ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Maciej SIWCZYŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O STABILNOSCI PEWNYCH SILNIE NIELINIOWYCH DRGAN SAMOWZBUDNYCH

Streszczenie. W artykule zbadano stabilność okresowych i prawie okresowych rozwiązań układu równań:

$$\dot{x} = y^{2n-1} + \mu X(x,y), \quad \text{gdzie} \quad |\mu| \ll 1.$$
$$\dot{y} = -x^{2n-1} + \mu Y(x,y),$$

Użyto do tego celu tzw. uogólnionych funkcji okresowych, których definicja podana jest w tekście. W zakończeniu rozpatrzono przypadek synchronizacji tego typu drgań.

1. Wstęp

Będziemy zajmować się układem równań:

$$\dot{x} = y^{2n-1} + \mu X(x,y),$$
$$\dot{y} = -x^{2n-1} + \mu Y(x,y), \tag{1}$$

gdzie: n - liczba całkowita dodatnia; $|\mu| \ll 1$; funkcje $X(x,y)$, $Y(x,y)$ są ciągłe po x, y.

Dla $n = 1$ układ (1) opisuje oscylator quasi-harmoniczny. Zajmiemy się tutaj analizą drgań tego układu dla $n \gg 1$. Kładąc $\mu = 0$, otrzymamy:

$$\frac{dx}{dt} = y^{2n-1},$$
$$\frac{dy}{dt} = -x^{2n-1}, \tag{2}$$

a stąd:

$$x^{2n-1}\,dx + y^{2n-1}\,dy = 0.$$

Całkując powyższe równania otrzymuje się

$$x^{2n} + y^{2n} = 2n\,C \tag{3}$$

Równanie to przedstawia krzywą zamkniętą we współrzędnych x, y. Amplituda drgania zależy od stałej C i dla skończonego n wynosi

$$x_{max} = y_{max} = (2n\,C)^{\frac{1}{2n}}. \tag{4}$$

Łatwo można pokazać, że przy $n \to \infty$, $x_{max} \to 1$, $y_{max} \to 1$ przy dowolnym, skończonym C. Na podstawie równań (2) i związku (3) można określić okres drgania

$$\Theta = \oint_F y^{1-2n}\,dx = 4\int_0^{x_{max}} (2nC - x^{2n})^{\frac{1-2n}{2n}}\,dx. \tag{5}$$

Dla skończonego n okres Θ zależy od wyboru stałej C. Dla $n \to \infty$ $\Theta \to 4$. Tak więc rozwiązanie układu (3) przy skończonym n przedstawia drgania z nieokreśloną amplitudą i nieokreśloną częstotliwością. Dodatkowe warunki dla określenia amplitudy i okresu drgań otrzymamy analizując układ (1). Dla $n \to \infty$ amplituda drgania $x_{max} \to 1$, a okres $\Theta \to 4$, niezależnie od postaci funkcji X(x,y); Y(x,y).

2. Uogólnione funkcje okresowe

Uogólnione funkcje okresowe wprowadzone przez Jatajewa [1] są rozwiązaniem układu (2). Stałą C występującą w równaniu (3) dobiera się tak, aby 2nC = 1.

Definiujemy:

$$x(t) = Snt$$
$$y(t) = Cst$$

Wtedy na mocy (2) i (3) słuszne są następujące związki:

$$\frac{dSnt}{dt} = Cs^{2n-1}t$$

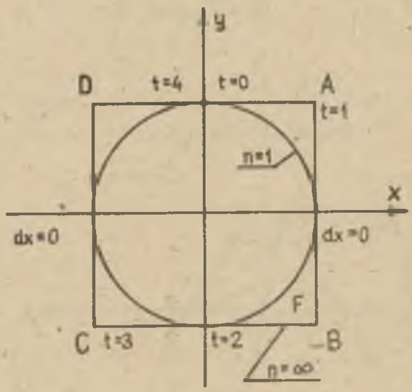
$$\frac{dCst}{dt} = -Sn^{2n-1}t \tag{6}$$

$$(Snt)^{2n} + (Cst)^{2n} = 1$$

Amplituda uogólnionych funkcji okresowych wynosi 1, a okres na podstawie relacji (5)

$$\Theta = 4\int_0^1 (1 - x^{2n})^{\frac{1-2n}{2n}}\, dx. \tag{6a}$$

Portret fazowy odpowiadający funkcjom Snt i Cst pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Dobierając chwilę początkową t tak, aby:

$$Sn(0) = 0, \qquad Cs(0) = 1,$$

otrzymujemy:

$$Sn(-t) = -Sn(t),$$
$$Cs(-t) = Cst.$$

W skrajnych przypadkach dla $n=1$ i $n \to \infty$ portret fazowy jest odpowiednio okręgiem i prostokątem. Okres drgań wynosi w tych przypadkach odpowiednio $\Theta = 2\pi$ $\Theta = 4$. Na podstawie rys. 1 oraz relacji (5), można łatwo wykreślić przebiegi funkcji Snt, Cst. Dla $n=1$ są to sinusoidy. Przebiegi Snt i Cst podano na rys. 2a,b. Przy $n \gg 1$ okres drgań jest bliski 4. Podczas zmniejszania n okres ulega wydłużeniu przy zachowaniu stałej amplitudy.

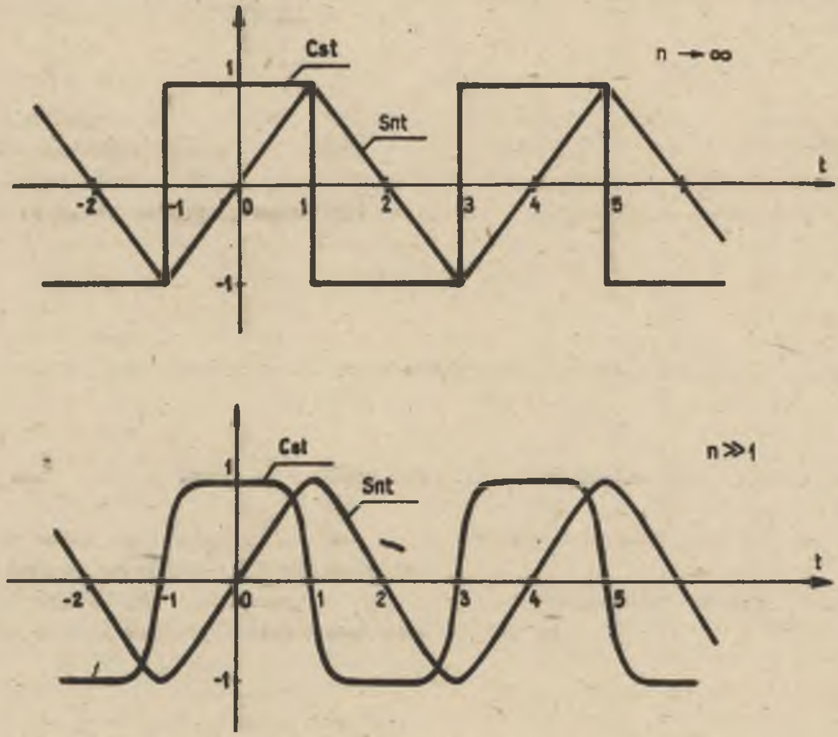
3. Kryterium stabilności układu autonomicznego

W układzie (1) dokonujemy zmiany zmiennych w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x &= rCs\varphi, \\ y &= rSn\varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie: r, φ są funkcjami t.
Wstawiając związki (7) do układu (1) na mocy związków (6), otrzymuje się po prostych przekształceniach:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu A_1(r,\varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -r^{2(m-1)} + \mu A_2(r,\varphi), \end{aligned} \tag{8}$$



Rys. 2

gdzie:

$$A_1(r,\varphi) = X(x,y)Cs^{2n-1}\varphi + Y(x,y)Sn^{2n-1}\varphi,$$

$$A_2(r,\varphi) = \frac{1}{r}\left[Y(x,y)Cs\varphi - X(x,y)Sn\varphi\right]$$

Układ (8) jest układem z szybko zmienną fazą. Można go łatwo doprowadzić do postaci standardowej w sensie Bogolubowa [2] przez proste przekształcenia. Otrzymujemy

$$\frac{dr}{d\varphi} = \mu \frac{A_1(r,\varphi)}{A_2(r,\varphi) - r^{2(n-1)}} \tag{9}$$

Funkcja stojąca po prawej stronie równania (9) jest okresowa po φ o okresie Θ (relacja (6a)).

Układ uśredniony odpowiadający równaniu (9) ma postać

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\mu \frac{\bar{A}_1(r)}{r^{2(n-1)}}, \tag{10}$$

gdzie

$$\bar{A}_1(r) = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} \Big[X(r\mathrm{Cs}\varphi, r\mathrm{Sn}\varphi)\mathrm{Cs}^{2n-1}\varphi +$$

$$+ Y(r\mathrm{Cs}\varphi, r\mathrm{Sn}\varphi)\mathrm{Sn}^{2n-1}\varphi \Big] d\varphi. \tag{11}$$

Układ (9) posiada stabilne rozwiązanie, okresowe po φ okresie Θ dążące do r_o przy $\mu \to 0$, jeżeli

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{A}_1(r)}{r^{2(n-1)}}\right)_{r=r_o} > 0, \tag{12}$$

gdzie r_o jest pierwiastkiem równania

$$\bar{A}_1(r) = 0. \tag{13}$$

Relacja (13) określa jednocześnie amplitudę drgania opisanego równaniem (7). Rozkładając prawą stronę równanie (9) w szereg potęgowy względem μ, otrzymuje się

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\mu \frac{A_1(r,\varphi)}{r^{2(n-1)}} \mu^2 \frac{A_1(r,\varphi)\, A_2(r,\varphi)}{r^{4(n-1)}}.$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania powyższego równania w postaci szeregu

$$r(\varphi) = r_o + \mu r_1(\varphi) + \mu^2 r_2(\varphi) + \dots$$

Otrzymujemy stąd przy zachowaniu dostatecznie dużej dokładności

$$r_1(\varphi) = -\int_0^{\varphi} \frac{A_1(r_o,\varphi)}{r_o^{2(n-1)}}\, d\varphi.$$

Wtedy drugie równanie układu (8) można napisać z dostatecznie dużą dokładnością

$$\frac{d\varphi}{dt} = -r_o^{2(n-1)} + \mu A_2(r_o,\varphi) - 2(n-1) r_o^{2n-3} r_1(\varphi). \tag{14}$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań równania (14) w postaci szeregu

$$\varphi(t) = \varphi_o(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \dots$$

skąd otrzymuje się:

$$\varphi_0(t) = - r_o^{2(n-1)}t,$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t A_2(r_o, \varphi_o(\tau)) - 2(n-1)r_o^{2n-3}r_1\varphi_0(\tau)d\tau, \tag{15}$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau)\left\{\frac{\delta}{\delta\varphi} A_2(r_o, \varphi) - 2(n-1)r_o^{2n-3}\, r_1(\varphi)\right\}_{\varphi=\varphi_o(\tau)} d\tau.$$

W wyniku otrzymujemy drganie:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_o Cs(r_o^{2(n-1)}t - \mu\varphi_1(t) - \mu^2\varphi_2(t-\dots), \\ y(t) &= -r_o Sn(r_o^{2(n-1)}t - \mu\varphi_1(t) - \mu^2\varphi_2(t-\dots). \end{aligned} \tag{16}$$

Funkcje podcałkowe prawych stron równań (15) są okresowe. O ile nie zawierają one składowej stałej, to rozważane drganie dane za pomocą równań (16) będzie okresowe, w przeciwnym wypadku drganie będzie prawie okresowe. Okres drgania jest równy, lub prawie równy

$$\vartheta = \Theta r_o^{2(1-n)},$$

gdzie Θ jest określone relacją (6a).

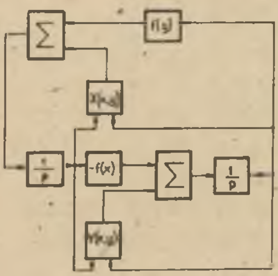
Wynika stąd, że okres silnie zależy od amplitudy drgań. Należy zwrócić uwagę na fakt, że dla n=1, czyli w przypadku drgań quasi-harmonicznych zależność taka nie występuje. Zjawisko to jest cechą charakterystyczną drgań silnie nieliniowych. Schemat strukturalny odpowiadający układowi (1) pokazany jest na rys. 3. Na schemacie tym $p = \frac{d}{dt}$; $f(x) = x^{2n-1}$.

Każdy układ równań w postaci:

$$\dot{x} = a_y^{2n-1} + \mu X(x,y),$$

$$\dot{y} = -bx^{2n-1} + \mu Y(x,y)$$

można doprowadzić do postaci (1) przez prostą zamianę zmiennych w następujący sposób:



Rys. 3

$$x = \xi x_1,$$
$$y = \eta y_1.$$

Łatwo można pokazać, że:

$$\xi = a^{\frac{1}{4n(1-n)}}\, b^{\frac{2n-1}{4n(1-n)}},$$

$$\eta = a^{\frac{2n-1}{4n(1-n)}}\, b^{\frac{1}{4n(1-n)}}$$

przy $n \neq 1$.

4. Oddziaływanie drgań. Synchronizacja

Weźmy pod uwagę dwa słabo sprzęgnięte układy:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1^{2n-1} + \mu\left[X_1(x_1,y_1) + \varepsilon F_1(x_2 y_2, at)\right],\\ \dot{y}_1 &= -x_1^{2n-1} + \mu\left[Y_1(x_1 y_1) + \varepsilon G_1(x_2,y_2,at)\right],\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2^{2n-1} + \mu\left[X_2(x_2,y_2) + \varepsilon F_2(x_1,y_1, at)\right],\\ \dot{y}_2 &= -x_2^{2n-1} + \mu\left[Y_2(x_2,y_2) + \varepsilon G_2(x_1,y_1,at)\right],\end{aligned} \tag{18}$$

gdzie: F_1, G_1, F_2, G_2, funkcje ciągłe okresowe po $\tau = at$ o okresie Θ; $a = r_o^{2(n-1)}$; $|\mu| \ll 1$.

Synchronizacja może nastąpić, jeżeli amplitudy rozwiązań okresowych układów (17) i (18) przy $\varepsilon = 0$ będą równe r_o. W dalszym ciągu badać będziemy rozwiązania układów (17) i (18) w postaci:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_o \mathrm{Cs}(at + \gamma_1(t)),\\ y_1 &= r_o \mathrm{Sn}(at + \gamma_1(t)),\\ x_2 &= r_o \mathrm{Cs}(at + \gamma_2(t)),\\ y_2 &= r_o \mathrm{Sn}(at + \gamma_2(t)).\end{aligned} \tag{19}$$

Wstawiając (19) do (17) i (18) po prostych przekształceniach otrzymujemy równania różniczkowe dla faz obu drgań w postaci następującej:

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\left[(Y_1+\varepsilon G_1)\,Cs(\tau+\gamma_1) - (X_1+\varepsilon F_1)\,Sn(\tau+\gamma_1)\right],$$
$$\frac{d\gamma_2}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\left[(Y_2+\varepsilon G_2)\,Cs(\tau+\gamma_2) - (X_2+\varepsilon F_2)\,Sn(\tau+\gamma_2)\right]. \qquad (20)$$

Funkcje stojące po prawej stronie układu (20) są okresowe po τ o okresie Θ. Warunek synchronizacji jest równoważny warunkowi stabilności okresowych (o okresie Θ) rozwiązań układu (20).
Układ uśredniony ma postać:

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\Gamma_1(\gamma_1,\gamma_2),$$
$$\frac{d\gamma_2}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\Gamma_2(\gamma_1,\gamma_2). \qquad (21)$$

gdzie:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\left[(Y_1+\varepsilon G_1)\,Cs(\tau+\gamma_1) - (X_1+\varepsilon F_1)\,Sn(\tau+\gamma_1)\right]d\tau,$$
$$\Gamma_2 = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\left[(Y_2+\varepsilon G_2)\,Cs(\tau+\gamma_2) - (X_2+\varepsilon F_2)\,Sn(\tau+\gamma_2)\right]d\tau. \qquad (22)$$

Warunkiem stabilności rozwiązania okresowego układu (20) jest, aby pierwiastki równania

$$\det\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\gamma_2} \\ \frac{\partial\Gamma_2}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial\gamma_2} \end{pmatrix} - \lambda I\right]_{\substack{\gamma_1=\gamma_{10}\\ \gamma_2=\gamma_{20}}} = 0$$

spełniały warunek

$$re\{\lambda\} < 0,$$

gdzie:

$$\Gamma_1(\gamma_{10},\gamma_{20}) = 0,$$

$$\Gamma_2(\gamma_{10},\gamma_{20}) = 0.$$

W przypadku, gdy układ (21) posiada cykl graniczny, jak pokazano w pracy [3], układ (20) posiada stabilne, wolnozmienne rozwiązanie. Równania (19) przedstawiają wtedy drgania prawie okresowe.

Praktyczne obliczenie całek występujących w relacjach (11) i (21) nie jest zbyt trudne, jeżeli wziąć pod uwagę, że przy odpowiednio dużych n funkcje $Cs\tau$, $Sn\,\tau$ można z wystarczająco dużą dokładnością przybliżyć odpowiednio przebiegiem prostokątnym i piłowym (rys. 2a,b).

LITERATURA

[1] JATAJEW M.: K issliedowaniju odnogo kriticzeskogo słuczaja ustojcziwosti dwiżenija. Wiestnik A.N. Kazachskoj SSR, 1968, Nr 1.

[2] BOGOLUBOW N.M., MITROPOLSKIJ J.A.: Asimptoticzeskije metody w tieorii nieliniejnych kolebanij. Gostiechizdat 1955.

[3] SIWCZYŃSKI M.: O istnieniu drgań prawie okresowych w układach synchronizacji. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 35, 1972.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Prof. dr hab. Adam Macura

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Р е з ю м е

В работе проверяется устойчивость периодических и почти периодических колебаний автономной системы вида

$$x = y^{2n-1} + X(x,y)$$

$$y = -x^{2n-1} + Y(x,y)$$

где 1. С этой целью использованы так называемые обобщенные периодические функции, которых определение дано в тексте. В заключении статьи рассмотрен случай синхронизации колебаний этого типа.

ON THE STABILITY OF SOME STRONGLY NON-LINEAR SELF-EXCITING OSCILLATIONS

S u m m a r y

In this paper the stability of the periodic and almost periodic solutions of the differential system

$$\dot{x} = y^{2n-1} + \mu X(x,y)$$

$$\dot{y} = -x^{2n-1} + \mu Y(x,y)$$

where $|\mu| \ll 1$ were proved. In this proces, the generalized periodic functions are used. The sinchronization of the strongly non-linear oscillators was proved.