

Jan Kubik, Adam Zybura

ANALITYCZNE WYZNACZENIE FUNKCJI RELAKSACJI I PEŁZANIA W ŻELBETOWYCH SŁUPACH OSIOWO ŚCISKANYCH

Streszczenie. W pracy wyznaczono funkcje relaksacji i pełzania w żelbetowym słupie osiowo ściskanym. Funkcje te otrzymano dla zastępczego słupa jednorodnego, w którym stan naprężenia i odkształcenia jest identyczny jak uśredniony stan naprężenia i odkształcenia w słupie żelbetowym. W rozważanym żelbetowym słupie, beton jest składnikiem posiadającym cechy reologiczne, natomiast stal posiada tylko cechy sprężyste.

1. Wstęp

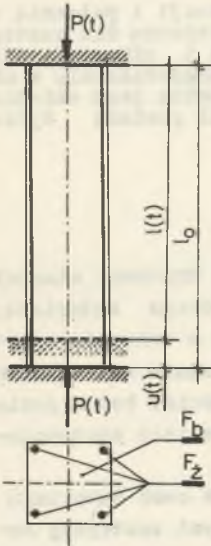
W analizie statycznej konstrukcji żelbetowych istotną trudność stanowi podanie analitycznego opisu cech fizykalnych, niejednorodnego materiału, jakim jest żelbet. Z trudnościami tymi spotykamy się już w zakresie sprężystym, a potęgują się one znacznie w trakcie przeprowadzania reologicznej analizy konstrukcji żelbetowych, w których pierwszy składnik: beton posiada cechy reologiczne, natomiast drugi: stal, przy naprężeniach występujących w betonie jest materiałem sprężystym.

W wielu praktycznych zadaniach wygodne jest określenie cech materiału niejednorodnego pewnymi uśrednionymi funkcjami, opisującymi zastępczy materiał jednorodny. Z potrzebą takiego postępowania spotykamy się między innymi w obliczeniach statycznych konstrukcji żelbetowych, w których wyznaczamy stan naprężenia wg metod przyjmujących za podstawę jednorodność materiału konstrukcji. Wspomniane uprzednio funkcje zastępcze odnoszące się do ośrodka jednorodnego muszą być tak dobrane, aby uśrednione stany naprężenia i przemieszczenia w obu ośrodkach, tj. żelbecie oraz materiale jednorodnym były identyczne. Mamy więc tutaj do czynienia z określonym odwzorowaniem ośrodka niejednorodnego na jednorodny. Przyjęty zastępczy ośrodek jednorodny, modelujący zachowanie się żelbetu posiada właściwości reologiczne. W najprostszym przypadku liniowego ośrodka lepko-sprężystego opis tego ośrodka uzyskujemy przez podanie związków konstytutywnych, w których należy znać funkcje relaksacji i pełzania. Określeniem tych właśnie funkcji poświęcony jest niniejszy artykuł.

2. Założenia

Rozpatrujemy żelbetowy słup poddany działaniu siły $P(t)$, która wywołuje w nim stan jednoosiowego ściskania - rys. 1.

Oznaczamy przez F_b - przekrój poprzeczny betonu, a przez F_z - przekrój poprzeczny stali.



Rys. 1. Słup żelbetowy poddany osiowemu ściskaniu.

W słupie tym beton i stal traktujemy jako dwa różne składniki o odmiennych cechach reologicznych. Przedziały zmienności parametrów determinujących pole naprężeń w słupie są tak dobrane, że nie następuje w żadnym z materiałów składowych przekroczenie liniowego zakresu zmienności parametrów opisujących zachowanie się słupa. Stan ten zachodzi dla naprężeń w betonie $\sigma_b(t)$ zawierających się w przedziale $0,4R_g \leq \sigma_b(t) \leq 0,6R_g$. Zakładamy, że słup zostanie obciążony najwcześniej po upływie 30 dni od jego wykonania (por. [12]). Po tym czasie w rozważaniach można pominąć zmienność cech fizycznych związanych z procesem starzenia się betonu.

3. Równania zagadnienia

Analizę zagadnienia rozpoczniemy od wydzielenia z funkcji przemieszczeń $u(t)$ odkształcenia $\varepsilon(t)$. Obydwie te funkcje zależą od czasu t i łączy je zależność liniowa (3.1). W rozpatrywanym elemencie musi zachodzić zgodność odkształceń materiałów składowych (betonu i stali), która prowadzi do relacji (3.2).

Związki te łącznie z równaniami fizycznymi dla betonu wg [9] (3.3) i stali (3.4), oraz równaniami równowagi (3.5) determinują stan naprężenia w słupie.

Komplet równań wyjściowych rozpatrywanego problemu jest następujący:

$$\varepsilon(t) = \frac{l_0 - l(t)}{l_0} = \frac{u(t)}{l_0} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_z(t) = \frac{u(t)}{l_0} = \varepsilon(t) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_b(t)}{R_b} + c_0 \int_0^t \sigma_b(\tau) e^{-\eta(t-\tau)} d\tau \quad (3.3)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_z(t)}{R_s} \quad (3.4)$$

$$\int_{F_b} \sigma_b(t) dF_b + \int_{F_z} \sigma_z(t) dF_z = P(t). \quad (3.5)$$

W równaniach (3.1) + (3.5) $\sigma_b(t)$, $\sigma_z(t)$ - określają naprężenia w betonie i stali, E_b , E_z - moduły sprężystości tych materiałów, α_0 , η - współczynniki otrzymane drogą doświadczalną (wg [9]), $P(t)$ - siłę działającą na rozpatrywany słup.

4. Wyznaczenie funkcji relaksacji $\psi(t)$ i pełzania $\varphi(t)$

Poszukujemy teraz takiego zastępczego lepkosprężystego słupa jednorodnego w którym stan naprężenia i odkształcenia jest taki sam jak uśredniony stan naprężenia i przemieszczania w słupie żelbetowym. W ten sposób będziemy próbowali odwzorować ośrodek niejednorodny (słup żelbetowy) na ośrodek jednorodny. Jak już wspomniano musi być przy tym spełniony warunek równości przemieszczeń w obu słupach: żelbetowym i hipotetycznym słupie jednorodnym, przy takim samym obciążeniu zewnętrznym $P(t)$. Warunek ten ujęto zależnościami (4.5), w których przyjęto, że opis stanu naprężenia i przemieszczenia w jednorodnym ośrodku lepkosprężystym jest następujący:

$$\bar{\sigma}^*(t) = \int_0^t \frac{\partial \bar{\sigma}^*}{\partial t} \psi(t-\tau) d\tau, \quad \bar{\varepsilon}^*(t) = \int_0^t \frac{\partial \bar{\varepsilon}^*}{\partial t} \varphi(t-\tau) d\tau. \quad (4.1)$$

W zależności (4.1) $\bar{\sigma}^*$, $\bar{\varepsilon}^*$, ψ , φ , są odpowiednio: naprężeniem, przemieszczeniem, funkcją relaksacji i pełzania w hipotetycznym ośrodku jednorodnym.

Zakładamy, że w chwili początkowej, w obu słupach nie występują stany naprężenia ($\bar{\sigma}_b(0) = \bar{\sigma}_z(0) = \bar{\sigma}^*(0) = 0$).

W dalszym ciągu będziemy na podstawie warunku równych odkształceń przy tych samych obciążeniach obu słupów, poszukiwali funkcji $\psi(t)$ i $\varphi(t)$. Wykonujemy na równaniu (3.3) transformację Laplace'a określoną związkami:

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} \bar{f}(p)e^{pt} dp \end{aligned} \quad (4.2)$$

uzyskamy wtedy

$$E_b \bar{\varepsilon}^*(p) = \bar{\sigma}_b(p) + E_b \alpha_0 \eta \bar{\sigma}_b(p) \frac{1}{p + \eta}. \quad (4.3)$$

Przekształcając odpowiednie wyrażenie (4.3) i retransformując otrzymamy

$$\sigma_b(t) = \int_0^t \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} E_b e^{-\gamma(1+E_b c_0)(t-\tau)} d\tau + \int_0^t \xi(\tau) E_b \gamma e^{-\gamma(1+E_b c_0)(t-\tau)} d\tau. \quad (4.4)$$

Jeżeli zastępczy ośrodek jednorodny ma tak samo reagować jak niejednorodny przekrój żelbetowy, to musi zachodzić

$$P(t) = (F_b + F_z) \int_0^t \frac{\partial \xi^*(\tau)}{\partial \tau} \psi(t-\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \xi^*. \quad (4.5)$$

Podstawiając równania (3.4), (4.4) i (4.5) do (3.5) uzyskujemy

$$E_b F_b \left[\int_0^t \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial \tau} e^{-\gamma(1+E_b c_0)(t-\tau)} d\tau + \int_0^t \xi(\tau) \gamma e^{-\gamma(1+E_b c_0)(t-\tau)} d\tau \right] + \\ + \xi(t) E_z F_z = (F_b + F_z) \int_0^t \frac{\partial \xi^*(\tau)}{\partial \tau} \psi(t-\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Wykonując na równaniu (4.6) transformację Laplace'a uzyskamy

$$E_b F_b \left[p \bar{\xi}(p) \frac{1}{p + \gamma(1+E_b c_0)} + \gamma \bar{\xi}(p) \frac{1}{p + \gamma(1+E_b c_0)} \right] + \bar{\xi}(p) E_z F_z = \\ = (F_b + F_z) p \bar{\xi}(p) \bar{\psi}(p). \quad (4.7)$$

Dzieląc przez $p \bar{\xi}(p) (F_b + F_z)$ i retransformując otrzymamy poszukiwaną funkcję relaksacji

$$\psi(t) = \frac{1}{F_b + F_z} \left\{ E_b F_b \left[e^{-\gamma(1+E_b c_0)t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(1+E_b c_0)\tau} d\tau \right] + F_z E_z \right\}. \quad (4.8)$$

Po wykonaniu całkowania i uwzględnieniu, że $\frac{F_z}{F_b} = \mu$, ostateczna postać funkcji relaksacji jest następująca

$$\psi(t) = \frac{1}{1 + \mu} \left\{ E_b \left[e^{-\gamma(1+E_b c_0)t} + \left(1 - \frac{1}{1 + E_b c_0}\right) + \frac{1}{1 + E_b c_0} \right] + \mu E_z \right\}. \quad (4.9)$$

Uzyskana funkcja relaksacji określa właściwości relaksacji ośrodka niejednorodnego, jakim jest żelbet, w stosunku do hipotetycznego lepkosprężystego ośrodka jednorodnego. Oczywiście średni stan naprężenia w obu ośrodkach: żelbecie i zastępczym ośrodku lepkosprężystym jest identyczny.

Chcąc uzyskać funkcję pełzania, wykonujemy transformację Laplace'a określoną związkami (4.2), na wyrażeniu ujmującym relaksację rozpatrywanego słupa (4.9), wykorzystując jednocześnie równość (4.1). Otrzymamy wtedy:

$$\psi(p) = \frac{1}{1 + \mu} \left\{ E_b \left[\frac{1}{p + \eta(1 + E_b c_0)} \left(1 - \frac{1}{1 + E_b c_0} \right) + \frac{1}{p(1 + E_b c_0)} \right] + \frac{\mu E_s}{p} \right\}. \quad (4.10)$$

Wprowadzając dołączkowe oznaczenia do równania (4.10)

$$\alpha = \frac{E_b}{(1 + \mu)(1 + E_b c_0)}, \quad \beta = \eta(1 + E_b c_0), \quad \delta = \frac{\mu E_s}{1 + \mu}, \quad (4.11)$$

uzyskujemy

$$\psi(p) = \frac{\alpha E_b c_0}{p + \beta} + \frac{\alpha}{p} + \frac{\delta}{p} = \frac{p \alpha E_b c_0 + (\alpha + \delta)(p + \beta)}{p(p + \beta)}. \quad (4.12)$$

Retransformując wyrażenie (4.12) i wykorzystując związki (4.1) otrzymamy ostateczną postać funkcji pełzania

$$\varphi(t) = \frac{1}{\beta(\alpha + \delta)} + \left[\frac{1}{\alpha E_b c_0 + \alpha + \delta} - \frac{1}{\beta(\alpha + \delta)} \right] e^{-\frac{\beta(\alpha + \delta)}{\alpha E_b c_0 + \alpha + \delta} t}. \quad (4.13)$$

5. Przykład liczbowy

Należy wyznaczyć funkcję pełzania dla żelbetowego słupa osiowo ściskanego wykorzystując dane doświadczalne zaczerpnięte z pracy [9] w dwu przypadkach:

Przypadek 1: gdy słup wykonywany jest z betonu $R_w = 110 \text{ kg/cm}^2$ i stali StOS, w ilości: $\mu = 1\%$, $\mu = 2\%$, i $\mu = 3\%$;

Przypadek 2: gdy słup wykonany jest z betonu $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$ i stali StOS, w ilości: $\mu = 1\%$, $\mu = 2\%$, i $\mu = 3\%$.

Otrzymane dla obydwóch przypadków funkcje porównamy z funkcjami pełzania samego betonu otrzymanymi z wyrażenia (4.13), zakładając, że $\mu = 0$ i $\delta = 0$.

Przypadek	μ	α	β	δ	$\alpha E_b c_0 + \alpha + \delta$	$\beta(\alpha + \delta)$
1	1%	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	2%	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
	3%	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
2	1%	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
	2%	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
	3%	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

Dane:

$$E_z = 21 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2,$$

dla betonu $R_w = 110 \text{ kG/cm}^2$ $E_b = 2 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, wg [9] przy wilgotności względnej otoczenia 70% $c_0 = 9,0 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$, $\varphi = 0,026 \frac{1}{\text{sek}}$, dla betonu

$R_w = 170 \text{ kG/cm}^2$ $E_b = 2,6 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, wg [9] przy wilgotności względnej otoczenia 70% $c_0 = 0,94 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$, $\varphi = 0,028 \frac{1}{\text{sek}}$.

Przypadek 1

Dla wartości $\mu = 1\%$ obliczamy współczynniki α , β i δ określone związkami (4.11)

$$\alpha = \frac{E_b}{(1 + \mu)(1 + E_b \cdot c_0)} = \frac{2 \cdot 10^5}{(1 + 0,01)(1 + 2 \cdot 10^5 \cdot 0,9 \cdot 10^{-5})} =$$

$$= 0,705 \cdot 10^5$$

$$\beta = \varphi(1 + E_b c_0) = 0,026(1 + 2 \cdot 10^5 \cdot 0,9 \cdot 10^{-5}) = 0,073$$

$$\delta = \frac{\mu \cdot E_z}{1 + \mu} = \frac{0,01 \cdot 21 \cdot 10^5}{1 + 0,01} = 0,208 \cdot 10^5.$$

Podstawiając obliczone współczynniki do wzoru (4.13) i obliczając wartości funkcji $\varphi(t)$ dla odpowiednich dni t , otrzymamy rzędne poszukiwanej funkcji pełzania.

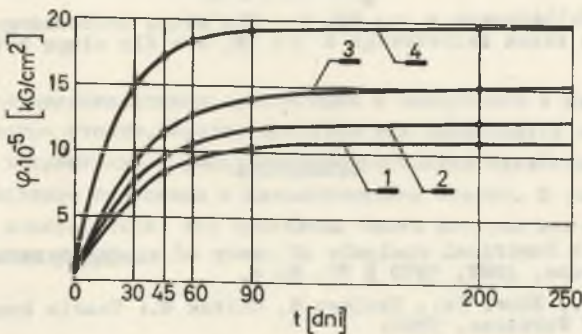
Chcąc znaleźć rzędne funkcji pełzania dla pozostałych słupów żelbetowych o zadanej ilości zbrojenia, obliczamy analogicznie wartości współczynników α , β , δ dla μ odpowiednio $\mu = 0,02$ i $\mu = 0,03$. Uzyskane wyniki podstawiamy do wzoru (4.13) obliczając wartości funkcji $\varphi(t)$ dla dni t . Rzędne funkcji pełzania dla słupa betonowego otrzymamy obliczając współczynniki α , β dla $\mu = 0$, oraz przyjmując $\delta = 0$. Podstawiając te współczynniki do wzoru (4.13) uzyskamy rzędne funkcji pełzania dla poszczególnych dni t w słupie betonowym.

Obliczone rzędne funkcji pełzania dla słupów żelbetowych, oraz słupa betonowego, wykonanych z betonu $R_w = 110 \text{ kG/cm}^2$ zamieszczono w tabeli 1. Funkcje te przedstawiono graficznie na rys. 2.

Tabela 1

Wartości rzędnych funkcji pełzania dla słupów z betonu
 $R_w = 110 \text{ kg/cm}^2, . 10^{-5} \text{ kg/cm}^2$

$\mu \backslash t$	0	30	45	60	90	200
0,03	0,39	7,18	8,60	9,41	10,15	10,50
0,02	0,42	8,06	9,75	10,79	11,75	12,28
0,01	0,46	9,19	11,35	12,69	14,11	15,02
0	1,00	15,38	17,45	18,39	19,04	19,20



Rys. 2. Wykresy funkcji dla słupów wykonanych z betonu $R_w = 110 \text{ kg/cm}^2$

1 - dla słupa żelbetowego o $\mu = 3\%$, 2 - dla słupa żelbetowego o $\mu = 2\%$,
 3 - dla słupa żelbetowego o $\mu = 1\%$, 4 - dla słupa betonowego.

Przypadek 2.

Rzędne funkcji pełzania dla słupów żelbetowych i słupa betonowego, wykonanych z betonu $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$ otrzymane w identyczny sposób jak w przypadku 1, przyjmując do obliczeń wartości modułu sprężystości E_b oraz współczynniki doświadczalne η, c_0 dla betonu $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$.

Obliczone rzędne funkcji pełzania dla słupów żelbetowych oraz słupa betonowego, wykonanych z betonu $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$ zamieszczono w tabeli 2. Funkcje te przedstawiono graficznie na rys. 3.

Tabela 2

Wartości rzędnych funkcji pełzania dla słupów z betonu
 $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2, . 10^{-5} \text{ kg/cm}^2$

$\mu \backslash t$	0	30	45	60	90	200
0,03	0,32	6,07	7,36	8,11	8,85	9,24
0,02	0,34	6,70	8,22	9,21	10,17	10,78
0,01	0,36	7,49	9,34	10,57	11,93	12,95
0	0,83	8,73	11,04	12,62	14,56	16,35

- [9] Арутюнян Н.Х.: Некоторые вопросы теории ползучести, Москва 1952.
- [10] Александровский С.В., Багрий В.Я.: Ползучесть бетона при периодических воздействиях, Москва 1970.
- [11] Кизирия Г.В.: Расчет конструкций с учетом деформаций ползучести бетона, Тбилиси 1969.
- [12] Улицкий И.И.: Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных просесов, Киев 1967.
- [13] Ржаницын А.Р.: Теория ползучести, Москва 1968.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РЕЛАКСАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ
В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТОЛБАХ

Р е з ю м е

В работе определено функции релаксации и ползучести в железобетонном центрально сжатом столбе. Функции получены для заменяющего однородного столба, в котором напряженное и деформационное состояние идентичное как напряженное и деформационное состояние в железобетонном столбе. В развешителном железобетонном столбе, бетон это составная часть которая имеет реологические приметы, а сталь упругие.

ANALYTICAL DETERMINATION OF THE RELAXATION AND CREEP FUNCTIONS
IN AXIALLY COMPRESSED REINFORCED CONCRETE COLUMNS

S u m m a r y

On the paper relaxation and creep functions in axially coppedressed reinforced concrete columns were determined. Functions were obtained for the substitutional, homogeneous column, in which the state of stress and deformation is the same as the averaged state of stress and deformation in a reinforced concrete column. On such a column concrete constitutes the component having rheological properties while steel reveals only elastic properties.

Pracę złożono w redakcji w czerwcu 1971 r.