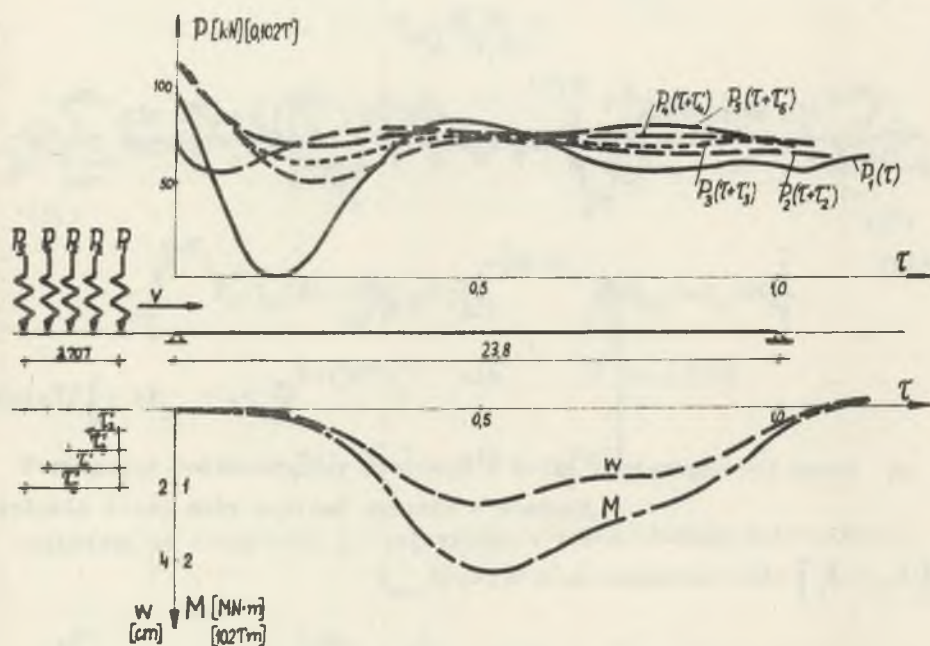
Ugięcia belki znaleźć można w przekrojach ξ należących do przedziału $[\xi_p, 1+\xi_p]$ dla dowolnego czasu τ .

5. Zastosowania

Uzyskane rozwiązanie służy do określenia ugięć teoretycznych belek mostowych, dla których znane są funkcje zmiany sił w czasie ich przejazdu przez belkę.

W szczególności rozwiązanie może mieć zastosowanie przy obliczaniu ugięć teoretycznych dużej grupy mostów drogowych, w której praktycznie można zaniedbać współpracę belki mostowej z pojazdem [7], gdy jez-

dnia na moście jest pozioma, a warunki początkowe sił w osiach pojazdu wyznaczono z warunku przejazdu przez nierówność progową [1].



Rys. 3. Ugięcia i momenty zginające w środku rozpiętości mostu obciążonego przedstawionym zestawem sił

Rozwiązaniem można się również posłużyć przy szukaniu związku pomiędzy pomierzonymi obciążeniami osi pojazdu a ugięciami mostu. W tym przypadku funkcje intensywności sił zapisać można w postaci szeregów Fouriera, a wyznaczenie ugięć jest sprawą dość prostą. Dla takiego postawienia zadania ułożono program nr JCZ196M30 na maszynę cyfrową ICL-4-50.

Za pomocą programu wykonano obliczenia ugięć i momentów zginających w środku rozpiętości mostu o następujących danych:

$$EI = 4510 \text{ kN.m}^2 \text{ (} 4,6 \cdot 10^5 \text{ Tm}^2 \text{),}$$

$$\mu = 6,0 \text{ Mg.m}^{-1} \text{ (} 0,6 \text{ Ts}^2 \text{m}^{-2} \text{),}$$

$$\eta = 7,06 \text{ kN.m}^{-2} \cdot \text{s (} 0,72 \text{ Tsm}^{-2} \text{).}$$

Most obciążono zestawem sił ruchomych ($v = 20 \text{ m.s}^{-1}$) o przedstawionej na rysunku (rys. 3) zmienności w czasie ich przejazdu.

LITERATURA

1. Głomb J., Jendrzejek S., Weseli J.: Z zagadnień dynamicznego obliczania mostów drogowych mniejszych rozpiętości, "Arch.Inż. Lądowej", t.XIII z.3/1967.
2. Isada N.M.: An Analysis of the Ride Response of a Pneumatic - Rapid Transit Vehicle riding on a Cambered Beam Roadbed, New York Academy of Sciences, Sesquicentennial Forum on Transportation Engr., 1967.
3. Mentel S.: Badania modelowe wpływu formy konstrukcyjnej ustroju na tłumienie drgań w mostach, "Arch.Inż.Lądowej", t.XVII z.1/1971.
4. Nowacki W.: Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1961.
5. Żyszko M.: Pewne zagadnienie dynamiki belki mostowej, "Arch. Inż. Lądowej", t.XII z.3/1966.
6. Mikusiński J.: Rachunek operatorów, PMat., Warszawa, 1953.
7. Jendrzejek S.: Analiza współpracy dynamicznej mostu i pojazdu drogowego, "Arch. Inż. Lądowej", t.XVII z.1/1971.

ПРОГИБ МОСТОВОЙ БАЛКИ ЗАГРУЖЕННОЙ ДВИЖЕНЫМИ КОЛЛЕКТИВНОМ СИЛ
ПРОИЗВОЛЬНО ИЗМЕНЯЕМЫХ ПО ВРЕМЕНИ

Р е з ю м е

В работе определяется прогиб мостовой балки загруженной коллективом сил произвольно изменяемых во времени. Мостовой балку представляет система с массой расположенной продолжительно и вязком сопротивлением.

Решение задачи можно применять к вычислению теоретических прогибов значительной группы дорожных мостов [7] загруженных многоосными экипажами или к исканию связи между измеримыми нагрузками оси экипажа а прогибами балки. Подано числовой пример.

DEFLECTIONS OF A BRIDGE BEAM LOADED WITH A GROUP
OF MOBILE AND TIME VARIABLE FORCES

S u m m a r y

This is a study of the deflection of a bridge beam loaded with a group of mobile and time variable forces. The bridge beam is represented by a dynamic system of a continuously variable mass and cushioning with resistances proportional to the mass momentum.

The results may be used to calculate theoretical deflections of the large group of road bridges [7] loaded with multi-axle vehicles, or to establish the relation between estimated loads of vehicle axis and bridge deflections.

A numerical example on the paper is given.