ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1986

Seria: AUTOMATYKA z. 83 Nr kol. 888

Edward HRYNKIEWICZ

OBLICZANIE WSPOŁCZYNNIKÓW SZEREGU FOURIERA PRZY DANYCH WSPÓŁCZYNNIKACH SZEREGU WALSHA

Streszczenie. W artykule podana jest metoda obliczenia współczynników szeregu Fouriera przy danych współczynnikach szeregu Walsha. Metoda ta jest tak pomyślana, by można było wykonywać obliczenia na komputerze osobistym lub kalkulatorze (w szczególności kalkulatorze HP 9820).

1. Wprowadzenie

Dowolną całkowalną funkcję $f(t)$, określoną w przedziale $\langle 0,T\rangle$ i spełniającą warunki Dirichleta można rozłożyć w szereg względem danego układu bazowych funkcji ortogonalnych. Jako funkcje bazowe, dan oprócz funkcji trygonometrycznych, stosuje się między innymi funkcje Walsha, co w pewnych przypadkach pozwala na szybsze, niż dla funkcji trygonometrycznych, znajdowanie współczynników rozkładu. Funkcje Walsha dla dowolnego k i dla $x \in \langle 0, 1\rangle$ definiuje się następująco [1]:

$$\mathrm{wal}(k,x) = \prod_{r=0}^{M-1} \mathrm{sgn}(\cos^{k_r} 2^r \pi x), \tag{1}$$

gdzie:

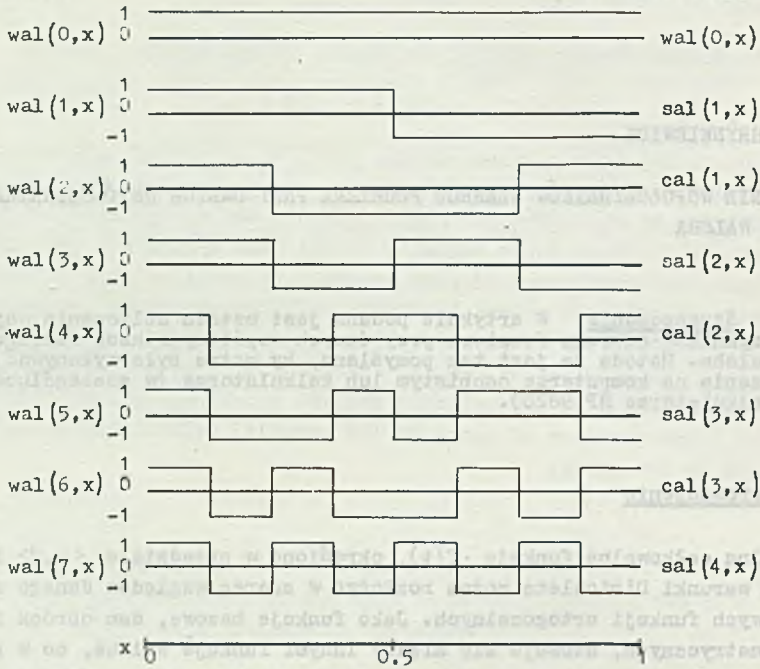
$x = \frac{t}{T}$ - jest znormalizowanym czasem,

M - najmniejsza liczba naturalna spełniająca zależność $2^M > k$,

k_r - kolejna cyfra zapisu liczby k w kodzie naturalnym dwójkowym.

Podobnie do funkcji trygonometrycznych funkcje Walsha dzielimy na parzyste ($\mathrm{cal}(s,x)$) i nieparzyste ($\mathrm{sal}(s,x)$), jak pokazano na rys. 1.

Korzystając z tego, że w obliczeniach komputerowych wyznaczenie współczynników szeregu Walsha jest szybsze od wyznaczania współczynników Fouriera, można te ostatnie wyznaczać pośrednio ze współczynników Walsha. Metoda ta może mieć znaczenie wtedy, gdy funkcja $f(t)$ ma skończone widmo Walsha.



Rys. 1. Funkcje Walsha

Fig. 1. Walsh Functions

2. Przejście ze współczynników Walsha na współczynniki Fouriera

Niech funkcja $f(t)$ o okresie T będzie przedstawiona w postaci szeregu Walsha:

$$f(t) = C_o + \sum_{s=1}^{\infty} C_s \, cal\,(s,x) + \sum_{s=1}^{\infty} S_s \, sal\,(s,x), \tag{2}$$

gdzie:

$x = \frac{t}{T}$ - znormalizowany czas,

oraz w postaci szeregu Fouriera:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi nx). \tag{3}$$

Rozwińmy funkcje cal(s,x) i sal(s,x) w szereg Fouriera [3]. Dla funkcji cal(s,x) jako parzystej współczynniki $b_n = 0$, a dla funkcji sal(s,x) jako nieparzystej $a_n = 0$.

$$\mathrm{cal}(s,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{sn} \cos 2\pi nx ,$$

$$\mathrm{sal}(s,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{sn} \sin 2\pi nx, \tag{4}$$

gdzie:

$$a_{sn} = 2 \int_0^1 \mathrm{cal}(s,x) \cos 2\pi nx \, dx,$$

$$b_{sn} = 2 \int_0^1 \mathrm{sal}(s,x) \sin 2\pi nx \, dx.$$

Po podstawieniu wzorów (4) do (2) i porównaniu (3) z (2) uzyskuje się podstawowe zależności przejścia ze współczynników rozwinięcia w szereg Walsha na rozwinięcie w szereg Fouriera:

$$a_n = \sum_{s=1}^{\infty} a_{sn} C_s$$

$$b_n = \sum_{s=1}^{\infty} b_{sn} S_s \tag{5}$$

Podstawiając:

$$A_{k-1,\, m-1} = b_{sn},$$

$$A_{k,m} = a_{sn}, \tag{6}$$

gdzie:

dla $k = 2, 4, 6, 8 \ldots$

$m = 2, 4, 6, 8 \ldots$

Można zbudować macierz A spełniającą równanie:

$$\left[C_o,\ S_1,\ C_1,\ S_2,\ C_2,\ \ldots\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & A_{11} & A_{12} & \ldots \\ 0 & A_{21} & A_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{bmatrix} = \left[\frac{a_o}{2},\ b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2, \ldots\right] \tag{7}$$

Z (6) wynika, że co drugi element w wierszu macierzy A równy jest zero. Ze względu na to, że dla funkcji Walsha o okresie 1 spełniona jest zależność [1]:

$$\mathrm{wal}(k, x - \tfrac{1}{2}) = -\,\mathrm{wal}(k,x) \tag{8}$$

w rozwinięciu tych funkcji w szereg Fouliera występują tylko harmoniczne nieparzyste, a dla pozostałych funkcji, które są "ściśnięciami" wcześniejszych funkcji oryginalnych, harmoniczne niezerowe są jeszcze rzadsze. Oznacza to, iż w nejlepszym przypadku co czwarty element wiersza macierzy A jest różny od zera.

Korzystając z twierdzenia o zmianie skali czasu można zapisać:

$$\begin{aligned} A_{2k,2m} &= A_{k,m}, \\ A_{2k-1,2m-1} &= A_{k-1,m-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie:

$k = 2, 4, 6, \ldots,$

$m = 2, 4, 6, \ldots.$

Na podstawie (9) można powiedzieć, że dla otrzymania całej macierzy A wystarczy znać rozwinięcie w szereg Fouriera, dla s nieparzystego, tylko tych funkcji sal(s,x) i cal(s,x), których okres wynosi 1, tzn. tych, które nie są "ściśnięciami" funkcji wcześniejszych. A ponieważ funkcje cal(s,x) można otrzymać z funkcji sal(s,x) i przesuwając ją o 1/4, zatem

$$\begin{aligned} \mathrm{sal}(s, x + \tfrac{1}{4}) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{sn} \sin(2\pi nx + \tfrac{\pi}{2} n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} b_{sn} \cos 2\pi nx \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie:

$$s = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

$$n = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Korzystając z własności funkcji Walsha, że

$$sal(s,x + \tfrac{1}{4}) = (-1)^{k_{p+1}} cal(s,x) \tag{11}$$

gdzie:

k_p - najmniej znaczące zero liczby binarnej $k = 2s-1$,

można napisać:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} b_{sn} \cos 2\pi nx = (-1)^{k_{p+1}} cal(s,x), \tag{12}$$

ponieważ

$$cal(s,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{sn} \cos 2\pi nx, \tag{13}$$

więc

$$a_{sn} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{k_{p+1}} b_{sn} . \tag{14}$$

Liczba k przyjmuje wartości 1, 5, 9, 13, 17,..., co w zapisie binarnym wygląda następująco:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & - & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & - & 17 . \end{array}$$

k_{p+1} k_p

Widać stąd, że k_{p+1} przyjmuje na przemian wartości 0 i 1.

Zatem czynnik $(-1)^{k_{p+1}}$ w wyrażeniu (14) można zastąpić czynnikiem

$(-1)^{\frac{k-2}{4}}$ $k = 2, 6, 10, \ldots$

Ponieważ w macierzy A indeks $m = 2n$, to czynnik $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ przybierze postać:

$$(-1)^{\frac{m-2}{4}} \qquad m = 2, 6, 10, \ldots$$

Wzór (14) będzie więc teraz wyglądał następująco:

$$A_{km} = (-1)^{\frac{m-2}{4}} (-1)^{\frac{k-2}{4}} A_{k-1,m-1} \tag{15}$$

Weźmy cztery kolejne rozwinięcia w szereg Fouriera czterech funkcji Walsha (cztery wiersze macierzy A) o numerach $k-1$, k, $k+1$, $k+2$ ($k = 2, 6, 10, \ldots$). Dwa ostatnie rozwinięcia odpowiadające funkcjom sal(s,x), cal(s,x) o s parzystym są powtórzeniami wcześniejszych i możemy je uzyskać ze wzorów (9).

Dwa pierwsze są oryginalne, lecz znając jedno z nich można na podstawie (15) otrzymać drugie. Wynika stąd, że dla wyznaczenia macierzy A wystarczy obliczyć co czwarty wiersz, tzn. wiersze o numerach $k = 2, 6, 10, \ldots$ lub $k = 1, 5, 9, \ldots$. Pozostałe wiersze uzyskujemy zmieniając znak elementów lub ich rozłożenie.

Przy obliczaniu oryginalnych elementów macierzy można korzystać ze wzorów (4), ale do obliczeń maszynowych wzory te nie są wygodne. Inny sposób obliczania podany jest w [4] i [5], gdzie uwzględniając to, że funkcje Walsha są przedziałami stałe, a minimalna szerokość takiego przedziału równa jest $\frac{1}{2^M}$ (M - najmniejsza liczba naturalna taka, że $2^M > k$), podano zależność:

$$A_{k,m} - j\, A_{k,m-1} = 2(-1)^{g_o}(-j)^a \operatorname{sinc}\left(2^{\frac{m}{M+1}}\right) \prod_{r=0}^{M-1} \cos\left(\frac{m}{2^{r+2}} - g_r \frac{\pi}{2}\right),$$

gdzie:

g_r - wartość r-tej pozycji zapisu numeru funkcji Walsha w kodzie Graya

a - ilość jedynek w tym zapisie,

j - $\sqrt{-1}$; sinc - sinus całkowy ($\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$).

Jeżeli założyć, że liczone będą wiersze o numerach $k = 2, 6, 10, \ldots$ i niezerowe elementy w tych wierszach o numerach $m = 2, 6, 10, \ldots$, to $A_{k,m-1} = 0$. Ze względu na to, że dla takich k jak wyżej ostatni bit (g_o) w kodzie Graya równy jest zawsze 1, pierwszy czynnik we wzorze (16) będzie równy:

$$\sin \frac{\pi}{4} m = (-1)^{\frac{m-2}{4}} .$$

Uwzględniając powyższe uwagi można wzór (16) uprościć do postaci:

$$A_{k,m} = 2(-1)^{\frac{2a+m+2}{4}} \operatorname{sinc}(2^{\frac{m}{M+1}}) \prod_{r=1}^{M-1} \cos(\frac{m}{2^{r+2}} - g_r \frac{\pi}{2}) \tag{17}$$

W praktycznych obliczeniach współczynników Fouriera na podstawie danych współczynników Walsha bierzemy pod uwagę skończoną ich liczbę. Wprowadza to siłą rzeczy błąd w obliczeniach. Błąd ten nie istnieje, jeżeli funkcja posiada skończone widmo Walsha, co wynika z samej metody.

Jeżeli funkcja posiada skończone widmo Fouriera, a liczba współczynników w tym widmie wynosi B, to zakładając, że mamy dane także B współczynników Walsha, można uzyskać dokładne współczynniki Fouriera z zależności (3).

$$a_n = \bar{a}_n \operatorname{sinc}^{-2} \frac{n}{2^M}$$

$$b_n = \bar{b}_n \operatorname{sinc}^{-2} \frac{n}{2^M} \qquad \text{dla } n < B \tag{18}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \bar{b}_n \operatorname{sinc}^{-2} \frac{1}{2} \qquad \text{dla } n = B$$

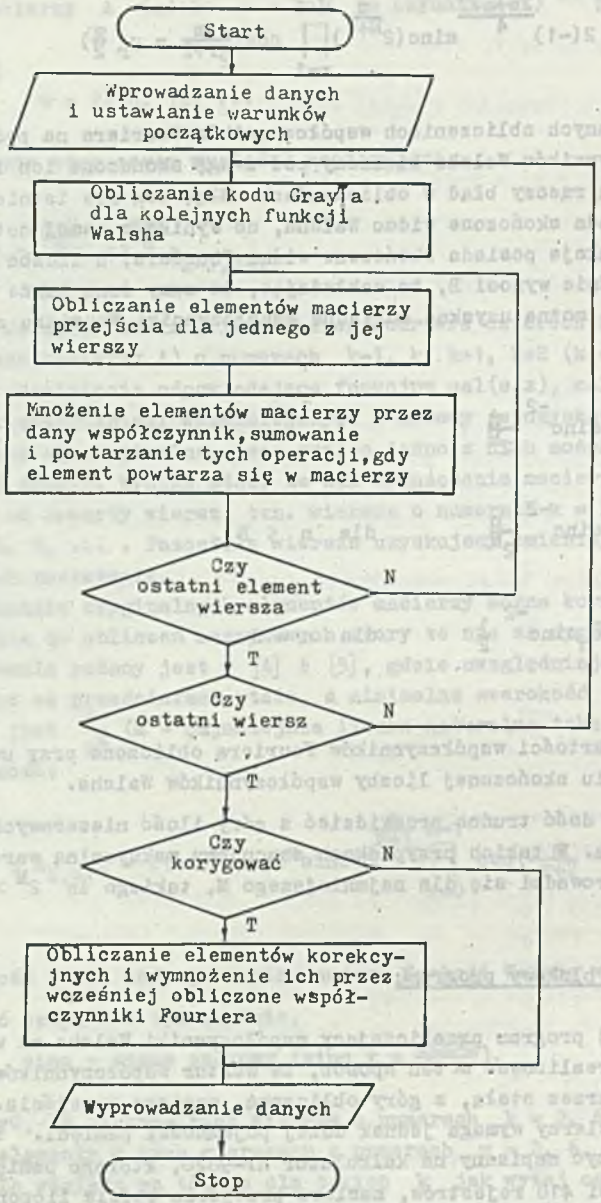
gdzie:

$\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ - wartości współczynników Fouriera obliczone przy uwzględnieniu skończonej liczby współczynników Walsha.

W praktyce dość trudno przewidzieć z góry ilość niezerowych współczynników Fouriera. W takich przypadkach szacujemy maksymalną wartość B (obliczenia prowadzi się dla najmniejszego M, takiego że $2^M > B$).

3. Schemat blokowy programu

Najprościej program przeliczający współczynniki Walsha na współczynniki Fouriera zrealizować w ten sposób, że wektor współczynników Walsha mnożony jest przez stałą, z góry obliczoną, macierz przejścia. Zapamiętanie takiej macierzy wymaga jednak dużej pojemności pamięci. Ponieważ program miał być napisany na kalkulator HP-9820, którego pamięć programu i danych wynosi 418 rejestrów, macierz przejścia będzie liczona w trakcie realizacji programu i jednocześnie mnożona przez wektor danych. W danej chwili będzie liczony i zapamiętany tylko jeden element macierzy i w celu



Rys. 2. Ogólny schemat blokowy programu

Fig. 2. Block diagram of the program

uniknięcia liczenia wielokrotnie elementów o tej samej wartości, będzie on powtarzany odpowiednią ilość razy [9].
Mając obliczone $A_{k,m}$ na podstawie wzoru (17) obliczamy $A_{k-1,m-1}$ zgodnie z (15). Ze wzorów (9) wynika, że elementy te powtarzają się w dalszej części macierzy jako $A_{2k,2m}$; $A_{2k-1,2m-1}$; $A_{4k,4m}$; $A_{4k-1,4m-1}$; ...
...($k = m = 2,6,10,14, \ldots$). Wszystkie te elementy mnożymy przez odpowiednie współczynniki Walsha zgodnie z numerem wiersza k i sumujemy zgodnie z numerem kolumny m.
Schemat blokowy programu pokazany jest na rys. 2.

4. Podsumowanie

Przy obliczaniu współczynników Fouriera na podstawie danych współczynników Walsha możemy popełnić błąd wynikający z uwzględnienia skończonej ilości współczynników Walsha. Próba szacowania tego błędu podana jest w [6]. Błąd ten nie występuje, gdy funkcja posiada skończone widmo Walsha lub Fouriera.
Dla funkcji ciągłych o nieskończonym widmie Walsha i Fouriera, aby wyliczyć kilka współczynników Fouriera, trzeba użyć (obliczyć) dużą liczbę współczynników Walsha. W takim przypadku korzystniej będzie stosować bezpośrednio szybką transformatę Fouriera (FFT).

Natomiast dla funkcji dyskretnych, szczególnie gdy ich skok zsynchronizowany jest ze skokiem funkcji Walsha, liczba współczynników Walsha, które trzeba uwzględnić, by odwzorować funkcje f(t) z zadanym błędem średniokwadratowym, jest mniejsza niż liczba współczynników Fouriera [1] i wtedy przedstawiona tutaj metoda obliczania współczynników Fouriera staje się przydatna.

LITERATURA

[1] Blachman N.M.: Sinusoids versus Walsh Functions, Proc. IEEE, 1974 nr 3, pp. 346-354.

[2] Sobkowski J.: Częstotliwościowa analiza sygnałów, 1975.

[3] Kitai R.: Walsh - to - Fourier Spectral Conversion for Periodic Waves, IEEE Trans. EMC, 1975, pp. 266-269.

[4] Simens K.H., Kitai R.: A Non - recursive Equation for the Fourier Transform of the Walsh Function, IEEE Trans. EMC - 15, 1973.

[5] Blachman N.M.: Spectral analysis with sinusoids and Walsh functions, IEEE Trans. AES - 7, 1971, pp. 900-905.

[6] Bandurski W.: Wyznaczanie transmitacji widmowej za pomocą ortonormalnych funkcji Walsha, PAK 1975/1, ss. 16-18.

[7] Wajs K.: Funkcje Walsha i ich zastosowanie w elektrotechnice, Przegląd Elektrotechniczny, 1976, nr 11, ss. 413-418.

[8] Żakowski W., Kołodziej W.: Matematyka, WNT, Warszawa 1975, część II.

[9] Balikowski W.: Praca magisterska, 1982.

Recenzent: Doc. dr inż. Ferdynand WAGNER

Wpłynęło do Redakcji 16.05.85 r.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ ПРИ ДАННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ РЯДА УОЛША

Р е з ю м е

В статье дан метод расчёта коэффициентов ряда фурье при данных коэффициентах ряда Уолша. Метод задуман таким образом, чтобы можно было проводить расчёты с использованием микрокомпьютеров или электронных калькуляторов (в частности на калькуляторе HP 9820).

CALKULATION OF THE FOURIER COEFFICIENTS FROM GIVEN WALSH COEFFICIENTS

S u m m a r y

The paper describes the method of Fourier series coefficients calculation from given Walsh series coefficients.
This method is prepared to be perfomed on personal computers or desktop calculators.
This was obtained on the ground of calculating only the original elements of transition matrix (that reduces the number of operations).
Other elements of this matric are found by changing the indices or signs (if needed) of these original elements.