



BUDOWNICTWO z. 36

ANDRZEJ MAZUREK

**ANALOGIA ELEKTROMECHANICZNA
DRGAŃ UKŁADÓW PRĘTOWYCH
O WIELU STOPNIACH SWOBODY**

**P O L I T E C H N I K A Ś L A Ś K A
ZESZYT NAUKOWY Nr 409 – GLIWICE 1974**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 409

ANDRZEJ MAZUREK

ANALOGIA ELEKTROMECHANICZNA DRGAŃ UKŁADÓW PRĘTOWYCH O WIELU STOPNIACH SWOBODY

ZESZYT TRZYDZIESTY SZÓSTY

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Włodzimierz Starosolski

SEKRETARZ REDAKCJI

Anna Błażkiewicz

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 80+175 Ark. wyd. 6,2 Ark. druk. 7,0 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 6 4. 1974 Podpis. do druku 30 5. 1974 Druk ukończ. w czerwcu 1974
Zam. 640 6. 4. 1974 H-23 Cena zł 8,-

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
1. Wstęp.....	5
1.1. Analogie elektromechaniczne	6
1.2. Wykaz stosowanych symboli i oznaczeń	8
2. Analogie elektromechaniczne drgań układów liniowych o jednym stopniu swobody	11
2.1. Drgania układu mechanicznego	11
2.2. Drgania w obwodzie elektrycznym	12
2.3. Elektryczne odpowiedniości analogowe układu mechanicznego	16
3. Analogie elektromechaniczne drgań układów liniowych o skończonej liczbie stopni swobody	26
3.1. Metody konstrukcji równań drgań układów prętowych dyskretnych	26
3.2. Drgania w liniowych sprzężonych obwodach elektrycznych.	31
3.3. Analogie oparte na równaniach Lagrange'a drugiego rodzaju	33
3.4. Analogie oparte na metodzie przemieszczeń	39
3.5. Analogie oparte na metodzie sił	42
4. Wykorzystanie analogii elektromechanicznej do obliczania drgań	44
4.1. Dobieranie wartości elementów obwodów elektrycznych....	44
4.2. Budowa obwodów elektrycznych	51

5. Program i algorytm na emc Odra 1204	61
5.1. Budowa i przeznaczenie programu	61
5.2. Obliczenie drgań belki ciągłej.....	65
5.3. Obliczenie drgań żelbetowej wieży wyciągowej.....	71
6. Wykorzystanie maszyny analogowej do obliczania drgań	76
6.1. Wprowadzenie do techniki analogowej	76
6.2. Obliczenie drgań belki ciągłej	78
6.3. Obliczenie drgań żelbetowej wieży wyciągowej	78
7. Procesy ustalania się drgań wymuszonych	89
7.1. Określenie stanu nieustalonego	89
7.2. Stan nieustalony układu o jednym stopniu swobody	89
7.3. Stan nieustalony układów o wielu stopniach swobody.....	91
7.4. Wykorzystanie maszyn analogowych do znalezienia postaci drgań w stanie nieustalonym	92
7.5. Wykorzystanie maszyn cyfrowych do znalezienia postaci drgań w stanie nieustalonym	97
8. Uwagi i wnioski końcowe	102
9. Literatura	105
Streszczenia	107

1. WSTĘP

Obserwowany od lat nieustający wzrost działań dynamicznych w budownictwie jest powodem licznych uciążliwości i zakłóceń eksploatacyjnych oraz często uszkodzeń lub nawet awarii. Ciągłe rosnąca moc stymulatorów drgań na tle wyraźnej tendencji do stosowania nowoczesnych, ekonomicznych ustrojów nośnych, o zmniejszonym ciężarze i wymiarach, wprowadza dodatkowe kryteria do oceny przydatności konstrukcji. Są nimi pełna analiza drgań oraz utrzymanie wielkości amplitud przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w granicach dopuszczalnych.

Dotychczasowe sposoby traktowania problemów dynamicznych w projektowaniu konstrukcji charakteryzują się dużą różnorodnością pod względem ujęcia. Duża pracochłonność ścisłych metod obliczeń sprowadza stosowanie ich do zupełnie sporadycznych przypadków, a to z uwagi na ograniczony czas opracowań projektowych.

Duży postęp w tej dziedzinie nastąpił z chwilą wykorzystania do obliczeń elektronicznych maszyn cyfrowych o dużej mocy obliczeniowej oraz w związku z opracowaniem metod numerycznych opartych na algebrze macierzowej.

Należy jednak pamiętać, że maszyny cyfrowe dotychczas wykorzystywane były w zasadzie do sprawdzenia wielkości amplitud a nie do symulowania całego procesu drgań. Bardzo często ograniczano obliczenia do otrzymania jedynie częstotliwości drgań wymuszonych i porównania ich z częstotliwością sił wymuszających lub określania amplitudy przez wprowadzenie do rachunku tzw. współczynnika dynamicznego.

Równoległe z rozwojem maszyn cyfrowych i techniki cyfrowej, obserwuje się intensywny rozwój elektronicznej techniki analogowo-cyfrowej.

Metody analogowe znalazły już zastosowanie w statyce budowli a propagatorem ich w kraju jest A. Lisowski, autor cennych prac z tego zakresu [12] i [13].

O. Dąbrowski i L. Jarmużkiewicz zbudowali specjalny analog elektryczny modelujący układy prętowe [4].

Również autor niniejszej pracy, współuczestniczył w pracach [15] nad budową pierwszego w Polsce urządzenia analogowego do obliczeń statycznych belek ciągłych i ram, którego twórcą był A. Lisowski.

Analog ten wykorzystywany był przez kilka lat w jednym z biur projektowych na Śląsku.

Problemem wykorzystania techniki analogowej w obliczeniach statycznych poświęcone jest w literaturze zagranicznej szereg prac, między innymi E.I. Gutienmacher [9], K.K. Kieropian, T.M. Czegolin [10], G.E. Puchow [18].

Częste posługiwanie się elektroniczną techniką cyfrową do obliczeń dynamicznych obiektów narażonych na wpływy dynamiczne oraz ograniczenia towarzyszące tej technice, skłoniły autora niniejszej pracy do rozważań nad możliwością wykorzystania metod analogowych w dynamice budowli. Za wykorzystaniem tej techniki przemawiał fakt, że sam proces fizyczny drgań ma zawsze charakter ciągły, będący funkcją czasu, natomiast zasady działania maszyny cyfrowej mają wyraźnie charakter dyskretny. Dlatego też analiza ciągłego procesu drgań przy pomocy metod dyskretnych jest bardzo trudna, a niejednokrotnie wręcz niemożliwa i ogranicza się do uzyskania amplitud poszukiwanych wielkości. Sama interpretacja wyników cyfrowych jest bardziej złożona i pracochłonna niż bezpośrednio dostępnych wyników analogowych, będących rezultatem symulacji procesu drgań.

1.1. Analogie elektromechaniczne

Metody analogii służą do oceny badanych zjawisk na podstawie porównania ich z innymi znanymi już zjawiskami i obejmują zagadnienia podobieństwa różnych układów fizycznych, chemicznych i biologicznych.

Do głównych zalet tych metod należą: przejrzystość, pogładowość oraz redukcja nakładu pracy obliczeniowej. Zgodność opisu matematycznego drgań liniowych układów mechanicznych z opisem matematycznym odpowiednich zjawisk w obwodach liniowych elektrycznych, tworzy podstawę do metod analogii elektromechanicznej.

Podobieństwo to było już znane w początkach elektrotechniki, a pierwsze wzmianki o analogii elektromechanicznej ogłoszono na początku bieżącego stulecia.

Podstawowe wiadomości encyklopedyczne z zakresu analogii w zjawiskach dynamicznych podaje H.F. Olson [26].

Na możliwości wykorzystania analogii elektromechanicznej w analizie dynamicznej mostów zwrócił uwagę również J.A. Głomb [6]. Wykorzystując analogię elektromechaniczną T. Szamin w pracach [22] i [23] podał sposób obliczeń osiowo obciążonych fundamentów pod maszyny. Na istnienie analogii elektromechanicznej i możliwości jej wykorzystania w analizie układów dynamicznych zwrócił uwagę m.in. S. Kaliski [9].

Ze względu na elektryczne środki obliczeniowe modelowanie jest możliwe przy zastosowaniu układów prostych analogii lub maszyn analogowych. Układem prostych analogii nazywamy taki układ analogowy, w którym elementy tworzące układ nie pobierają dodatkowej energii zasilającej, a energią sterującą układy jest energia sygnału wielkości obliczeniowych. Natomiast maszyna analogowa jest urządzeniem liczącym, w którym do wykonywania operacji obliczeniowych należy dostarczyć dodatkową energię elektryczną.

Rozdział 2, 3 i 4 niniejszej pracy zawiera analizę możliwości wykorzystania analogii elektromechanicznej do budowy modeli elektrycznych symulujących drgania mechaniczne w układzie prostych analogii.

Analizując drgania układów prętowych o wielu stopniach swobody przy wykorzystaniu analogii elektromechanicznej, dochodzi się do wniosku, że można zastąpić skomplikowane obliczenia pomiarem odpowiedniej wielkości na elektrycznym modelu rozpatrywanego układu. Można również łatwo zmieniać parametry obwodu, co pozwala zbadać zachowanie się rozpatrywanego układu prętowego przy różnych sztywnościach, współczynnikach tłumienia oraz masach i siłach wymuszających.

Można również nie posługując się metodami pomiarowymi wykorzystać do obliczeń metody obliczania elektrycznych obwodów sprzężonych.

Zagadnieniu temu poświęcony jest rozdział 5, który zawiera również program na emc pozwalający na pełną automatyzację obliczeń.

W rozdziale 6 podano sposób posługiwania się maszynami analogowymi, do rozwiązywania równań różniczkowych ruchu układów prętowych o wielu stopniach swobody. Załączono również fragmenty otrzymanych wyników w graficznej formie.

W rozdziale 7 przeanalizowano proces ustalania się drgań wymuszonych. Wskazano na możliwości wykorzystania maszyn analogowych i cyfrowych do znalezienia postaci drgań w stanie nieustalonym.

W rozdziale 8 podano wnioski końcowe i konkretne wskazówki dotyczące postępowania w praktyce posługiwania się analogią elektromechaniczną dla analizy układów dyskretnych poddanych wpływom dynamicznym.

1.2. Wykaz stosowanych symboli i oznaczeń

Założone postacie wzorów w niniejszej pracy, ze względu na występujące w nich symbole układów mechanicznych i obwodów elektrycznych, wymagają stosowania złożonego układu wskaźników. Zagadnienie to, w celu uniknięcia niejasności podczas czytania pracy wymaga wcześniejszego omówienia.

Ogólnie przyjęto następujące założenia:

- wielkości mechaniczne oznaczono literami małymi, wielkości elektryczne natomiast literami dużymi,
- macierze oznaczone są w pracy tłustym drukiem,
- wskaźniki umieszczone są zawsze na dole symbolu.

Oznaczenia mechaniczne

m - masa skupiona

k - sztywność układu mechanicznego,

c - siła oporu odpowiadająca jednostce prędkości,

x - przemieszczenie układu,

- \bar{y} - przemieszczenie układu we współrzędnych transformowanych,
- $p(t)$ - siła działająca na układ,
- $\bar{s} = cx$ - siła oporu,
- e_k - energia kinetyczna układu mechanicznego,
- e_p - energia potencjalna układu mechanicznego,
- f - funkcja dyssypacji,
- v - prędkość,
- b_{ik} - współczynniki bezwładności układu,
- r_{ik} - współczynniki sztywności układu,
- c_{ik} - współczynniki tłumienia układu,
- d_{ik} - współczynniki sztywności występujące w równaniu Lagrange'a,
- a_i - amplitudy przemieszczeń,
- Δ - logarytmiczny dekrement tłumienia,
- \tilde{c} - współczynnik tłumienia,
- α - częstotliwość drgań własnych,
- ω - częstotliwość drgań wymuszonych,
- c_z - zastępcza siła oporu (impedancja mechaniczna),
- T - okres drgań,
- η_n, η_t - stałe materiałowe tłumienia normalnego i stycznego,
- δ_{ik} - uogólnione pomieszczenia jednostkowe,
- ϕ - przesunięcie fazowe,
- t - czas rzeczywisty.

Oznaczenia elektryczne

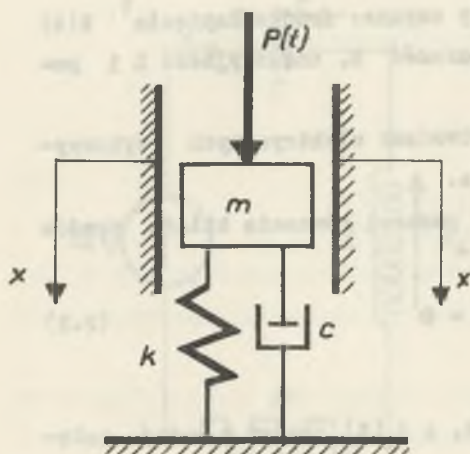
- $E(t) = SEM$ - źródło napięcia,
- $J(t) = SPM$ - źródło prądu,
- R - oporność,
- L - indukcyjność,
- C - pojemność,
- E_R, E_C i E_L - spadki napięć na oporności, pojemności i indukcyjności,
- J_R, J_C i J_L - prądy płynące przez oporność pojemność i indukcyjność,

- Q - ładunek na kondensatorze,
 Ψ - strumień magnetyczny,
 $G = \frac{1}{R}$ - odwrotność oporności (przewodność),
 $S = \frac{1}{C}$ - odwrotność pojemności (elastancja),
 $\Gamma = \frac{1}{L}$ - odwrotność indukcyjności,
 V_2, T_1 - energia pola magnetycznego zgromadzona w indukcyjności,
 V_1, T_2 - energia pola elektrycznego zgromadzona w pojemności,
 P_1 - funkcja dyssypacji (rozproszenie mocy chwilowej na oporności),
 R_z - oporność zastępcza (impedancja),
 G_z - przewodność zastępcza (admitancja),
 N - współczynnik podobieństwa,
 W - wskaźnik podobieństwa,
 D, H - obwody równoległe R, L, C i $J(t)$.
 β - kąt przesunięcia prądu względem napięcia,
 τ - czas w skali modelu elektrycznego (maszynowy).

2. ANALOGIE ELEKTROMECHANICZNE DRGAŃ UKŁADÓW LINIOWYCH O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

2.1. Drgania układu mechanicznego

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody przedstawiony na rysunku 2.1.



Rys. 2.1

gdzie przyjęto:

- $p(t)$ - siła zewnętrzna działająca na układ,
- k - sztywność sprężyny,
- c - siła oporu odpowiadająca jednostce prędkości (współczynnik tłumienia lepkiego).

Jako współrzędną uogólnioną przyjmijmy przemieszczenie x masy m , która będziemy mierzyć od położenia równowagi statycznej układu, przy czym dodatni zwrot przemieszczenia x przyjmujemy zgodnie z rys. 2.1.

Znane równania drgań układu można podać w postaci:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (2.1)$$

W równaniu (2.1) przyjęto, że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości ruchu masy m

$$\bar{s} = c\dot{x}(t)$$

Ten typ sił oporu, nazywamy liniowym tłumieniem wiskotycznym (lepkim), a współczynnik c nazywa się współczynnikiem tłumienia lepkiego i ma wymiar $[kGs/cm]$.

Występujące nieliniowe siły oporu mogą być często zastąpione w obliczeniach liniowymi siłami za pomocą odpowiedniej linearyzacji, współczynnika tłumienia.

2.2. Drgania w obwodzie elektrycznym

Będziemy rozpatrywać układy o stałych skupionych, to znaczy takie, dla których wymiary obwodu są pomijalnie małe w stosunku do długości fali elektromagnetycznej.

W układach mogą występować elementy czynne: źródła napięcia¹⁾ $E(t)$ i prądu $J(t)$ oraz elementy bierne: oporność R , indukcyjność L i pojemność C .

Dla wyprowadzenia równań drgań w obwodach elektrycznych wykorzystywać będziemy znane prawa Kirchhoffa.

Pierwsze prawo Kirchhoffa ujmuje w postaci równania bilans prądów w węźle²⁾:

$$\sum_{k=1}^n J_k(t) = 0 \quad (2.2)$$

gdzie n jest liczba gałęzi³⁾ w węźle, a $J_k(t)$ prądem w k -tej gałęzi.

1) Źródło napięcia $E(t)$ w dalszej części pracy nazywać będziemy również siłą elektromotoryczną i oznaczać przez SEM .

2) Węzłem nazywamy punkt, w którym łączą się co najmniej trzy gałęzie.

3) Gałęzią nazywamy taki odcinek obwodu, w którym prąd zachowuje stałą wartość.

Drugie prawo Kirchhoffa ujmuje w postaci równania bilans napięć dla oczka¹⁾ obwodu:

$$\sum_{k=1}^l \Delta E_k(t) = \sum_{i=1}^n E_i(t) \quad (2.3)$$

gdzie l oznacza liczbę gałęzi biernych rozpatrywanego oczka, n liczbę źródeł napięcia, $\Delta E_k(t)$ spadek napięcia na k -tej gałęzi, $E_i(t)$ napięcie i -tego źródła.

Rozpatrywany obwód elektryczny pokazano na rysunku 2.2. Składa się on z indukcyjności L , pojemności C , oporności R i źródła napięcia $E(t)$, wszystkie te elementy połączone są szeregowo.

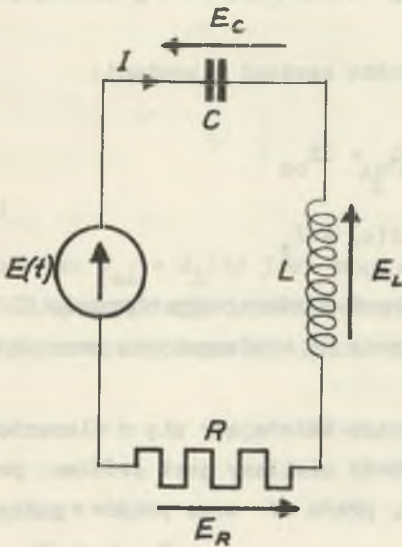
Dodatknie kierunki prądu J i napięć E_C , E_L i E_R pokazano na rys. 2.2.

Stosując drugie prawo Kirchhoffa (2.3) otrzymamy

$$E_L + E_R + E_C = E(t) \quad (2.4)$$

Związki pomiędzy prądem w obwodzie, a napięciami na elementach obwodu mają postać:

$$\begin{aligned} E_L &= L \dot{J} \\ E_R &= R J \\ E_C &= \frac{1}{C} \int_0^t J dt + E_{oc} \end{aligned} \quad (2.5)$$



Rys. 2.2

gdzie $E_{oc} = E_C(0)$ jest wartością napięcia na kondensatorze w chwili $t = 0$.

¹⁾ Oczkiem nazywamy najprostszy obwód zamknięty w układzie sieci.

Przyjmując dalsze związki między napięciem E_C i ładunkiem Q na kondensatorze o pojemności C otrzymamy:

$$Q = CE_C = \int_0^t J \, dt + Q_0 \quad (2.6)$$

$$\dot{Q} = J$$

gdzie $Q_0 = CE_{0c}$.

Wprowadzając związki (2.5) i (2.6) do równania (2.4) otrzymamy:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (2.7)$$

Równanie to opisuje drgania elektryczne w rozpatrywanym obwodzie, przy czym, aby uzyskać jego rozwiązanie jednoznaczne, musimy znać dwa warunki początkowe.

Uwzględniając (2.6) warunki te można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 = CE_{0c} \\ \dot{Q}(0) &= J(0) = J_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

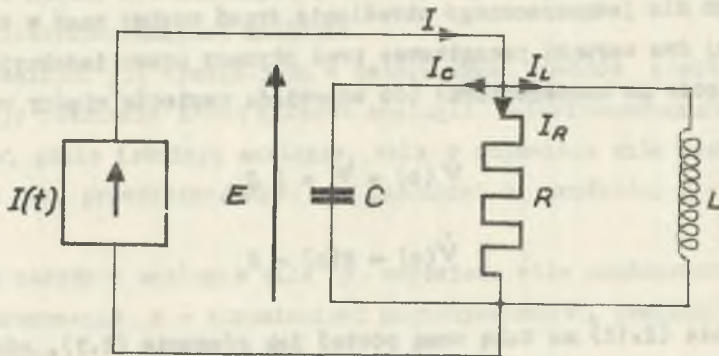
Wynika stąd, że dla określenia drgań w szeregowym obwodzie RLC musimy znać w chwili początkowej napięcie na kondensatorze oraz prąd płynący przez cewkę.

Rozpatrzmy z kolei obwód elektryczny składający się z elementów RLC połączonych równolegle, przy czym obwód zasilany jest źródłem prądu¹⁾ $J(t)$. Dodatkowo kierunki napięcia E , prądu J oraz prądów w gałęziach J_C , J_R i J_L podano na rys. 2.3.

Stosując pierwsze prawo Kirchhoffa (2.2) otrzymamy

$$J_C + J_R + J_L = J(t) \quad (2.9)$$

¹⁾ Źródło prądu $J(t)$ w dalszej części pracy nazywać będziemy również siłą prądomotoryczną, a oznaczać przez SPM.



Rys. 2.3

Związki pomiędzy prądami i napięciami w obwodzie mają postać:

$$\begin{aligned}
 J_C &= C \dot{E} \\
 J_R &= \frac{1}{R} E(t) \\
 J_L &= \frac{1}{L} \int_0^t E dt + J_{oL}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdzie: $J_{oL} = J_L(0)$ jest prądem płynącym przez cewkę w chwili $t = 0$.

Wykorzystując zależność między prądem J_L , a skojarzonym strumieniem magnetycznym Ψ cewki o indukcyjności L otrzymamy

$$\Psi = L J_L = \int_0^t E dt + \Psi_0 \tag{2.11}$$

gdzie

$$\Psi_0 = J_{oL} L$$

Wprowadzając związki (2.10) i (2.11) do równania (2.9) po prostych przekształceniach otrzymamy

$$C \ddot{\Psi} + \frac{1}{R} \dot{\Psi} + \frac{1}{L} \Psi = J(t) \tag{2.12}$$

Równanie to opisuje drgania elektryczne w równoległym obwodzie RIC, przy czym dla jednoznacznego określenia drgań musimy znać w chwili początkowej dwa warunki początkowe: prąd płynący przez indukcyjność oraz napięcie na kondensatorze (co odpowiada napięciu między węzłami).

$$\begin{aligned}\Psi(0) &= \Psi_0 = L J_{0L} \\ \dot{\Psi}(0) &= E(0) = E_0\end{aligned}\tag{2.13}$$

Równanie (2.12) ma taką samą postać jak równanie (2.7), różni się natomiast od niego sensem fizycznym; równanie (2.12) przedstawia równowagę prądów w węźle, równanie (2.7) natomiast warunek równowagi napięć w obwodzie.

Za pomocą jedynie formalnej zamiany:

$$\begin{array}{ll} Q \longleftrightarrow \Psi & L \longleftrightarrow C \\ E \longleftrightarrow J & C \longleftrightarrow L \\ J \longleftrightarrow E & R \longleftrightarrow \frac{1}{R} = G\end{array}\tag{2.14}$$

możemy przekształcić równanie (2.12) na równanie (2.7) oraz warunki początkowe (2.8) na (2.13).

Ta cecha charakterystyczna pozwalająca na przekształcenia równań (2.12) i (2.7) nosi nazwę zasady dualizmu, a obwody pokazane na rysunku 2.2 i 2.3 nazywają się obwodami dualnymi.

Rozpatrując obwody dualne możemy wyznaczyć rozwiązanie tylko dla jednego z nich, a następnie stosując zamianę wg relacji (2.14) napisać bezpośrednio rozwiązanie dla drugiego obwodu.

2.3. Elektryczne odpowiedniości analogowe drgań układu mechanicznego

Łatwo zauważyć, że równanie (2.1) opisujące drgania układu mechanicznego ma taką samą postać jak równanie (2.7) i (2.12) opisujące drgania elektryczne w układach RIC.

Istnieje więc pełna równoważność matematycznego opisu drgań mechanicznych i drgań w obwodach elektrycznych. Tożsamość ta pozwala ustalić analogie między mechanicznymi i elektrycznymi zjawiskami drgań - tak zwane elektromechaniczne analogie.

Zasada dualizmu [3] występująca w teorii drgań obwodów elektrycznych powoduje istnienie dwóch układów analogii elektromechanicznych. W pierwszym, gdzie istnieją analogie, siła p odpowiada sile elektromotorycznej SEM, przemieszczenie x - ładunkowi Q , prędkości v - prąd J itd.

W drugim układzie analogii siła p odpowiada sile prądomotorycznej SPM, przemieszczenie x - strumieniowi magnetycznemu Ψ , prędkość v - napięciu E itd.

Porównując równania (2.1) z równaniami (2.7) i (2.12) zestawiono tabelicę 2.1, która podaje odpowiedniości pomiędzy parametrami układu liniowego mechanicznego a parametrami obwodów elektrycznych dla obu dualnych układów analogii.

Wykorzystując odpowiedniości analogowe elektromechaniczne można rozszerzyć je na zależności energetyczne, zachodzące w układach drgających mechanicznych i elektrycznych. I tak, energii kinetycznej układu mechanicznego

$$e_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

odpowiadają w pierwszym i drugim układzie analogii wyrażenia:

$$T_1 = \frac{1}{2} L J^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} C E^2 = \frac{1}{2} C \dot{\Psi}^2$$

Dla energii potencjalnej układu mechanicznego

$$e_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Tablica 2.1

Oznaczenia	Układ mechaniczny		Układ elektryczny	
	2		3	
Parametry układu	1		4	
	System analogii I	System analogii II		
Parametry układu	stale	Masa m Szywność k Współczynnik tłumienia c	Indukcyjność L Odwrotność pojemności $S = \frac{1}{C}$ Oporność	Pojemność C Odwrotność indukcyjn. $\Gamma = \frac{1}{L}$ Odwrotność oporności $G = \frac{1}{R}$
	zmienne	Przemieszczenie x Prędkość v Siła	Ładunek Q Prąd J Źródło napięcia..... E	Strumień magnetyczny Ψ Napięcia E Źródło prądu
Energia	Energia kinetyczna $e_k = \sum \frac{1}{2} m v^2$ Energia potencjalna $e_p = \sum \frac{1}{2} kx^2$	Energia pola magnetycznego $T_1 = \sum \frac{1}{2} L J^2$ Energia pola elektrycznego $V_1 = \sum \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$	Energia pola magnetycznego $T_2 = \sum \frac{1}{2} CE^2$ Energia pola magnetycznego $V_2 = \sum \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L}$	
Rozpraszanie energii	Funkcja dyspacji $f = \sum \frac{1}{2} cv^2$	Moc chwilowa rozpraszana na oporności $F_1 = \sum \frac{1}{2} RJ^2$	Moc chwilowa rozpraszana na oporności $F_2 = \sum \frac{1}{2} GE^2$	

odpowiadają w pierwszym i w drugim układzie analogii wyrażenia:

$$V_1 = \frac{1}{2C} Q^2$$

$$V_2 = \frac{1}{2L} \Psi^2$$

Funkcji dysypacji

$$r = \frac{1}{2} cv^2 = \frac{1}{2} c\dot{x}^2$$

odpowiadają w pierwszym i drugim układzie wyrażenia:

$$F_1 = \frac{1}{2} R J^2 = \frac{1}{2} R \dot{Q}^2$$

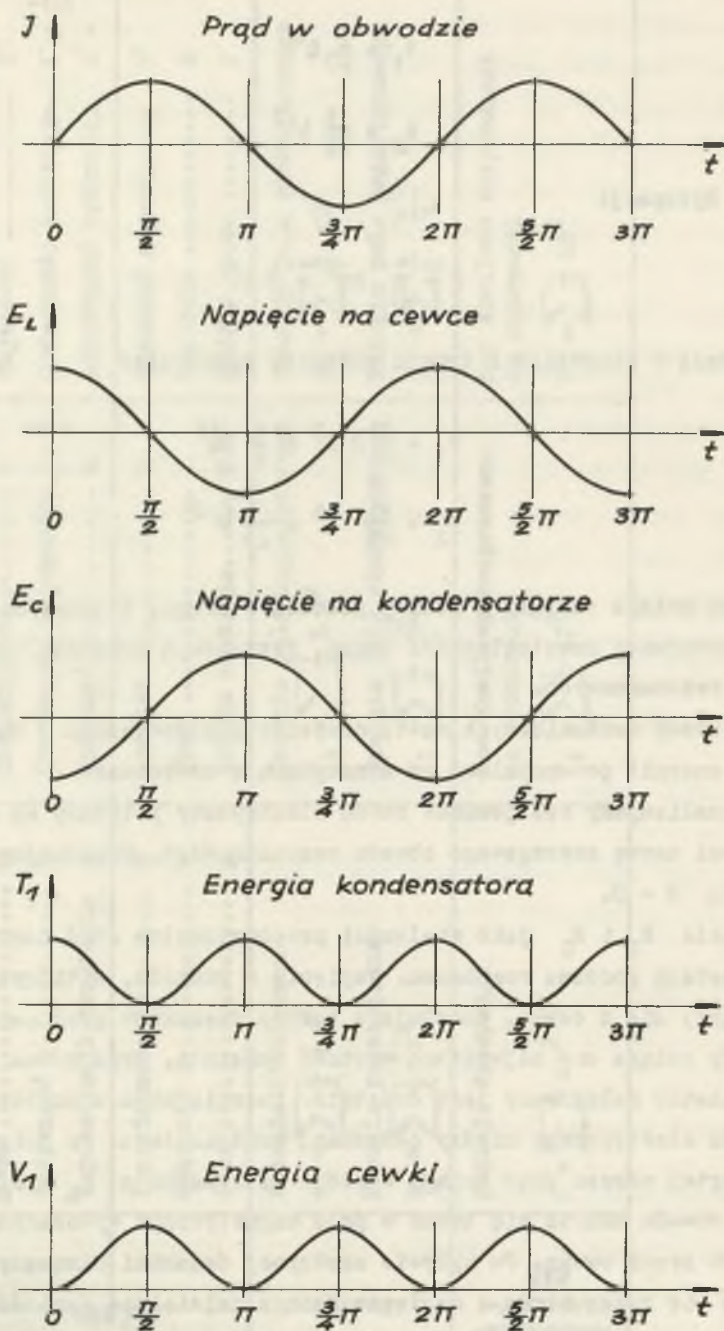
$$F_2 = \frac{1}{2R} \dot{\Psi}^2 = \frac{1}{2R} \dot{\Psi}^2$$

Ciągła zmiana energii z jednej postaci w drugą, z częstotliwością równą podwojonej częstotliwości drgań, jest cechą wspólną wszystkich układów rezonansowych.

W układach mechanicznych ma to oczywiście odpowiednik w ciągłej zmianie energii potencjalnej na kinetyczną i odwrotnie.

Przeanalizujemy raz jeszcze obwód elektryczny pokazany na rys.2.2, który nosi nazwę szeregowego obwodu rezonansowego. Przyjmijmy założenie, że $R = 0$.

Napięcie E_L i E_C jako wielkości proporcjonalne do J bardzo silnie wzrastają podczas rezonansu. Napięcie w punkcie, w którym kondensator łączy się z cewką, oscyluje w bardzo szerokich granicach. W chwili, kiedy osiąga ono największą wartość dodatnią, prąd równa się zeru, a kondensator naładowany jest dodatnio. Energia obwodu skupia się wtedy w polu elektrycznym między okładkami kondensatora. Po upływie jednej czwartej okresu prąd osiąga wartość maksymalną a $E_L = E_C = 0$. Energia obwodu skupia się teraz w polu magnetycznym wywołanym przepływem prądu przez cewkę. Po upływie następnej ówsiartki okresu prąd znów staje się równy zeru, a napięcie osiąga największą wartość ujemną; energia obwodu skupia się znów tylko na kondensatorze.


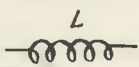
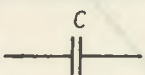


Rys. 2.4

Po upływie kolejnej ćwiartki okresu napięcie staje się równe zero, a prąd płynący w przeciwną stronę osiąga wartość maksymalną; energia obwodu zawarta jest w polu magnetycznym cewki. Tak więc energia ciągle przepływa z cewki do kondensatora i na odwrót. Częstość tego przepływu równa się podwójnej częstości prądu. Opisany proces ilustruje rys. 2.4.

Odpowiedniości między parametrami podane w tabelicy 2.1 stanowią podstawę elektrycznego modelowania drgań układów mechanicznych. Przy czym modele można budować wg pierwszego lub drugiego układu analogii. W tabelicy 2.2 zestawiono związki pomiędzy prądami a napięciami, w którym występują elementy bierne RIC.

Tabela 2.2

Elementy obwodu	Oznaczenie	Napięcie na elementach obwodu	Prąd płynący przez elementy obwodu
Oporność		$E_R = RJ = R\dot{Q}$	$J_R = \frac{1}{R} E + \frac{1}{R} \dot{\Psi}$
Indukcyjność		$E_L = L\dot{J} = I\ddot{Q}$	$J_L = \frac{1}{L} \int_0^t E dt + J_{oL} = \frac{1}{L} \Psi + J_{oL}$
Pojemność		$E_C = \frac{1}{C} \int_0^t J dt + E_{oC} = \frac{1}{C} Q + E_{oC}$	$J_C = C\dot{E} = C\ddot{\Psi}$

W przypadku rozpatrywania analogii elektromechanicznych dla drgań skrętnych, tok rozumowania oraz odpowiedniości dla układów analogowych pozostają bez zmian, natomiast zamiast siły musimy wprowadzić moment siły, zamiast przemieszczeń liniowych - kąty obrotu, zamiast masy, masowy moment bezwładności, zamiast współczynnika sztywności, sztywność skrętną, oraz zamiast współczynnika tłumienia drgań liniowych współczynnik tłumienia drgań skrętnych.

Analogia pomiędzy drganiami w układach mechanicznych i elektrycznych zachodzi szczególnie wyraziście w przypadku rezonansu. Prześledźmy to dla przypadku analizy obwodów elektrycznych prądu sinusoidalnego.

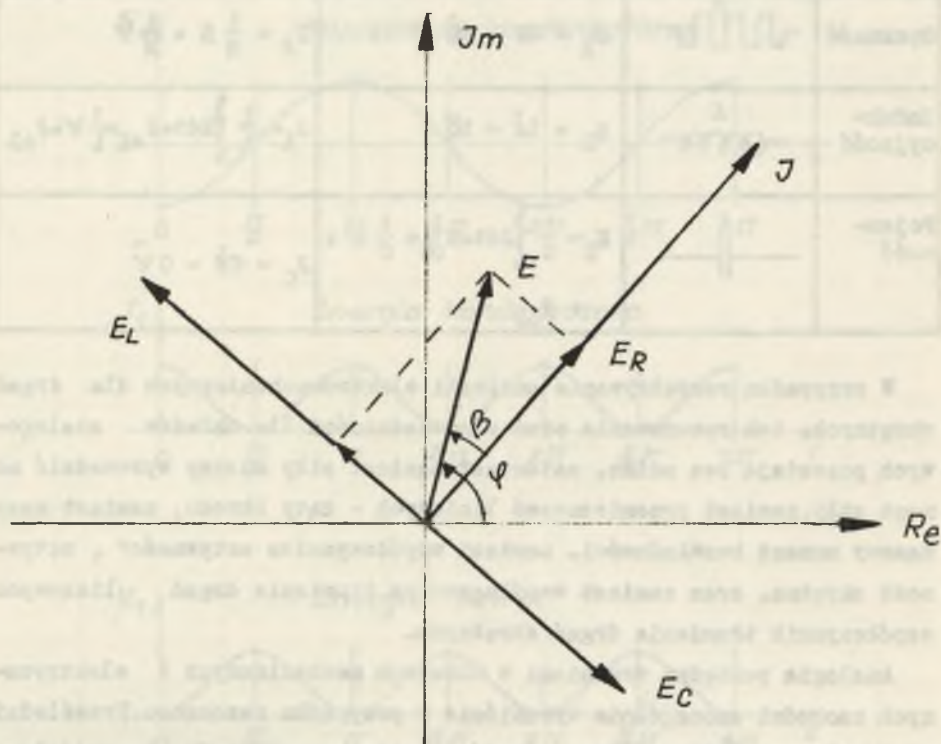
W elektrotechnice analiza obwodów prądu sinusoidalnego (stan ustalony) odbywa się metodą symboliczną.

Zamiast wykresów czasowych wprowadza się badania wektorów na płaszczyźnie zespolonej. Opis metody można znaleźć w pracach poświęconych elektrotechnice np. [7].

Dla zaznajomienia z podstawowymi pojęciami metody symbolicznej przeanalizujemy obwody szeregowy i równoległy RLC przedstawione na rys. 2.2 i 2.3.

Jeżeli założymy dla obwodu szeregowego (rys. 2.2), że siła elektromotoryczna $E(t)$ jest określona wzorem $E(t) = E_0 \sin(\omega t + \psi)$ to impedancja będzie określona wzorem

$$R_z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} \quad (2.15)$$



Rys. 2.5

Natomiast związki pomiędzy napięciami na oporności, cewce indukcyjnej, kondensatorze oraz prądem J pokazano na rys. 2.5¹⁾ przedstawiającym trójkąt napięć.

Prąd jest przesunięty względem napięcia o kąt β dany wzorem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2.16)$$

Amplituda prądu zatem równa się

$$J = \frac{E}{R_z} = \frac{E}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}} \quad (2.17)$$

W przypadku braku oporności w obwodzie ($R=0$), dla $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ wielkość prądu wzrasta do nieskończoności, mówimy wtedy o rezonansie napięciowym w obwodzie szeregowym.

Wyniki dla obwodu równoległego (rys. 2.3) są podobne do wyników dla obwodu szeregowego. Można je otrzymać wprost korzystając z zasady dualizmu.

Wzór (2.15) określający impedancję przechodzi we wzór (2.18) określający admitancję

$$G_z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{1}{R^2}} \quad (2.18)$$

We wzorze tym wszystkie grupy wyrazów stanowią odwrotność odpowiednich wyrazów ze wzoru (2.17).

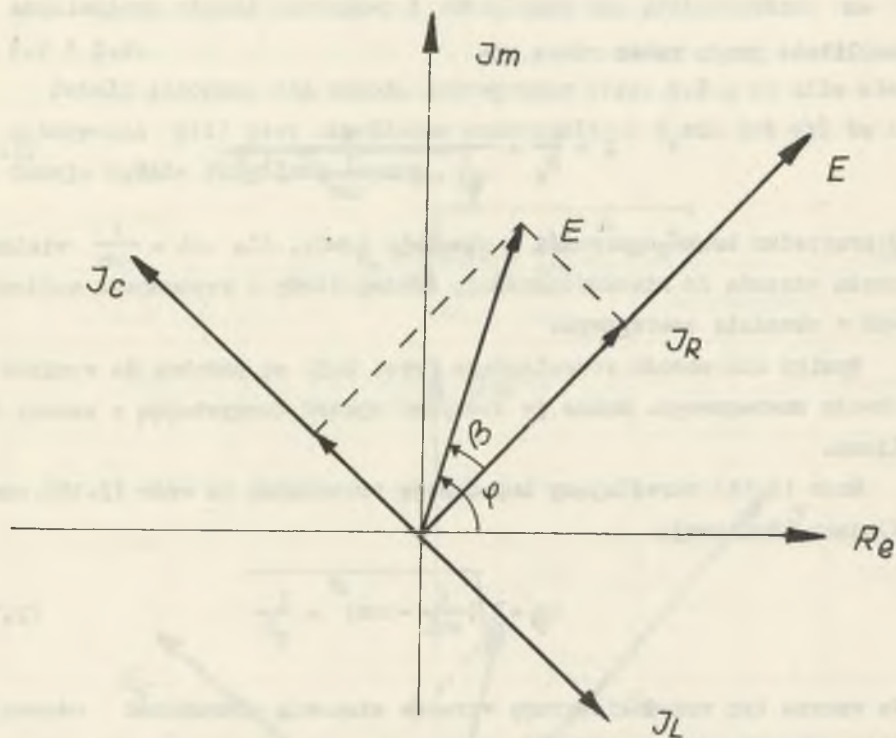
Amplituda napięcia dana jest przez wzór

$$E = \frac{J}{G_z} = \frac{J}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{1}{R^2}}} \quad (2.19)$$

¹⁾ Na rys. 2.5 i 2.6 oznaczono: J_n - oś urojona, J_r - oś rzeczywista

W przypadku braku oporności w obwodzie ($R=0$), dla $\omega c = \frac{1}{\omega L}$ wielkość napięcia wzrasta do nieskończoności, mówimy wtedy o rezonansie prądowym w obwodzie równoległym.

Natomiast związki pomiędzy prądami oraz napięciem $E(t)$ pokazano na rysunku 2.6 - trójkąt prądów.



Rys. 2.6

Napięcie jest przesunięte w fazie względem prądu o kąt β dany przez wzór:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega c - \frac{1}{\omega L}}{G} \quad (2.20)$$

Dla układów mechanicznych w przypadku wymuszeń wywołanych siłą harmoniczną $p = p_0 \sin(\omega t + \phi)$ układ drga z prędkością $v = v_0 \sin \omega t$, mechaniczna impedancja, która odpowiada prawu Ohma, dla układów mechanicznych przybiera postać

$$c_z = \frac{p_0}{v_0} = \sqrt{\left(\omega m - \frac{1}{\omega k}\right)^2 + c^2} \quad (2.21)$$

Wykorzystując analogie elektromechaniczne. T. Szamin w pracach [22] i [23] podał sposób obliczania metodą analogii elektrycznej obciążonych osiowo blokowych fundamentów pod maszyny. Autor przytoczył podstawy wykorzystania tej metody podając przykłady posługiwania się nią w szczególnych (obciążenie osiowe) przypadkach obliczeń fundamentów blokowych obciążonych siłami harmonicznie zmiennymi. Niedostateczne przyjęcie się wśród projektantów omawianej metody tłumaczyć można brakiem znajomości podstaw analogii elektromechanicznej w stopniu pozwalającym na wykorzystanie podobieństwa zapisu matematycznego, jak również niedostępnością maszyn analogowych pozwalających na modelowanie układów elektrycznych jako odpowiedników układów mechanicznych.

3. ANALOGIE ELEKTROMECHANICZNE DRGAŃ UKŁADÓW LINIOWYCH O SKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY

3.1. Metody konstrukcji równań drgań układów pretowych dyskretnych

Rozpatrywać będziemy tzw. drgania małe, to znaczy takie, gdzie maksymalne wychylenia punktów układu z położenia równowagi są na tyle małe, że ruch układu można opisać liniowymi równaniami różniczkowymi.

Drgania odbywają się dookoła położenia równowagi statycznej, a układ mechaniczny ma n stopni swobody, gdzie $1 < n < \infty$.

Metody konstrukcji równań liniowych układów mechanicznych opisane są szczegółowo w wielu pracach np. [1] i [2].

W niniejszym rozdziale zajmiemy się budową równań ruchu korzystając z trzech znanych w mechanice budowli metod a mianowicie:

- metody opartej na równaniu Lagrange'a drugiego rodzaju,
- metody sił,
- metody przenieszczeń.

Wykorzystując równania Lagrange'a drugiego rodzaju, ruch układu o n stopniach swobody wyrazi się w postaci:

$$\sum_{k=1}^n b_{ik} \ddot{x}_k + \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{x}_k + \sum_{k=1}^n d_{ik} x_k = q_i(t) \quad (3.1)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Występujące we wzorze współczynniki bezwładności układu b_{ik} obliczyć można ze wzoru na energię kinetyczną:

$$e_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$$

Natomiast współczynniki sztywności d_{ik} , obliczyć można ze wzoru na energię potencjalną:

$$e_p = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n d_{ik} x_i x_k$$

Stałe $c_{ik} = c_{ki}$ są współczynnikami tłumienia.

Przyjmowanie współczynników c_{ik} wymaga pewnego wyjaśnienia.

Najczęściej używaną miarą tłumienia, stosowaną w praktyce projektowej, jest logarytmiczny dekrement tłumienia.

$$\Delta = \frac{1}{n} \ln \frac{a_1}{a_n}$$

gdzie

a_1, a_n - amplitudy, początkowa i końcowa odcinka wibrogramu, zawierającego n pełnych cykli drgań.

Logarytmiczny dekrement tłumienia określony jest najczęściej na drodze analizy wykresów drgań - wibrogramów uzyskiwanych w toku badań dynamicznych istniejących obiektów. W analizie drgań ustrojów o jednym stopniu swobody powszechnie używaną miarą tłumienia jest również współczynnik tłumienia ζ . Obie miary łączą zależność

$$\Delta = \zeta T$$

gdzie

T - okres drgań.

Przyjmując założenie, że siły oporu proporcjonalne są do pierwszej potęgi prędkości odkształcenia otrzymamy znane równanie (2.1)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Oznaczając:

$$\zeta = \frac{c}{2m} - \text{współczynnik tłumienia}$$

Układ posiadający początkowe wychylenie x_0 i początkową prędkość $\dot{x}_0 = 0$ przyjmuje ogólnie znane rozwiązanie:

$$x = x_0 e^{-\zeta t} \left(\cos \alpha t + \frac{\zeta}{\alpha} \sin \alpha t \right)$$

gdzie

α - częstotliwość drgań własnych tłumionych,

$T = \frac{2\pi}{\alpha}$ - okres drgań własnych,

$\Delta = \zeta T$ - logarytmiczny dekrement tłumienia.

Zmienność amplitud określona jest funkcją

$$x_n = x_0 e^{-\zeta T n}$$

gdzie: n - liczba pełnych obrotów.

W równaniu (3.1) występuje współczynnik tłumienia lepkiego c o wymiarze $[T \text{ s/m}]$.

W dostępnej literaturze brak jest informacji na temat badań dotyczących wielkości tego współczynnika. Często zakłada się [9], że dla układów o wielu stopniach swobody wielkości współczynnika są proporcjonalne do wielkości mas.

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{c_2}{m_2} = \dots = \frac{c_n}{m_n}$$

W rozwiązanych w niniejszej pracy przykładach posłużymy się również powyższym założeniem.

Założymy również, że:

$$c_1 = 10,0 \left[\frac{T \cdot s}{m} \right]$$

Odpowiada to tłumieniu układu o jednym stopniu swobody, dla którego:

$$\Delta = 0,25; T = 1,0 \text{ s}; m = 20,0 \text{ t (masa układu)}.$$

W. Gawroński i J. Kuszewski w pracy [5] wprowadzając podział układu rzeczywistego ciągłego na sztywne elementy skończone, połączone między sobą elementami sprężystymi i elementami tłumiącymi o charakterystykach liniowych. Autorzy wyprowadzili w oparciu o teorię sprężystości, przy założeniu modelu reologicznego Kelvina - Voigta, wzory na współczynniki sprężystości i tłumienia¹⁾. Przy czym w wyniku badań dla stali otrzymali następujące stałe materiałowe tłumienia normalnego i stycznego przy ściskaniu

$$\eta_n = 100 \text{ kGs/cm}^2$$

$$\eta_t = 50 \text{ kGs/cm}^2$$

W przypadku obliczania drgań konstrukcji stalowych można posłużyć się tymi współczynnikami.

W przypadku ogólnym w równaniu (3.1) występują wszystkie współrzędne uogólnione x_k oraz ich pierwsze i drugie pochodne.

Rozpatrzmy z kolei budowę równań ruchu wyprowadzonych przy wykorzystaniu metody sił.

Metoda sił polega, jak wiadomo, na wyrażeniu niezależnych uogólnionych przemieszczeń mas układu przez wszystkie siły działające na układ i odpowiednie współczynniki wpływu.

¹⁾ W przypadku rozciągania zależności między naprężeniem i odkształceniem jednostkowym mają postać

$$\sigma(t) = E \epsilon(t) + \eta_n \dot{\epsilon}(t)$$

Zajmijmy się układem o n stopniach swobody, którego ruch opisany jest za pomocą n współrzędnych uogólnionych x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, z których każda przedstawia niezależnie od pozostałych przemieszczenia (lub kąty obrotu) jednej z mas układu.

Współczynnik δ_{ik} jest równy uogólnionemu przemieszczeniu x_i wywołanemu działaniem uogólnionej siły równej jedności przyłożonej w punkcie k , na kierunku x_i .

Przy przyjęciu, jak w rozdziale drugim, sił oporu działających na masy układu, przemieszczenia uogólnione poszczególnych mas można przedstawić w następującej formie:

$$x_i = \sum_{k=1}^n (-m_k \ddot{x}_k - c_k \dot{x}_k) \delta_{ik} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta_{ik} \quad (3.2)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$.

Przez $p_k(t)$ oznaczono siły zewnętrzne działające na masy układu.

Równanie (3.2) przedstawić można w następującej formie

$$x_i + \sum_{k=1}^n (m_k \ddot{x}_k + c_k \dot{x}_k) \delta_{ik} = \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta_{ik} \quad (3.3)$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, n$.

Stosując z kolei metodę przemieszczeń wyrażamy uogólnione siły działające na poszczególne punkty układu poprzez uogólnione przemieszczenia wszystkich punktów, do których przyłożone są siły oraz współczynniki sztywności r_{ik} . Współczynnik r_{ik} jest równy uogólnionej sile, którą należy przyłożyć w kierunku uogólnionego przemieszczenia x_i , aby utrzymać układ w równowadze, gdy przemieszczenie $x_k = 1$, a pozostałe przemieszczenia uogólnione $x_i = 0$ dla $i \neq k$ oraz $i = 1, 2, \dots, n$.

Przy przyjęciu, jak w metodzie sił, wielkości sił oporu oraz sił wymuszających warunki równowagi uogólnionych sił można przedstawić w formie:

$$-m_i \ddot{x}_i - c_i \dot{x}_i + p_i(t) = \sum_{k=1}^n r_{ik} x_k \quad (3.4)$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, n$.

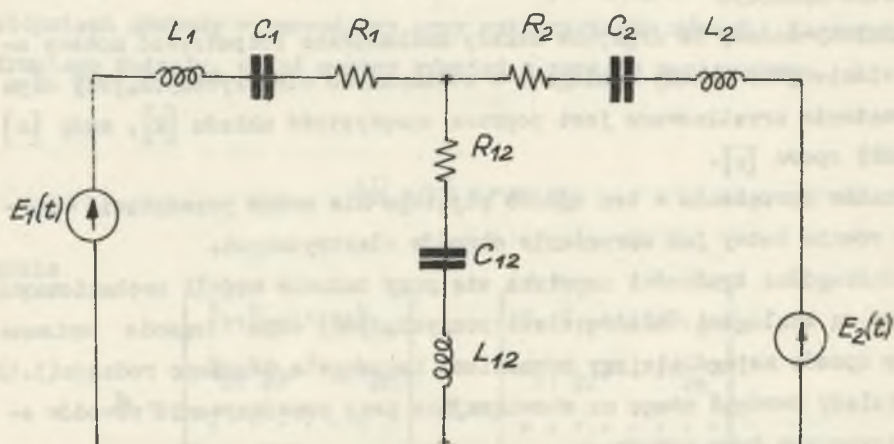
Równanie (3.4) można zapisać inaczej

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + \sum_{k=1}^n r_{1k} x_k = p_1(t) \quad (3.5)$$

3.2. Drgania w liniowych sprzężonych obwodach elektrycznych

Obwody elektryczne wpływają na siebie wzajemnie, jeżeli mają np. jedną gałąź wspólną - mówimy wówczas, że są one ze sobą sprzężone poprzez tę gałąź. W najogólniejszym przypadku wspólna gałąź może zawierać indukcyjność L , oporność R i pojemność C .

Na rys. 3.1 pokazano najogólniejszy sposób sprzężenia dwóch elektrycznych obwodów drgających, przy pomocy wspólnej gałęzi zawierającej elementy skupione L_{12} , R_{12} i C_{12} .



Rys. 3.1

Wykorzystując drugie prawo Kirchhoffa (2.3) otrzymujemy następujące równania różniczkowe dla rozpatrywanego obwodu:

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{q_1 + q_2}{C_{12}} + R_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + L_{12}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = E_1(t)$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 + \frac{q_1 + q_2}{C_{12}} + R_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + L_{12}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = E_2(t)$$

Po uporządkowaniu będzie:

$$(L_1 + L_{12}) \ddot{q}_1 + (R_1 + R_{12}) \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{12}}\right) q_1 + L_{12} \ddot{q}_2 + R_{12} \dot{q}_2 + \frac{1}{C_{12}} q_2 = E_1(t)$$

$$L_{12} \ddot{q}_1 + R_{12} \dot{q}_1 + \frac{1}{C_{12}} q_1 + (L_2 + L_{12}) \ddot{q}_2 + (R_2 + R_{12}) \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{12}}\right) q_2 = E_2(t)$$

W dalszej części niniejszej pracy rozszerzymy zapis (3.6) na n obwodów szeregowych i równoległych RIC sprzężonych ze sobą w specjalnie dobrane sposoby.

Należy dodać, że drgające układy mechaniczne rozpatrywać możemy oczywiście jako układy analogowe w stosunku do elektrycznych, przy czym sprzężenie zrealizowane jest poprzez sprężystość układu [k], masy [m] i siły oporu [c].

Jednakże sprzężenia w ten sposób pojętego nie można przedstawić w sposób równie łatwy jak sprzężenie obwodów elektrycznych.

Szczególne trudności napotyka się przy budowie modeli mechanicznych, które są analogami układów elektrycznych, przy czym drgania opisane są w sposób najogólniejszy równaniami Lagrange'a drugiego rodzaju (3.1).

Należy zwrócić uwagę na obowiązujące przy rozwiązywaniu obwodów elektrycznych trzy zasady:

- zasada superpozycji: ze względu na liniowość przedstawionych układów równań można sumować wpływ poszczególnych sił elektromotorycznych $E(t)$ i prądomotorycznych $J(t)$,
- zasada wzajemności: w omawianych układach można zamieniać miejscami wskaźniki w wielkościach charakteryzujących sprzężenie dwóch członów np. $L_{ik} = L_{ki}$ (jeżeli siła elektromotoryczna $E(t)$ zaczepona w

gałęzi i-k wywoła w gałęzi n-r prąd $J(t)$, to taka sama siła elektromotoryczna $E(t)$ wpięta w gałąź n-r wywoła taki sam prąd ($J(t)$ w gałęzi i-k),

- zasada wyodrębnienia: można wyodrębnić (odciąć) dowolną część sieci od reszty pod warunkiem, że do poszczególnych par punktów przecięcia dołączymy bezoporowe siły elektromotoryczne równe napięciu, jakie istniały między tymi punktami przed przecięciem.

Oczywiście, wszystkie te trzy zasady mają swoje analogie w mechanice w twierdzeniach o superpozycji wpływów wzajemności przemieszczeń i metodzie przekrojów.

3.3. Analogie oparte na równaniach Lagrange'a drugiego rodzaju

Podany we wzorze (3.1) układ równań opisujących ruch układu o n stopniach swobody wyprowadzony przy wykorzystaniu równań Lagrange'a drugiego rodzaju, podać możemy również w zapisie macierzowym:

(3.7)

$$b\ddot{x} + c\dot{x} + rx = q$$

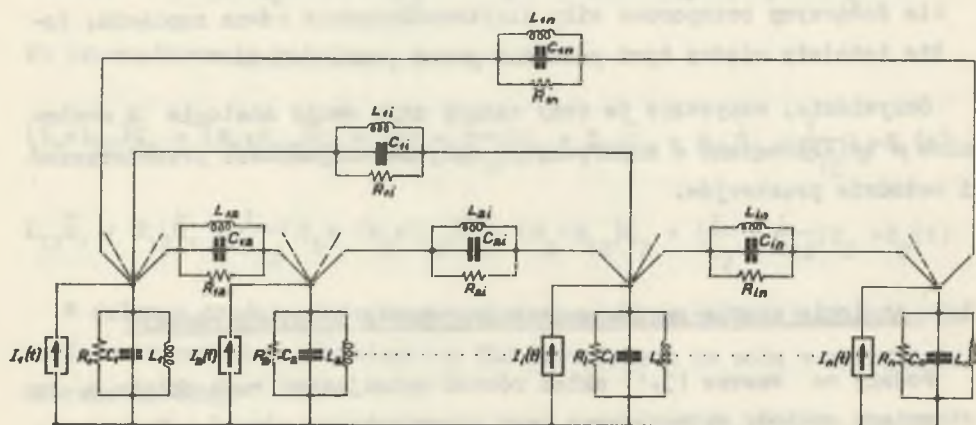
gdzie

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

Rozpatrzmy pokazany na rys. 3.2 schemat układu elektrycznego, który zawiera n obwodów R_{1i}, L_{1i}, C_{1i} , sprzężonych ze sobą wzajemnie poprzez szeregowe obwody L_{in}, C_{in}, R_{in} (podwójne indeksy wprowadzono ze względu na formalne uproszczenie w układaniu równań).

Liczba elementów sprzężonych równa jest: $\frac{n(n-1)}{2}$.



Rys. 3.2.

Wykorzystując pierwsze prawo Kirchhoffa równania prądów dla obwodów $1, 2 \dots i \dots n$ przy założeniu że:

$$\frac{d}{dt} \psi_k = E_k$$

otrzymamy:

$$C_{11} \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_{11}} \dot{\psi}_1 + \frac{1}{L_{11}} \psi_1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n C_{1k} (\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{R_{1k}} (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_k) + \\ + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{L_{1k}} (\psi_1 + \psi_k) = J_1$$

$$\begin{aligned}
& C_{22} \ddot{\psi}_2 + \frac{1}{R_{22}} \dot{\psi}_2 + \frac{1}{L_{22}} \psi_2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n C_{2k} (\ddot{\psi}_2 + \ddot{\psi}_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n \frac{1}{R_{2k}} (\dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_k) + \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n \frac{1}{L_{2k}} (\psi_2 + \psi_k) = J_2
\end{aligned}
\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& C_{nn} \ddot{\psi}_n + \frac{1}{R_{nn}} \dot{\psi}_n + \frac{1}{L_{nn}} \psi_n + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n C_{nk} (\ddot{\psi}_n + \ddot{\psi}_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n \frac{1}{R_{nk}} (\dot{\psi}_n + \dot{\psi}_k) + \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n \frac{1}{L_{nk}} (\psi_n + \psi_k) = J_n
\end{aligned}$$

Równanie (3.8) można napisać w postaci

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n C_{1k} \ddot{\psi}_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{1k}} \dot{\psi}_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n C_{1k} \ddot{\psi}_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{R_{1k}} \dot{\psi}_k + \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_k = J_1 \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}
\tag{3.9}$$

W zapisie macierzowym równanie (3.9) przybierze postać

$$\mathbf{C} \ddot{\Psi} + \mathbf{G} \dot{\Psi} + \mathbf{\Gamma} \Psi = \mathbf{J}
\tag{3.10}$$

gdzie:

$$C = \begin{bmatrix} \sum_k C_{1k} & C_{12}, \dots, C_{1n} \\ C_{21} & \sum_k C_{2k}, \dots, C_{2n} \\ \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2}, \dots, \sum_k C_{nk} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \sum_k \frac{1}{R_{1k}} & \frac{1}{R_{12}}, \dots, \frac{1}{R_{1n}} \\ \frac{1}{R_{21}} & \sum_k \frac{1}{R_{2k}}, \dots, \frac{1}{R_{2n}} \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{R_{n1}} & \frac{1}{R_{n2}}, \dots, \sum_k \frac{1}{R_{nk}} \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \sum_k \frac{1}{L_{1k}} & \frac{1}{L_{12}}, \dots, \frac{1}{L_{1n}} \\ \frac{1}{L_{21}} & \sum_k \frac{1}{L_{2k}}, \dots, \frac{1}{L_{2n}} \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{L_{n1}} & \frac{1}{L_{n2}}, \dots, \sum_k \frac{1}{L_{nk}} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} J_1(t) \\ J_2(t) \\ \vdots \\ J_n(t) \end{bmatrix}$$

W równaniu (3.10) macierze C, G, Γ są macierzami symetrycznymi, których elementy leżące poza przekątną główną a_{ik} ($i \neq k$) są odpowiednio pojemnościami, opornościami i indukcyjnościami sprzęgającymi.

Porównując równania macierzowe (3.7) i (3.10) widzimy wprost odpowiedności macierzy

$$b \leftrightarrow C, \quad c \leftrightarrow G, \quad r \leftrightarrow \Gamma, \quad q \leftrightarrow J, \quad x \leftrightarrow \Psi$$

Pomiędzy poszczególnymi elementami macierzy zachodzą odpowiedniości

$$\begin{aligned}
 b_{ik} &\stackrel{\wedge}{=} C_{ik} & b_{ii} &\stackrel{\wedge}{=} \sum_{k=1}^n C_{ik} \\
 c_{ik} &\stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{R_{ik}} & c_{ii} &\stackrel{\wedge}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_{ik}} \\
 r_{ik} &\stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{L_{ik}} & r_{ii} &\stackrel{\wedge}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{ik}}
 \end{aligned}$$

$$p_1(t) \stackrel{\wedge}{=} J_1(t)$$

Wykorzystując zasadę dualizmu w elektrotechnice można oczywiście podać równanie układu dualnego w stosunku do układu pokazanego na rys 3.2, który odpowiada I rodzajowi analogii. Tworzy go układ z szeregowo połączonych obwodów RIC i $E(t)$ sprzężonych ze sobą poprzez szeregowo gałęzie R_{ik} , C_{ik} , L_{ik} .

Wykorzystując drugie prawo Kirchhoffa, równanie napięć przy założeniu:

$$\frac{d}{dt} Q_k = J_k$$

będzie miało postać:

$$\begin{aligned}
 L_{ii} \ddot{Q}_i + R_{ii} \dot{Q}_i + \frac{1}{C_{ii}} Q_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{ik} (\ddot{Q}_i + \ddot{Q}_k) + \\
 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n R_{ik} (\dot{Q}_i + \dot{Q}_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{C_{ik}} (Q_i + Q_k) = E_i \\
 i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

lub inaczej:

$$\sum_{k=1}^n L_{ik} \ddot{Q}_i + \sum_{k=1}^n R_{ik} \dot{Q}_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{ik}} Q_i + \sum_{k=1}^n L_{ik} \ddot{Q}_k +$$

(3.12)

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n R_{ik} \dot{Q}_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{C_{ik}} Q_k = E_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

W zapisie macierzowym równanie (3.12) przyjmie postać:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + SQ = E \quad (3.13)$$

gdzie:

$$L = \begin{bmatrix} \sum_k L_{1k} & L_{12}, \dots, L_{1n} \\ L_{21} & \sum_k L_{2k}, \dots, L_{2n} \\ \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2}, \dots, \sum_k L_{nk} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \sum_k R_{1k} & R_{2k}, \dots, R_{1n} \\ R_{21} & \sum_k R_{2k}, \dots, R_{2n} \\ \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2}, \dots, \sum_k R_{nk} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \sum_k \frac{1}{C_{1k}} & \frac{1}{C_{12}}, \dots, \frac{1}{C_{1n}} \\ \frac{1}{C_{21}} & \sum_k \frac{1}{C_{2k}}, \dots, \frac{1}{C_{2n}} \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{C_{n1}} & \frac{1}{C_{n2}}, \dots, \sum_k \frac{1}{C_{nk}} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ \vdots \\ E_n(t) \end{bmatrix}$$

W równaniu (3.13) macierze L, R, S są macierzami symetrycznymi.
 Porównując równania (3.7) i (3.13) stwierdzamy odpowiedniość macierzy

$$b \longleftrightarrow L, \quad c \longleftrightarrow R, \quad r \longleftrightarrow S, \quad x \longleftrightarrow Q, \quad q \longleftrightarrow E$$

Pomiędzy poszczególnymi wyrazami macierzy zachodzą odpowiedniości

$$b_{ik} \hat{=} L_{ik}$$

$$b_{ii} \hat{=} \sum_{k=1}^n L_{ik}$$

$$c_{ik} \hat{=} R_{ik}$$

$$c_{ii} \hat{=} \sum_{k=1}^n R_{ik}$$

$$r_{ik} \hat{=} \frac{1}{C_{ik}}$$

$$r_{ii} \hat{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{ik}}$$

$$p_i(t) \hat{=} E_i(t)$$

3.4. Analogie oparte na metodzie przemieszczeń

Łatwo zauważyć, że najprostszy zapis w sensie matematycznym posiada układ równań opisujący drgania, a wyprowadzony przy pomocy metody przemieszczeń. Zapis ten podaje wzór (3.4), który w zapisie macierzowym przybierze postać

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + rx = p \quad (3.14)$$

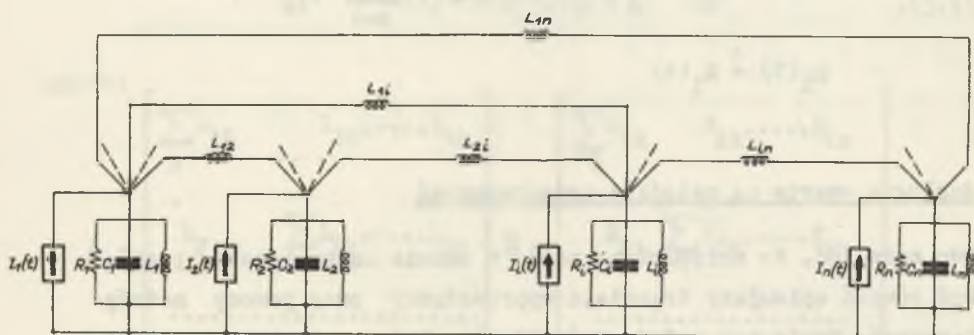
gdzie

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0, \dots, 0 \\ 0 & m_2, \dots, 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0, \dots, m_n \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & 0, \dots, 0 \\ 0 & c_2, \dots, 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0, \dots, c_n \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{bmatrix}$$

Porównując zapis (3.14) z zapisem (3.10) łatwo zauważyć, że stają się one identyczne w przypadku, kiedy macierze C i G z równania (3.10) stają się macierzami diagonalnymi, co prowadzi w sensie fizycznym do zmiany sprzężenia RLC w sprzężenie tylko indukcyjne L . W konsekwencji tego, układem elektrycznym modelującym drgania układu mechanicznego opisanego metodą przemieszczeń, jest układ pokazany na rys. 3.3.



Rys. 3.3

Wykorzystując pierwsze prawo Kirchhoffa równanie prądów dla i -tego węzła będzie miało postać:

$$C_{11} \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_1} \dot{\psi}_1 + \frac{1}{L_{11}} \psi_1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{L_{1k}} (\psi_1 + \psi_k) = J_1(t) \quad (3.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Równanie (3.15) inaczej zapisane:

$$C_{11} \ddot{\Psi}_1 + \frac{1}{R_{11}} \dot{\Psi}_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \Psi_k = J_1(t) \quad (3.16)$$

W zapisie macierzowym będzie:

$$C \ddot{\Psi} + G \dot{\Psi} + \Gamma \Psi = J \quad (3.17)$$

Macierze C, G, Γ takie same jak w równaniu (3.10), z tym, że macierze C i G są diagonalne, tj.:

$$C_{ik} = \begin{cases} +0 & i = k \\ -0 & i \neq k \end{cases}$$

$$G_{ik} = \begin{cases} +0 & i = k \\ -0 & i \neq k \end{cases}$$

Porównując zapisy (3.17) i (3.14) stwierdzamy odpowiedniość macierzy

$$\begin{array}{ccc} m \leftrightarrow C & c \leftrightarrow G & r \leftrightarrow \Gamma \\ x \leftrightarrow \Psi & p \leftrightarrow J & \end{array}$$

Pomiędzy poszczególnymi elementami macierzy zachodzą odpowiedniości:

$$\begin{array}{ll} a_{11} \hat{=} C_{11} & c_{11} \hat{=} \frac{1}{R_{11}} \\ r_{1k} \hat{=} \frac{1}{L_{1k}} & r_{11} \hat{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \\ x_1 \hat{=} \Psi_1 & p_1(t) \hat{=} J_1(t) \end{array}$$

Wykorzystując zasadę dualizmu można podać równanie obwodu dualnego dla obwodu pokazanego na rys. 3.3, który będzie odpowiadał pierwszemu układowi analogii

$$L_{ii} \ddot{Q}_i + R_{ii} \dot{Q}_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{ik}} Q_k + \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{1}{C_{ik}} Q_k = E_1(t) \quad (3.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

lub w formie macierzowej:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + SQ = E \quad (3.19)$$

W porównaniu z macierzami równania (3.13) macierze L i R są diagonalne.

I tu też można stwierdzić odpowiedniość między zapisami (3.14) i (3.19), tj:

$$\begin{array}{ccc} m \longleftrightarrow L & c \longleftrightarrow R & r \longleftrightarrow S \\ x \longleftrightarrow Q & p \longleftrightarrow E & \end{array}$$

3.5. Analogie oparte na metodzie sił

Wyprowadzone w rozdziale 3.1 w oparciu o metodę sił równanie różniczkowe (3.3) opisujące drgania liniowe układu mechanicznego przedstawić możemy w postaci macierzowej:

$$x + \delta (m\ddot{x} + c\dot{x}) = \delta p \quad (3.20)$$

w którym macierze x, m, c i p są identyczne jak w równaniu (3.14), natomiast macierz δ ma postać:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Podzielmy równanie (3.20) przez macierz δ i przekształćmy do postaci

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \delta^{-1}x = p \quad (3.21)$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (3.21) jest analogiczne z równaniem (3.14) a wszystkie związki wynikające z analogii elektromechanicznej wprowadzone w rozdziale 3.4 mają i tu zastosowanie, wystarczy wykonać podstawienie

$$r = \delta^{-1} \quad (3.22)$$

Oczywiście obowiązuje tu również zasada budowy układów dualnych.

4. WYKORZYSTANIE ANALOGII ELEKTROMECHANICZNEJ DO OBLICZANIA DRGAŃ

Bardzo często zamiast w sposób fizyczny budować układ elektryczny będący analogiem układu mechanicznego i dokonywać pomiarów interesujących nas wielkości, wystarczy w sposób niejako formalny zamienić układ mechaniczny na elektryczny, wykorzystać metody obliczeniowe stosowane do obliczenia obwodów elektrycznych i po obliczeniu wielkości elektrycznych zamienić je na poszukiwane wielkości mechaniczne.

Ogromne usługi oddaje tu wykorzystanie ETO, dzięki której nie tylko automatyzuje się sam proces obliczeniowy, ale również automatyzacji podlega formalna zamiana wielkości mechanicznych na elektryczne i na odwrót.

W przypadku obliczeń "ręcznych" konieczna jest znajomość metod obliczeń obwodów elektrycznych liniowych prądu przemiennego o stałych parametrach RLC. Metody te opisane są szeroko w wielu publikacjach specjalistycznych z tego zakresu np. w pracy G. Cholewickiego [3].

W sposób dostępny dla inżynierów nieelektryków zagadnienie to przedstawione zostało przez A. Lisowskiego i A. Siemieńca w pracy [14].

4.1. Dobieranie wartości elementów obwodów elektrycznych

Zasada modelowania za pomocą układów prostych analogii polega na odwzorowaniu tych samych równań za pomocą różnych układów elektrycznych, w których stosunkowo prosto można uzyskiwać przebiegi poszukiwanych zmiennych w zależności od różnych funkcji wejściowych i zmiany ich parametrów.

Warunkiem koniecznym podobieństwa dwóch różnych zjawisk (fizycznych, chemicznych, biologicznych lub innych) jest opisanie ich tymi samymi zależnościami matematycznymi. Jest to warunek konieczny, ale niewystarczający. Dlatego też, aby móc zamodelować np. układ mechaniczny przez obwód elektryczny (realny fizycznie) i dobrać odpowiednie wartości RLC i SEM czy SFM należy wykorzystać pozostałe teorematy teorii podobieństwa. Rozpatrzmy je w kolejności wg pracy L. Müllera [17].

Drgania układu mechanicznego wyprowadzone metodą przemieszczeń podaje zapis (3.14)¹⁾.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + rx = p$$

gdzie

m, c - macierze diagonalne o elementach zawsze dodatnich,

r - macierz symetryczna posiadająca zawsze dodatnie elementy na głównej przekątnej,

x, p - macierze kolumnowe.

Zapis ten można przedstawić w formie nieco przekształconej:

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i + r_{ii} x_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n r_{ik} x_k = p_i \quad (4.1)$$

gdzie; $i = 1, 2 \dots n$.

Jak wykazano w rozdziale trzecim przy wykorzystaniu pierwszego systemu analogii otrzymuje się równanie obwodu elektrycznego, analogowego do równania (3.14), dane zapisem (3.13)

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + SQ = E$$

1) Jak wykazano w rozdziale 3.5 do tego samego zapisu da się również sprowadzić równanie drgań wyprowadzone przy wykorzystaniu metody sił.

stosując zaś drugi rodzaj analogii elektrycznych otrzymujemy równanie:

$$C \Psi + G \Psi + \Gamma \Psi = J$$

gdzie

L, R, C, G - macierze diagonalne, przy czym jak wynika z warunków fizycznych elementy tych macierzy powinny być dodatnie,

S, Γ - macierze symetryczne o elementach dodatnich,

Q, Ψ, E, J - macierze kolumnowe.

Macierz S i Γ mają postać:

$$S = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{1k}} & & & \frac{1}{C_{12}}, \dots, \frac{1}{C_{1n}} \\ \frac{1}{C_{21}} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{2k}} & & \dots, \frac{1}{C_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{C_{n1}} & \frac{1}{C_{n2}}, \dots, & \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{nk}} & \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} & & & \frac{1}{L_{12}}, \dots, \frac{1}{L_{1n}} \\ \frac{1}{L_{21}} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{2k}} & & \dots, \frac{1}{L_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{L_{n1}} & \frac{1}{L_{n2}}, \dots, & \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{nk}} & \end{bmatrix}$$

Kryteria podobieństwa przeanalizujemy dla układu elektrycznego opisanego przez równanie (3.10), a więc dla drugiego rodzaju analogii; dla pierwszego tok rozumowania jest identyczny.

Zapis (3.10) możemy przedstawić w formie:

$$C_1 \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_1} \dot{\psi}_1 + \left(\frac{1}{L_{11}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \right) \psi_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_k = J_1 \quad (4.2)$$

gdzie: $i = 1, 2, \dots, n$.

Zadanie polega na takim doborze współczynników równania (4.2), aby model elektryczny układu mechanicznego był podobny do układu opisanego równaniem (4.1).

Skorzystamy w tym celu z dwóch podstawowych twierdzeń teorii podobieństwa.

- Twierdzenie pierwsze (Newtona):

Jeżeli zjawiska (układy) opisane równaniami różniczkowymi są podobne, to wielkości występujące w równaniach różniczkowych tworzą bezwymiarowe kombinacje, zwane kryteriami podobieństwa, a ich wartości liczbowe dla wszystkich zjawisk (układów) są takie same.

- Twierdzenie drugie (Federmana-Buckinghama):

Rozwiązanie równania różniczkowego daje się przedstawić w postaci funkcji kryteriów podobieństwa, określonych przy pomocy tego równania.

Warunki podobieństwa między układem mechanicznym a jego modelem elektrycznym będą spełnione w przypadku, gdy zależności wszystkich wzajemnych charakterystycznych wielkości są wyrażone za pomocą stałych współczynników podobieństwa N .

Zakładamy istnienie następujących zależności:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1}{x_1} &= N_x^1 & \frac{C_1}{m_1} &= N_m^1 \\ \frac{1}{R_1 c_1} &= N_c^1 & \frac{1}{L_{1k} r_{1k}} &= N_r^{1k} \\ \frac{J_1}{P_1} &= N_p^1 & \frac{\tau}{t} &= N_t^1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dla pierwszego rodzaju analogii (równanie 3.13) związki te są identyczne, z tym że w miejsce wielkości ψ , C_1 , R_1 , L_{1k} , J_1 występują odpowiednio Q_1 , L_1 , R_1 , C_{1k} , E_1 . Zależności (4.3) zachodzą dla $i, k = 1, 2, \dots, n$, a wstawiając je do równania (4.2) otrzymamy:

$$\frac{N_m^1 N_x^1}{(N_t^1)^2} m_1 \ddot{x}_1 + \frac{N_c^1 N_x^1}{N_t^1} c_1 \dot{x}_1 + N_x^1 (N_r^1 + \sum_{k=1}^n N_r^{1k} \frac{r_{1k}}{r_{11}}) r_{11} x_1 + \sum_{k=1}^n N_r^{1k} N_x^1 r_{1k} x_k = N_p^1 p_1 \quad (4.4)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Aby równania (4.1) i (4.4) były identyczne, muszą zachodzić związki równań bezwymiarowych określające kryteria analogii:

$$\frac{N_m^1 N_x^1}{(N_t^1)^2} = \frac{N_c^1 N_x^1}{N_t^1} = N_r^{1k} N_x^1 = N_p^1 \quad (4.5)$$

Układ równań (4.5) wygodniej jest doprowadzić do następującej postaci:¹⁾

$$\frac{N_c^1 N_x^1}{N_t^1} = \frac{N_m^1 N_x^1}{(N_t^1)^2} \quad \text{lub} \quad \frac{N_m^1}{N_c^1 N_t^1} = 1 \quad (4.6a)$$

$$\frac{N_c^1 N_x^1}{N_t^1} = N_r^{1k} N_x^1 \quad \text{lub} \quad \frac{N_c^1}{N_r^{1k} N_t^1} = 1 \quad (4.6b)$$

$$\frac{N_c^1 N_x^1}{N_t^1} = N_p^1 \quad \text{lub} \quad \frac{N_c^1 N_x^1}{N_p^1 N_t^1} = 1 \quad (4.6c)$$

¹⁾ Równania (4.6) są identyczne również dla pierwszego rodzaju analogii

Równanie (4.6b) zachodzi dla:

$$\frac{N_c^1}{(N_r^1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq c}}^n N_r^{ik} \frac{r_{ik}}{r_{ii}}) N_t^1} = 1 \quad \text{dla } k=1$$

$$\frac{N_c}{N_r^{ik} N_t^1} = 1 \quad \text{dla } k \neq i$$

Równanie (4.6), wyrażające zależności matematyczne współczynników podobieństwa, można przedstawić w postaci tzw. wskaźników podobieństwa w_i

$$w_1 = \frac{c_i t}{m_i} = \frac{\tau}{R_i C_i}$$

$$w_2 = \frac{r_{ik} t}{c_i} = \frac{R_i \tau}{L_{ik}} \quad \text{dla } k \neq i$$

$$w_2 = \frac{r_{ik} t}{c_i} = \frac{R_i \tau}{L_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n L_{ik}} \quad \text{dla } k=i$$

$$w_3 = \frac{p_i t}{c_i x_i} = \frac{J_i R_i \tau}{V_i}$$

Jeżeli założymy jednakową skalę czasu i amplitud w układzie mechanicznym i elektrycznym, co prowadzi do:

$$N_x^1 = \frac{V_i}{x_i} = 1$$

$$N_t^1 = \frac{\tau}{t} = 1$$

to ostatecznie wskaźniki podobieństwa przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{c_1}{m_1} = \frac{1}{R_1 C_1} \\
 w_2 &= \frac{r_{ik}}{c_1} = \frac{R_1}{L_{ik}} \quad \text{dla } k \neq 1 \\
 w_2 &= \frac{r_{ik}}{c_1} = \frac{R_1}{L_{11} + \sum_{k=1}^n L_{ik}} \quad \text{dla } k=1 \\
 w_3 &= \frac{p_1}{c_1} = J_1 R_1
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ponieważ układy opisane równaniami (3.10) i (3.13) są dualne, wobec czego dla pierwszego rodzaju analogii wskaźniki podobieństwa przyjmą postać:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{c_1^t}{m_1} = \frac{R_1^t}{L_1} \\
 w_2 &= \frac{r_{ik}^t}{c_1} = \frac{C_{ik}^t}{R_1} \quad \text{dla } k \neq 1 \\
 w_2 &= \frac{r_{ik}^t}{c_1} = \frac{\tau}{R_1 \left(\frac{1}{c_1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_{ik}} \right)} \quad \text{dla } k=1 \\
 w_3 &= \frac{p_1^t}{c_1 x_1} = \frac{E_1^t}{R_1^2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Analizując wskaźniki podobieństwa (4.10) widzimy, że mamy $3n$ równań, zaś niewiadomych parametrów jest

$$\left[4n + \frac{1}{2}n(n-1) \right]; \quad R_1, C_1, L_{1k}, J_1, \quad 1, k = 1, 2, \dots, n$$

Dodatkowo jeszcze dochodzą nieznanne skale czasu i amplitud:

$$\frac{\tau}{t} \text{ i } \frac{y}{x}$$

Wynika stąd, że zawsze można dobrać takie wielkości elektryczne, aby miały one sens fizyczny i pozwalały na zbudowanie modelu elektrycznego.

4.2. Budowa obwodów elektrycznych

Podany w części 4.1 niniejszej pracy sposób dobierania wartości elementów obwodów elektrycznych modelujących drgające układy prętowe przy wykorzystaniu teorii podobieństwa ważny jest dla wszystkich układów prętowych oraz ich modeli elektrycznych i ma charakter ogólny.

Często decydując się na przyjęcie konkretnych analogowych modeli elektrycznych możemy obliczyć parametry elektryczne modelujące układ mechaniczny drogą prostej analizy współczynników przy równaniach różniczkowych i odpowiedniego przekształcenia zapisu formalnego.

Rozważmy raz jeszcze równanie (3.14) opisujące drgania układu mechanicznego wyprowadzone metodą przemieszczeń:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + rx = p$$

Równanie (3.14) odpowiada równaniu obwodu elektrycznego (3.13) lub (3.10) w zależności, jaką postać analogii przyjmiemy.

Według pierwszego rodzaju analogii będzie:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + SQ = E$$

Według drugiego rodzaju analogii będzie:

$$C\ddot{\psi} + G\dot{\psi} + T\psi = J$$

Ze względu na zastosowanie metody Coltriego rozwiązywania obwodów elektrycznych wybrano do dalszych rozważań drugi rodzaj analogii, a więc równanie (3.10), w którym oznaczono:

ψ - wektor n wymiarowy, którego składowe oznaczają strumienie magnetyczne,

C - macierz diagonalna pojemności występujących w obwodach,

G - macierz diagonalna przewodności obwodów równoległych,

Γ - macierz symetryczna, odwrotności, indukcyjności,

J - wektor, którego składowe stanowią siły prądomotoryczne.

Schemat elektryczny tego równania pokazany jest na rys. 3.3. Rysunek ten przedstawia n obwodów równoległych R, L, C sprzężonych każdy z każdym poprzez indukcyjność.

Macierze m i C z równania (3.14) są jak już wspomniano macierzami diagonalnymi o elementach zawsze dodatnich, mają one swoje odpowiedniki analogowe w układach elektrycznych w macierzach C i G .

Nieco inaczej przedstawia się sprawa z odpowiednością pomiędzy macierzą r a macierzą Γ .

Macierz r , tzw. macierz sprzężeń, jest macierzą symetryczną, która może posiadać poza główną przekątną elementy zarówno dodatnie jak i ujemne. Problem sprowadza się więc do znalezienia takiego układu elektrycznego, w którym macierz sprzężeń Γ mogłaby mieć również elementy dodatnie jak i ujemne, analogiczne do elementów macierzy r . Jest jeszcze jeden warunek, który musi spełniać macierz Γ - wynika on wprost z zapisu (3.10) i dotyczy wielkości elementów leżących na głównej przekątnej.

Macierz Γ będąca odwrotnością indukcyjności musi więc spełniać następujące warunki wynikające z sensu fizycznego obwodów elektrycznych:

- warunek 1. Elementy leżące na głównej przekątnej muszą być większe lub równe sumie bezwzględnej wartości elementów leżących w tym samym wierszu:

$$r_{ii} \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (r_{ik}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

- warunek 2. Elementy leżące poza główną przekątną muszą mieć identyczną wartość i znak co odpowiadające im elementy macierzy Γ .

Macierz Γ występująca w równaniu (3.14) i będąca odpowiednikiem macierzy Γ w równaniu (3.10) na ogół nie spełnia warunków 1 i 2; jest jedynie macierzą symetryczną o dodatnich elementach na przekątnej głównej. Aby doprowadzić do równoznaczności równań mechanicznych i elektrycznych należy koniecznie uwzględnić te dwa warunki.

Warunek 1 można uzyskać dokonując transformacji równania (3.14).

Przyjmijmy:

$$x = A\bar{y}$$

gdzie

$A = (a_{1k})$ - jest macierzą diagonalną o dodatnich współczynnikach.

Otrzymamy:

$$mA\ddot{y} + cA\dot{y} + rA\bar{y} = p$$

Mnożąc lewostronnie przez macierz A otrzymamy:

$$AmA\ddot{y} + AcA\dot{y} + ArA\bar{y} = Ap$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\bar{m} = AmA = \begin{bmatrix} a_{1m_1}^2 & 0, \dots, 0 \\ 0 & a_{2m_2}^2, \dots, 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0, \dots, a_{nm_n}^2 \end{bmatrix} \quad \bar{c} = AcA = \begin{bmatrix} a_{1c_1}^2 & 0, \dots, 0 \\ 0 & a_{2c_2}^2, \dots, 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0, \dots, a_{nc_n}^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} a_1 p_1(t) \\ a_2 p_2(t) \\ \dots \\ a_n p_n(t) \end{bmatrix} \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} a_1^2 r_{11} & a_1 a_2 r_{12}, \dots, a_1 a_n r_{1n} \\ a_2 a_1 r_{21} & a_2^2 r_{22}, \dots, a_2 a_n r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n a_1 r_{n1} & a_n a_2 r_{n2}, \dots, a_n^2 r_{nn} \end{bmatrix}$$

Ponieważ macierz $r = (r_{ij})$ jest macierzą symetryczną, więc i macierz $\bar{r} = (\bar{r}_{ij})$ jest również macierzą symetryczną. Dobierając odpowiednio współczynniki a_1, a_2, \dots, a_n można tak przekształcić macierz r , aby był spełniony warunek 1.

Warunek 2 zostanie spełniony, jeśli potrafimy odpowiednio dobrać schemat elektryczny układów sprzężonych. Rozpatrzmy pokazane na rys. 3.3 obwody sprzężone. Obliczmy metodą potencjałów węzłowych Coltriego rozdział prądów w sieci elektrycznej. Dla węzła "1" będzie:

$$C_{11} \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_{11}} \dot{\psi}_1 + \frac{1}{L_{11}} \psi_1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{L_{1k}} (\psi_1 - \psi_k) = J_1$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymamy:

$$C_{11} \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_{11}} \dot{\psi}_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_k = J_1 \quad (4.12)$$

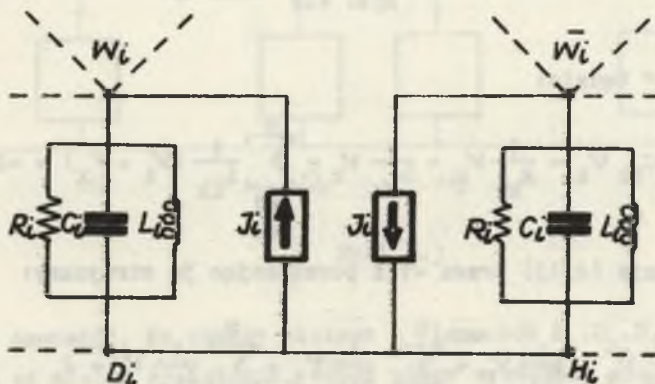
Założmy, że mamy sprzężone ze sobą trzy obwody, wobec czego $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$.

Macierz Γ przybiera postać:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{11}} + \frac{1}{L_{12}} + \frac{1}{L_{13}}, & -\frac{1}{L_{12}}, & -\frac{1}{L_{13}} \\ -\frac{1}{L_{21}}, & \frac{1}{L_{21}} + \frac{1}{L_{22}} + \frac{1}{L_{23}}, & -\frac{1}{L_{23}} \\ -\frac{1}{L_{31}}, & -\frac{1}{L_{32}}, & \frac{1}{L_{31}} + \frac{1}{L_{32}} + \frac{1}{L_{33}} \end{bmatrix}$$

Analiza zapisu (4.12) wykazuje, że dla zaproponowanego schematu sprzężeń wg rys. 3.3 macierz Γ będzie miała zawsze dodatnie elementy na głównej przekątnej, natomiast wszystkie pozostałe elementy macierzy będą zawsze ujemne.

Dla znalezienia pełnej analogii macierzy r i macierzy Γ zmodyfikujmy schemat elektryczny i do n obwodów sprzężonych indukcyjnościami wyprowadźmy dodatkowo n obwodów o elementach identycznych z elementami pierwszych obwodów lecz o sile prądomotorycznej skierowanej przeciwnie. Na rys. 4.1 pokazano parę dwóch identycznych obwodów. Przez odpowiednie sprzężenie tych obwodów "podwójnych" otrzymamy pełną analogię dwóch macierzy r i Γ .

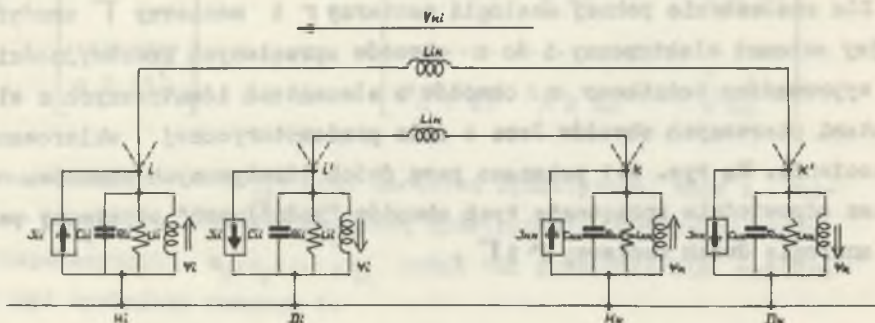


Rys. 4.1

Załóżmy np., że macierz r ma wszystkie elementy dodatnie. Odpowiednie sprzężenie układów pokazano na rys. 4.2¹⁾. Wykorzystując metodę Coltriago oraz oznaczając prąd płynący do węzła znakiem "-", a wypływający z węzła znakiem "+" dla węzła "1" otrzymamy:

$$C_{11} \ddot{\psi}_1 + \frac{1}{R_{11}} \dot{\psi}_1 + \frac{1}{L_{11}} \psi_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} (\psi_1 + \psi_k) = J_1 \quad (4.13)$$

¹⁾ Na rys. 4.2 i 4.3 przedstawione w sposób blokowy obwody równoległe RLC i J sprzężone indukcyjnościami.



Rys. 4.2

Dla węzła "k" będzie:

$$-C_{kk} \ddot{\psi}_k - \frac{1}{R_{kk}} \dot{\psi}_k - \frac{1}{L_{kk}} \psi_k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{L_{1k}} (\psi_1 + \psi_k) = -J_k \quad (4.13)$$

Mnożąc równanie (4.13) przez -1 i porządkując je otrzymamy:

$$C_{kk} \ddot{\psi}_k + \frac{1}{R_{kk}} \dot{\psi}_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^n \frac{1}{L_{1k}} \psi_k = J_k \quad (4.14)$$

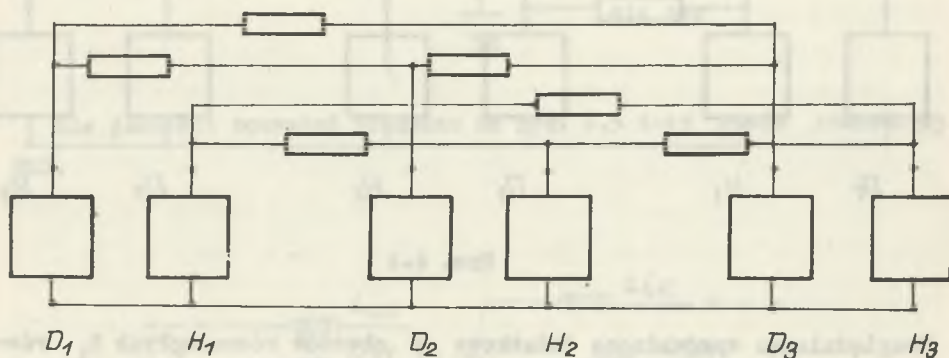
Widzimy, że dzięki połączeniu obwodu H_1 z obwodem D_k otrzymujemy dodatnie sprzężenie poprzez indukcyjność L_{1k} między obwodami. Odpowiada to dodatniemu znakowi przy elemencie δ_{1k}^+ w macierzy Γ .

Tak więc, połączenia pomiędzy poszczególnymi obwodami powinny być zgrupowane wg następującej reguły:

$$\bar{r}_{ik} = \begin{cases} < 0 & \text{obwód } D_1 \text{ z obwodem } D_k \\ & \text{obwód } H_1 \text{ z obwodem } H_k \\ > 0 & \text{obwód } D_1 \text{ z obwodem } H_k \\ & \text{obwód } H_1 \text{ z obwodem } D_k \end{cases}$$

Dla przykładu rozpatrzmy sposób połączeń par obwodów dla układu o trzech stopniach swobody w dwu przypadkach:

- Przypadek 1 - wszystkie \bar{F}_{ik} macierzy Γ są ujemne, tzn. $\bar{F}_{ik} < 0$ ($i, k = 1, 2, 3$)
 $i \neq k$
 (odpowiedni schemat elektryczny podano na rys. 4.3).



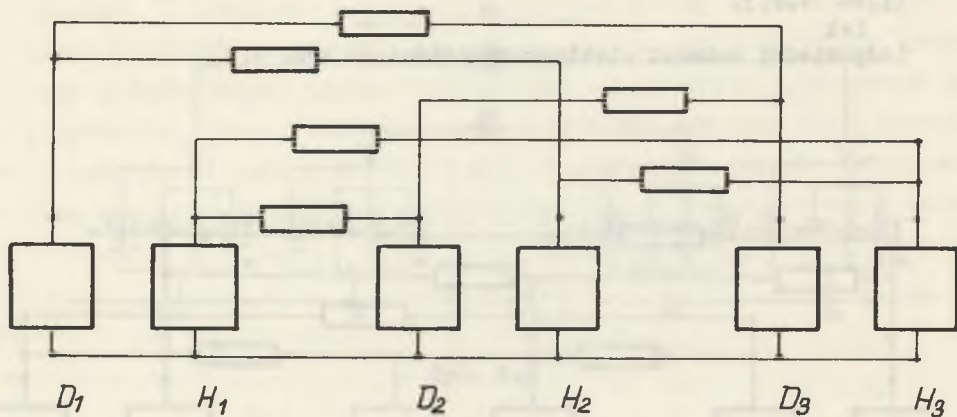
Rys. 4.3

Można zauważyć, że obwody złożone z elementów D_1, D_2, D_3 oraz H_1, H_2, H_3 są od siebie niezależne, wobec czego wystarczy analizować układ złożony wyłącznie z elementów D_1, D_2, D_3 lub H_1, H_2, H_3 .

- Przypadek 2 - jeden z elementów \bar{F}_{ik} dodatni, pozostałe ujemne, odpowiedni schemat elektryczny podano na rys. 4.4. Np. $r_{12} = r_{21} > 0$.
 W tym przypadku nie można zanalizować oddzielnie obwodów złożonych z D_1, D_2, D_3 i H_1, H_2, H_3 są one bowiem wzajemnie sprzężone.

Widzimy więc, że tylko w przypadku kiedy wszystkie \bar{F}_{ik} ($i \neq k$) są ujemne mamy do czynienia z n obwodami, w pozostałych przypadkach należy uwzględnić $2n$ obwodów równoległych.

Ogólnie należy rozpatrywać obwód elektryczny, który składa się z $(2n + 1)$ węzłów, $8n$ gałęzi głównych (wchodzących w skład obwodów D i H) i $n(n-1)$ gałęzi sprzężeń indukcyjnych.



Rys. 4.4

Uwzględniając wprowadzone dodatkowe n obwodów równoległych E_1 równania (4.12) i (3.10) przyjmą postać:

równanie mechaniczne:

$$\bar{m}_1 \ddot{y}_1 + \bar{c}_1 \dot{y}_1 + \bar{r}_{11} \bar{y}_1 + \bar{r}_{12} \bar{y}_2 + \dots + \bar{r}_{in} \bar{y}_n = p_1(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

równania elektryczne (wyłącznie dla węzłów w_1 obwodów D_i)

$$C_1 \ddot{y}_1 + G_1 \dot{y}_1 + \operatorname{sgn}(r_{11}) \delta_{11}^* y_1 + \operatorname{sgn}(r_{12}) \delta_{12}^* y_2 + \dots + \operatorname{sgn}(r_{in}) \delta_{in}^* y_n = J_1(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

gdzie

$$\delta_{ik}^* = \frac{1}{L_{ik}} \quad i \text{ jest odwrotnością indukcyjności.}$$

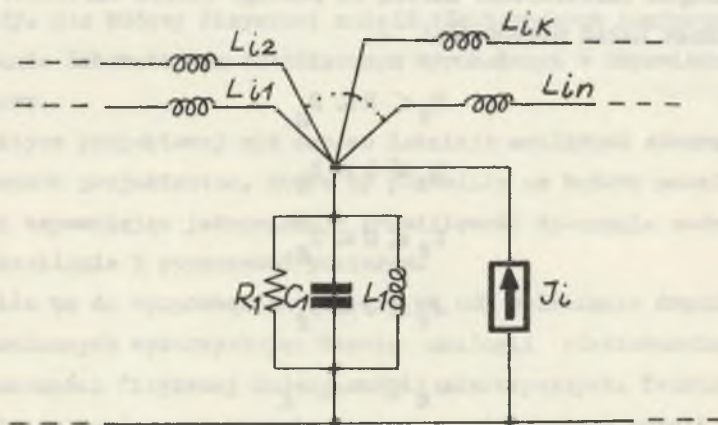
Dla węzłów w_1 obwodów H_1 równania są identyczne.

Biorąc pod uwagę równania (4.13) i (4.14) można przystąpić do określenia parametrów R, L, C oraz J obwodu elektrycznego modelującego układ mechaniczny wyrażony równaniem (3.14).

Zauważamy, że współczynniki δ_{ik}^* z równania (4.14) są odwrotnościami indukcyjności, tj.:

$$\delta_{ik}^* = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_{ik}} & \text{dla } i = k \\ \frac{1}{L_{ik}} & \text{dla } i \neq k \end{cases}$$

Dla jasności rozważań pokazano na rys. 4.5 i-ty obwód równoległy RLC.



Rys. 4.5

Należy rozpatrywać dwa warianty modelowania: cyfrowy i fizyczny.

Dla pierwszego przypadku, wprost porównując równania (4.13) i (4.14) określamy parametry elektryczne.

I tak¹⁾:

$$C_1 = \bar{m}_i$$

$$G_1 = \frac{1}{R_i} = \bar{c}_1$$

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{L_{ik}} = |\bar{r}_{ik}|$$

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{L_{ii}} = \sum_{k=1}^n |\bar{r}_{ik}|$$

$$J_1 = \bar{p}_i$$

Proces ten wykonujemy dla każdego ogniwa $i = 1, 2, \dots, n$.

W przypadku modelowania fizykalnego tok postępowania przy wyznaczaniu parametrów obwodu elektrycznego jest bardziej złożony ze względu na konieczność doboru "realnych" wielkości elementów RLC. Powoduje to konieczność skorzystania z teorii podobieństwa.

Trzeba rozwiązać układ równań (4.7), dla którego wartości elementów elektrycznych (nieznane) należą do pewnego zbioru wartości: jest on podany przez układ nierówności²⁾.

$$R_d \leq R \leq R_g$$

$$L_d \leq L \leq L_g$$

$$C_d \leq C \leq C_g$$

$$J_d \leq J \leq J_g$$

$$\omega_d \leq \omega \leq \omega_g$$

Należy również zaznaczyć, aby przy dobieraniu poszczególnych wartości R_1, L_1, C_1 starać się, by one możliwie mało różniły się między sobą. Uwarunkowane jest to dokładnością wyników.

1) Równość parametrów dotyczy ich wartości liczbowej.

2) Dla przykładu dysponujemy kondensatorami o pojemności $C_d = 10^{-12} F$, a $C_g = 10^{-6} F$.

5. PROGRAM I ALGORYTM NA EMC - ODRA 1204

5.1. Budowa i przeznaczenie programu

W poprzednich rozdziałach niniejszej pracy podano możliwości wykorzystania analogii elektromechanicznej do budowy obwodów elektrycznych modelujących drgania układów prętowych o skończonej liczbie stopni swobody. Dla budowy fizycznej modeli elektrycznych konieczne jest dysponowanie laboratorium elektrycznym wyposażonym w odpowiedni sprzęt i aparaturę.

W praktyce projektowej nie zawsze istnieje możliwość stworzenia takich warunków projektantom, które by pozwoliły na budowę modeli elektrycznych zapewniając jednocześnie prawidłowość wykonania modeli, stabilność zasilania i poprawność pomiarów.

Skłoniło to do opracowania programu na EMC obliczania drgań układów mechanicznych wykorzystując teorię analogii elektromechanicznej bez konieczności fizycznej budowy modeli elektrycznych. Teoria analogii elektromechanicznych pozwala bowiem, oprócz budowy modeli elektrycznych, na obliczenie układów mechanicznych zamienionych na obwo-
dy elektryczne. Kolejność postępowania jest następująca: zamiana układu mechanicznego na elektryczny, obliczenie układu elektrycznego, zamiana obliczonych wielkości elektrycznych na mechaniczne. Obliczanie układów mechanicznych z wykorzystaniem analogii elektromechanicznej posiada również tę zaletę, że w przeciwieństwie do budowy modeli fizycznych nie ma tu potrzeby odbierania skal wynikających z ograniczeń elementów RLC, którymi się dysponuje, zakresów przyrządów pomiarowych, skali czasu itp. Istnieje również możliwość automatyzacji całego pro-

cesu obliczeń łącznie z zamianą parametrów mechanicznych na elektryczne i na odwrot.

W niniejszym rozdziale podamy zasadę budowy algorytmu i opis programu na emc "Odra 1204" pozwalający na pełną automatyzację obliczeń.

Układ algorytmu i programu odpowiada ściśle wywodom z poprzednich rozdziałów.

Program służy do obliczania drgań wymuszonych układów prętowych o skończonej liczbie stopni swobody, uwzględniając tłumienie. Założono, że poszukuje się rozwiązania w stanie ustalonym przy harmonicznych siłach wymuszających.

Rozwiązanie równania różniczkowego (3.14) polega na znalezieniu zmiennych $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Wykorzystując teorię analogii elektromechanicznej, zadanie sprowadza się do obliczenia prądów dla każdego z i -tych obwodów pokazanych na rys. 3.3.

Pomiędzy wielkościami mechanicznymi i elektrycznymi zachodzą wprost odpowiedniości:

$$\begin{aligned} x_i &\hat{=} \frac{1}{\bar{r}_{ii}} J_{iL} \\ \dot{x}_i &\hat{=} \frac{1}{\bar{c}_{ii}} J_{iR} \\ \ddot{x}_i &\hat{=} \frac{1}{\bar{m}_i} J_{iC} \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie

$\bar{m}_i, \bar{c}_{ii}, \bar{r}_{ii}$ - odpowiednie elementy równania (4.13).

J_{iL}, J_{iR}, J_{iC} - prądy płynące w i -tym obwodzie przez indukcyjność o-porności i pojemność.

Oczywiście J_{iL}, J_{iR} i J_{iC} mają postać funkcji harmonicznych

$$A_i \sin(\omega_1 t + \phi_i)$$

Jeśli w układzie występuje 1 sił wymuszających o różnych częstotliwościach (odpowiada to w obwodzie elektrycznym 1 siłom prądomotorycznym SPM o różnych częstotliwościach), to poszukiwane wielkości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń obliczane są dla każdej częstotliwości z osobna i sumowane. Odpowiada to obliczeniu drgań w stanie ustalonym. Dla przemieszczeń będzie:

$$x_1 = \sum_{k=1}^1 A_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \quad (6.2)$$

Schemat ogólny programu przedstawiono na rys. 5.1.

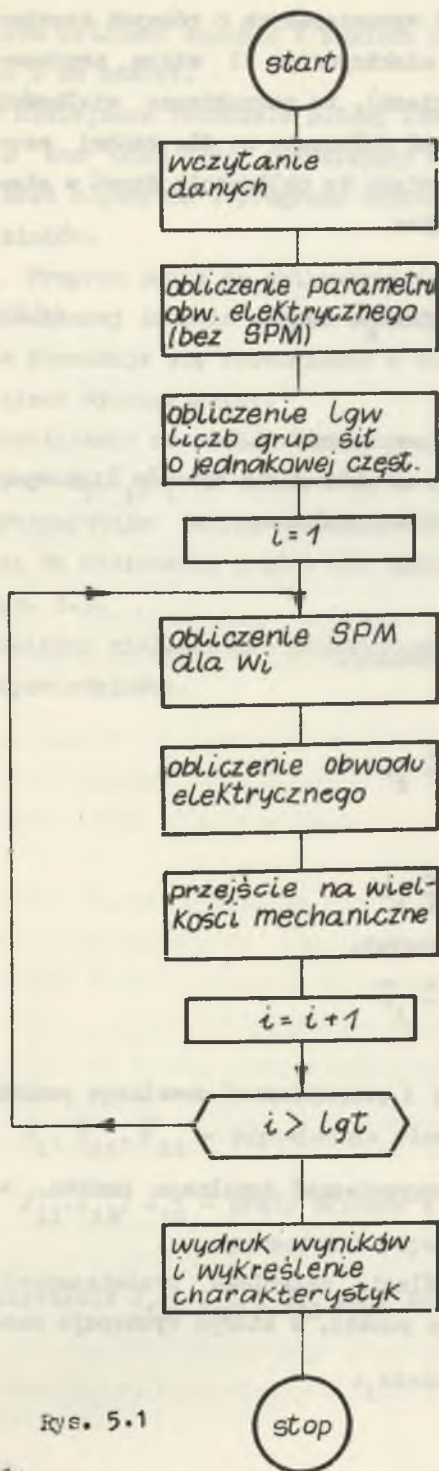
Podstawową jego część stanowi podprogram obliczania obwodów liniowych prądu elektrycznego przy pobudzeniu sinusoidalnym.

Wielkościami wejściowymi programu są:

1. Tytuł zadania.
2. Ilość skupionych mas (układów równań).
3. Parametry układu:
 - m - wielkości mas skupionych,
 - c - współczynniki tłumienia,
 - r - współczynniki sztywności.
4. Parametry sił wymuszających:
 - p - amplitudy sił wymuszających,
 - ω - częstotliwości sił wymuszających,
 - ϕ - fazy sił wymuszających.

Wielkościami wyjściowymi są:

1. Amplitudy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dowolnego punktu, w którym występuje masa skupiona.
2. Fazy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dowolnego punktu, w którym występuje masa skupiona.
3. Istnieje również możliwość wykreślenia przebiegu przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń dowolnego punktu, w którym występuje masa skupiona w funkcji czasu.



Rys. 5.1

Przebiegi te otrzymujemy na drukarce wierszowej. Program wykreśla wielkości mechaniczne i ustala automatycznie skalę amplitud, przemieszczeń oraz oś i skalę czasu.

Działanie programu przebiega w następującej kolejności: Po wczytaniu danych układu mechanicznego i umieszczeniu ich w pamięci bębnowej, program ustala parametry obwodu elektrycznego równoległego przedstawionego na rys. 3.3, który jest opisany w równaniu (4.14).

Wyjątek stanowią siły prądomotoryczne odpowiadające wymuszeniom w układzie mechanicznym, które ustalone są za każdym razem oddzielnie.

Następnie oblicza się liczbę grup sił wymuszających o jednakowej częstotliwości. Dla każdej częstotliwości dobiera się wielkości sił prądomotorycznych, wykonuje się obliczenia obwodu elektrycznego metodą potencjałów węzłowych, a wyniki umieszcza się w pamięci bębnowej. W końcu po przejściu z wielkości elektrycznych na mechaniczne następuje wydruk wyników z ewentualnymi wykresami.

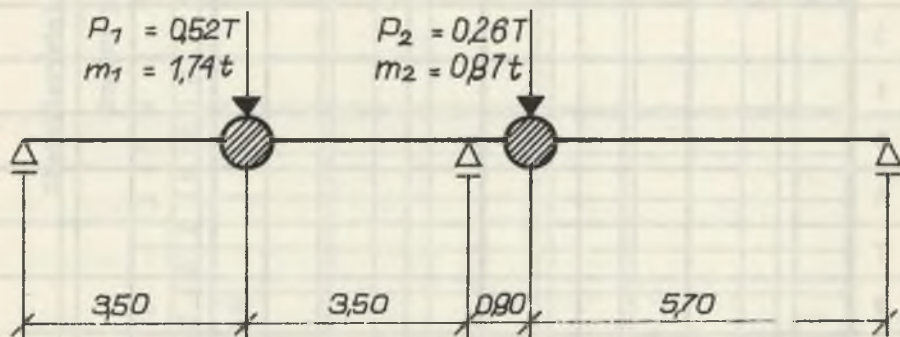
Program został napisany w języku "Algol" na m.c. "ODRA 1204" z pamięcią bębnową i drukarką wierszową.

Ze względu na to, że program i większość danych umieszczono w pamięci operacyjnej, program może liczyć układy do 12 mas. Czas obliczeń zależy bardzo od liczby grup jednakowej częstotliwości, która wpływa na ilość obliczeń. Dla obliczonych przykładów podano w dalszej części pracy czas obliczeń.

5.2. Obliczenie drgań belki ciągłej

W celu zilustrowania posługiwania się opracowanym programem podamy dwa przykłady obliczeniowe. W obu przypadkach pomocnicze obliczenia statyczne, a mianowicie obliczenie współczynników sztywności $r_{ik} = \delta_{ik}^{-1}$ wykonano przy pomocy programów na emc, służących do analizy statycznych ustrojów prętowych.

W przykładzie pierwszym wyznaczymy drgania belki stalowej (rys.5.2) dwuprzęsłowej obciążonej dwoma silnikami elektrycznymi, traktowanymi jako obciążenia skupione m_1 i m_2 . Silniki te są źródłem sił wymuszających $p_1(t)$ i $p_2(t)$.



$$E = 2100000 \text{ KG/cm}^2$$
$$J = 68740 \text{ cm}^4$$

Rys. 5.2

Wielkości wejściowe podano w formie, w jakiej wymagane jest przygotowanie danych do obliczeń przy pomocy programu.

Tytuł: Sortownia kop. D

Masy ciężarów skupionych: m_i [t]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1,74	0,87										

Współczynniki tłumienia: $c_1 \left[\frac{T \cdot s}{m} \right]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10,0	5,0										

Współczynniki sztywności układu: $r_{ik} \left[m^{-1} \right]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3,41 $\cdot 10^3$	4,08 $\cdot 10^3$										
2	4,08 $\cdot 10^3$	2,22 $\cdot 10^4$										
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

Charakterystyka sił wymuszających $F(t)$ [T]

Często- tliwość ω [s ⁻¹]	Punkty przyłożenia sił																							
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12	
	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O	P	O
1	83,3	0,52																						
2																								
3																								
4																								
5																								
6																								
7																								
8																								
9																								
10																								
11																								
12																								

Na stronach 66 i 67 załączono tabele danych wejściowych wypełnione dla rozpatrywanego przykładu. Otrzymane wyniki ze względu na ich opisanie nie wymagają wyjaśnień.

Czas obliczeń przykładu wyniósł 40 sekund wraz z wykonaniem wykresu.

Prześledźmy, dla rozpatrywanego przykładu, w jaki sposób bez posługiwania się emc można zbudować dwa dualne obwody elektryczne.

Macierze wchodzące do równania (3.14) mają postać:

$$m = \begin{bmatrix} 1,74, & 0 \\ 0, & 0,87 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 10,0, & 0 \\ 0, & 5,0 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 3,41 \cdot 10^3, & 4,08 \cdot 10^3 \\ 4,08 \cdot 10^3, & 2,22 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,26 \end{bmatrix}$$

Macierz r nie spełnia warunku 1 ($r_{12} > r_{11}$) opisanego równaniem (4.10), dlatego należy dokonać transformacji. Przyjmijmy macierz A w postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1,0, & 0 \\ 0, & 0,5 \end{bmatrix}$$

Wykonujemy działania:

$$\bar{m} = AmA = \begin{bmatrix} 1,75, & 0 \\ 0, & 0,2175 \end{bmatrix} \quad \bar{c} = AcA = \begin{bmatrix} 10,0, & 0 \\ 0, & 1,25 \end{bmatrix}$$

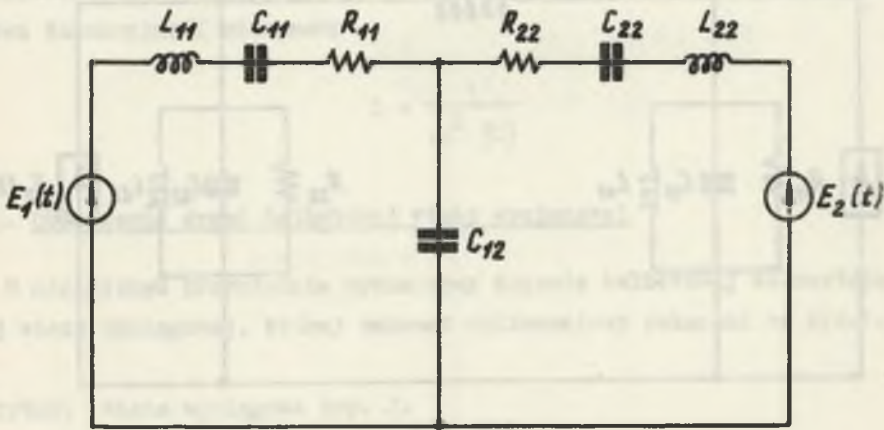
$$\bar{r} = ArA = \begin{bmatrix} 3,41 \cdot 10^3, & 2,08 \cdot 10^3 \\ 2,08 \cdot 10^3, & 5,57 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \quad \bar{p} = Ap = \begin{bmatrix} 0,52 \\ 0,13 \end{bmatrix}$$

Wg pierwszego rodzaju analogii (wzór 3.19) będzie:

$$\bar{m} \leftrightarrow L \quad \bar{c} \leftrightarrow R \quad \bar{r} \leftrightarrow S \quad \bar{x} \leftrightarrow Q \quad \bar{p} \leftrightarrow E$$

Po prostych przekształceniach otrzymuje się poszukiwane parametry obwodu elektrycznego¹⁾, pokazanego na rys. 5.3

$$\begin{array}{lll}
 L_{11} = 1,74 \text{ H} & R_{11} = 10,0 \ \Omega & C_{11} = 7,32 \cdot 10^{-4} \text{ F} \\
 L_{22} = 0,2175 \text{ H} & R_{22} = 1,25 \ \Omega & C_{22} = 2,833 \cdot 10^{-4} \text{ F} \\
 E_1 = 0,52 \text{ V} & E_2 = 0,13 \text{ V} & C_{12} = 4,897 \cdot 10^{-4} \text{ F}
 \end{array}$$



Rys. 5.3.

Ze względu na dokonaną transformację należy otrzymane w obwodzie spadki napięć odpowiednio pomnożyć przez macierz **A** przed przejściem z wielkości elektrycznych na mechaniczne.

Wg drugiego rodzaju analogii (wzór 3.17) będzie:

$$\bar{m} \leftrightarrow C \quad \bar{c} \leftrightarrow G \quad \bar{r} \leftrightarrow T \quad \bar{x} \leftrightarrow \Psi \quad \bar{p} \leftrightarrow J$$

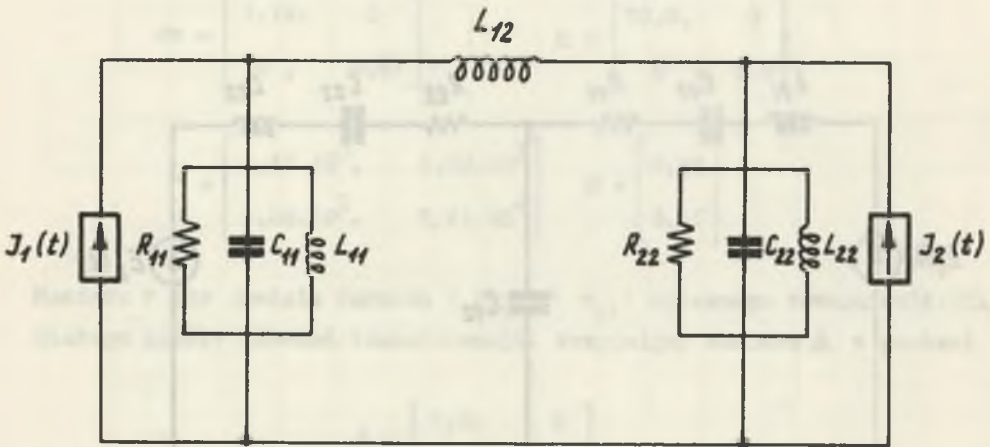
¹⁾ Otrzymane wielkości liczbowe parametrów obwodu elektrycznego nie pozwalają na ogół na budowę realnego układu fizycznego.

Po prostych przekształceniach otrzymano następujące parametry obwo-
du elektrycznego¹⁾ pokazanego na rys. 5.4

$$C_{11} = 1,74 \text{ F} \quad R_n = 0,1 \Omega \quad L_{11} = 7,32 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$C_{22} = 0,2175 \text{ F} \quad R_{22} = 0,8 \Omega \quad L_{22} = 2,83 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$I_1 = 0,52 \text{ A} \quad I_2 = 0,13 \text{ A} \quad L_{22} = 4,89 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$



Rys. 5.4

Podobnie jak w przypadku pierwszego rodzaju analogii spadki napięć, tak w drugim rodzaju analogii obliczone prądy należy pomnożyć przez macierz **A** przed przejściem z wielkości elektrycznych na mechaniczne.

W obwodach elektrycznych będących analogami układów mechanicznych wystąpić mogą ujemne indukcyjności i pojemności.

$$R_{zL} = j \omega L \quad R_{zC} = -j \frac{1}{\omega C} \quad (5.2)$$

¹⁾ Otrzymane wielkości liczbowe parametrów obwo-
du elektrycznego nie pozwalają na ogół na budowę realnego układu fizycznego.

Jeśli wartość indukcyjności jest ujemna, tj. $L < 0$, wtedy, jak łatwo zauważyć ze wzorów (5.2), impedancja indukcyjna przybiera charakter pojemnościowy.

$$R_{zL} = -j\omega |L|$$

Pojemność C odpowiadająca ujemnej indukcyjności wyniesie

$$C = \frac{1}{\omega^2 |L|}$$

Przeprowadzając identyczny wywód dla znalezienia ujemnej pojemności przez indukcyjność otrzymamy

$$L = \frac{1}{\omega^2 |C|}$$

5.3. Obliczenie drgań żelbetowej wieży wyciągowej

W niniejszym przykładzie wyznaczmy drgania żelbetowej wolnostojącej wieży wyciągowej, której schemat obliczeniowy pokazano na rys.5.5.

- Tytuł: Wieża wyciągowa kop. J.

- Masy ciężarów skupionych: m_i [t]

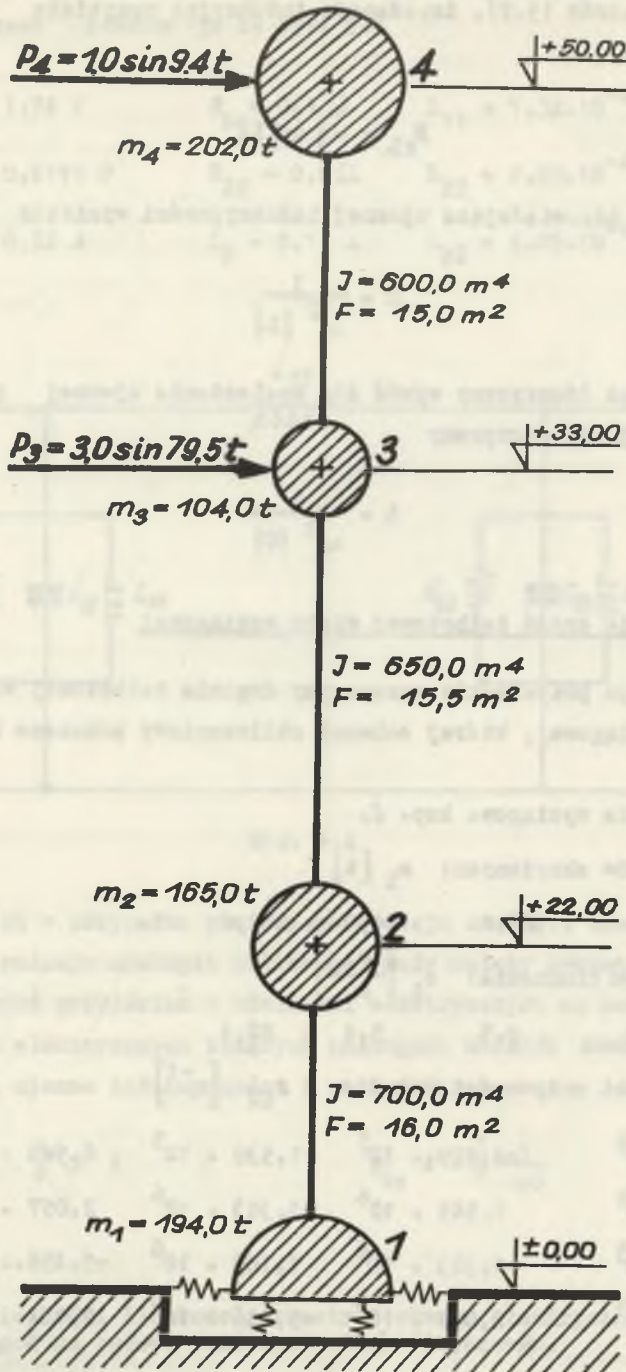
194,0 165,0 104,0 202,0

- Współczynniki tłumienia: c_i $\left[\frac{Ts}{m} \right]$

10,0 8,5 5,4 20,4

- Współczynniki sztywności układu: r_{ik} $[m^{-1}]$

$6,135 \cdot 10^5$	$-4,409 \cdot 10^5$	$1,539 \cdot 10^5$	$6,948 \cdot 10^4$
$-4,409 \cdot 10^5$	$1,549 \cdot 10^6$	$-1,313 \cdot 10^6$	$2,057 \cdot 10^5$
$1,540 \cdot 10^5$	$-1,313 \cdot 10^6$	$1,705 \cdot 10^6$	$-5,456 \cdot 10^5$
$6,948 \cdot 10^5$	$2,057 \cdot 10^5$	$-5,456 \cdot 10^5$	$2,704 \cdot 10^5$



Rys. 5.5

- Charakterystyka sił wymuszających $p(t)$ [T]

79,5	0	0	3,0	0
9,4	0	0	0	1,0

Na rysunkach załączono wyniki obliczeń wraz z fragmentami wykresów otrzymanych z drukarki wierszowej. Otrzymane wyniki ze względu na ich opisanie nie wymagają wyjaśnień. Czas obliczeń przykładu wyniósł 20 sekund, natomiast sporządzenie wykresu około 3 minuty.

6. WYKORZYSTANIE MASZYNY ANALOGOWEJ DO OBLICZEŃ DRGAŃ

6.1. Wprowadzenie do techniki analogowej

Stosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej, szeroko unas propagowanej, ogranicza się zasadniczo do maszyn cyfrowych i w tej dziedzinie pracują coraz liczniej powstające ośrodki obliczeniowe. Technika analogowa ma również szerokie zastosowanie dla zwiększenia efektywności obliczeń i może być z powodzeniem wykorzystana w szczególności wszędzie tam, gdzie rozpatrywany problem da się sprowadzić do rozwiązania równań różniczkowych. Metody analogowe są szczególnie przydatne w dynamice budowli, a to przede wszystkim ze względu na sam proces fizyczny, jakim są drgania mające zawsze charakter ciągły, których opis matematyczny ma postać równań różniczkowych.

Do modelowania równań różniczkowych liniowych przy pomocy maszyny analogowej potrzebne są elementy wykonujące operacje całkowania, dodawania i mnożenia przez wartość stałą. Dwie pierwsze operacje wykonywane są przez zastosowanie wzmacniacza operacyjnego z odpowiednim sprzężeniem zwrotnym. Wzmacniacz ten jest podstawowym elementem maszyny analogowej. Jest to wzmacniacz prądu stałego, o bardzo ostrych wymaganiach co do parametrów. Mnożenie przez wartość stałą wykonuje się przy pomocy potencjometrów też o odpowiednich parametrach.

Dokładny opis budowy i działania maszyn analogowych podany jest w pracach specjalistycznych np. Z. Szopliński [25]. Rozpowszechnieniem techniki analogowej, zwłaszcza w biurach konstrukcyjnych poświęcona jest natomiast praca A. Lisowskiego [13].

Należy dodać, że wprawdzie dokładność obliczeń na maszynie analogowej jest gorsza niż na cyfrowej, to samo rozwiązanie równania różniczkowego trwa o wiele krócej niż na najszybszych maszynach cyfrowych.

Decyduje o tym operacja całkowania. Powoduje to coraz bardziej rosnącą tendencję do łączenia maszyn cyfrowych i analogowych w jedną maszynę. Maszyny te zwane hybrydowymi wykonują pewne operacje np. całkowania w sposób "analogowy", pewne zaś w sposób "cyfrowy". Najwięcej czasu na rozwiązanie równań różniczkowych na maszynie analogowej przypada na skalowanie, które jest procesem bardzo pracochłonnym. Dlatego dąży się, aby te czynności wykonywane były na maszynie cyfrowej, zaoszczędzając dzięki temu czas i jednocześnie przyspieszając proces rozwiązywania.

Prace związane z modelowaniem równań różniczkowych na maszynie analogowej można podzielić na kilka zasadniczych czynności:

- ustalenie schematu obliczeń,
- określenie skali amplitud i czasu,
- wykreślenie schematu maszynowego obliczeń z podaniem nastawy potencjometrów, wag integratorów i sumatorów itp.,
- dokonanie kontroli układu,
- dokonanie pomiarów i wykresów poszukiwanych wielkości.

W niniejszym rozdziale pokazano możliwości wykorzystania maszyny analogowej do obliczania dwóch przykładów: belki o dwóch stopniach swobody, które to przykłady rozwiązano również w rozdziale piątym niniejszej pracy.

Obliczenia przeprowadzono dla znalezienia przede wszystkim stanu ustalonego. Zagadnienia stanu nieustalonego będą przedmiotem rozpatrywań w rozdziale 7 niniejszej pracy.

Obliczenia wykonano na maszynie analogowej zbudowanej w Zakładzie Optyki i Mechaniki Precyzyjnej Politechniki Śląskiej w Gliwicach.

6.2. Obliczenie drgań belki ciągłej

Ruch układu drgającego pokazanego na rys. 5.2 opisany być może ogólnym równaniem różniczkowym (3.5).

Obliczenie współczynników wykonano w części 5.2 niniejszej pracy.

Modelowany układ równań ma więc postać:

$$1,74 \ddot{x}_1 + 10,0 \dot{x}_1 + 3,41 \cdot 10^3 x_1 + 4,08 \cdot 10^3 x_2 = 0,52 \sin 83,3 t \quad (6.1)$$

$$0,87 \ddot{x}_2 + 5 \dot{x}_2 + 4,08 \cdot 10^3 x_1 + 22,28 \cdot 10^3 x_2 = 0,26 \sin 83,3 t$$

Układ równań rozwiązano przy zerowych warunkach początkowych na maszynie analogowej.

Schemat maszynowy układu równań z naniesionymi stałymi integratorów i potencjometrów podaje rys. 6.1.

Na rys. 6.2 naniesiono otrzymane z rejestratora sygnały x_1 , \dot{x}_1 i \ddot{x}_1 .

Na rys. 6.3 przedstawiono otrzymane z rejestratora sygnały x_2 , \dot{x}_2 i \ddot{x}_2 .

Sygnały x , \dot{x} oraz \ddot{x} są przesunięte względem siebie - wynika to z konieczności przejrzystego zapisu. Każdemu sygnałowi x , \dot{x} oraz \ddot{x} przyporządkowano oś rzędnych odpowiadającą początkowi liczenia ($t=0$).

Dla pozostałych sygnałów należy uwzględnić przesunięcie. Osie odciętych i rzędnych opisano w jednostkach rzeczywistych w układzie równań.

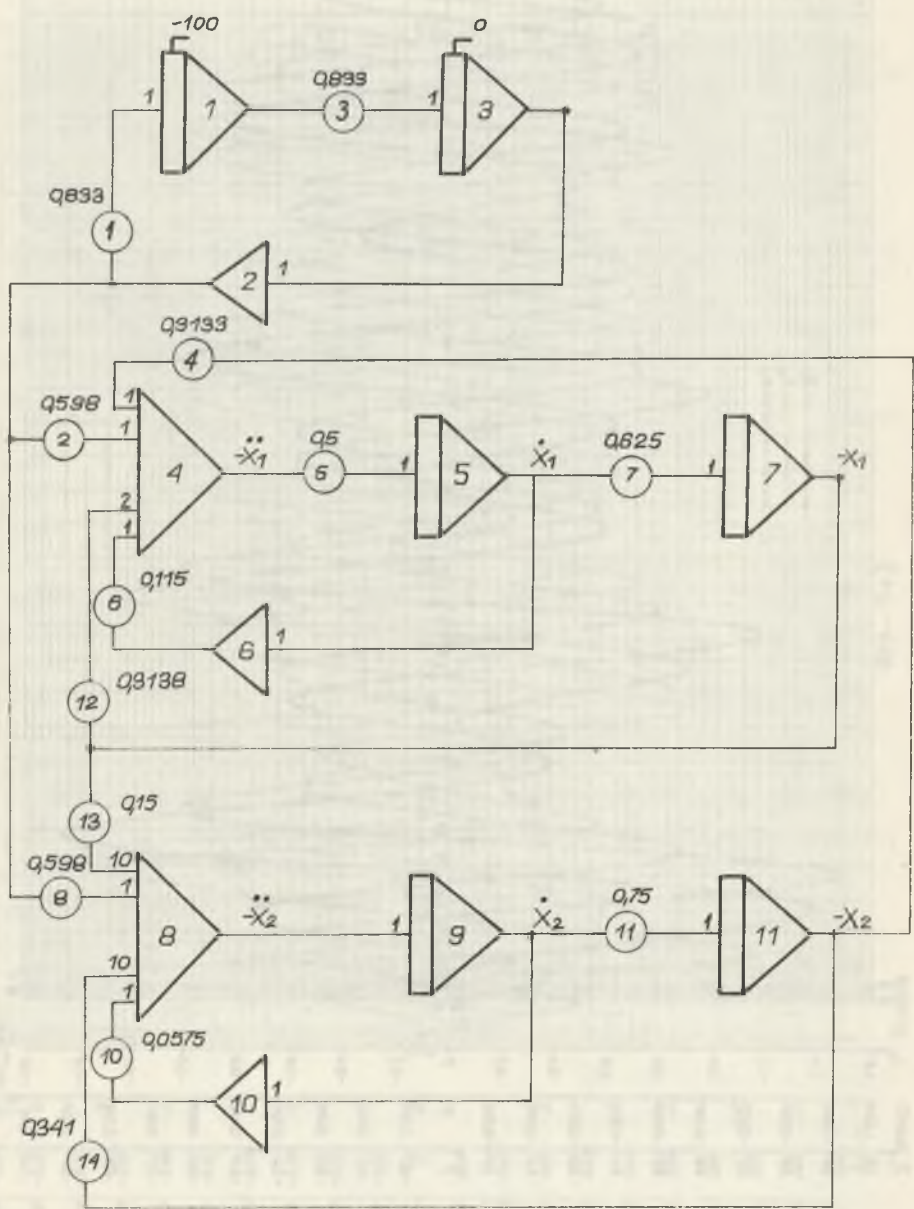
6.3. Obliczenie drgań żelbetowej wieży wyciągowej

Schemat obliczeniowy wieży pokazano na rys. 5.3. Ruch układu drgającego opisany może być równaniem (3.5).

Współczynniki równania obliczono w rozdziale 5.3.

Modelowy układ równań:

$$194 \ddot{x}_1 + 10 \dot{x}_1 + 6,13 \cdot 10^5 x_1 - 4,41 \cdot 10^5 x_2 + 1,54 \cdot 10^5 x_3 + \\ + 6,95 \cdot 10^4 x_4 = 0$$



Rys. 6.1

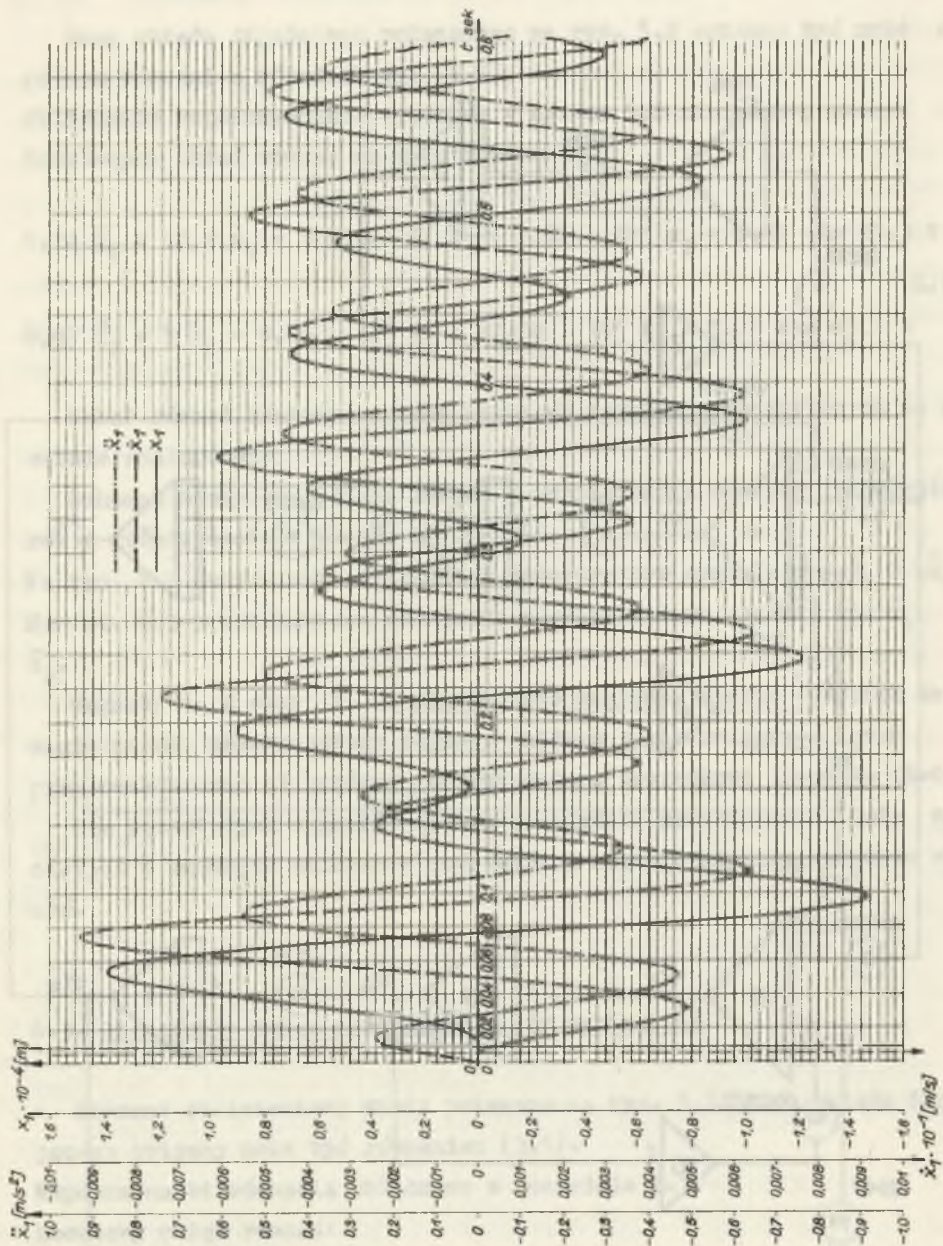


Рис. 6.2

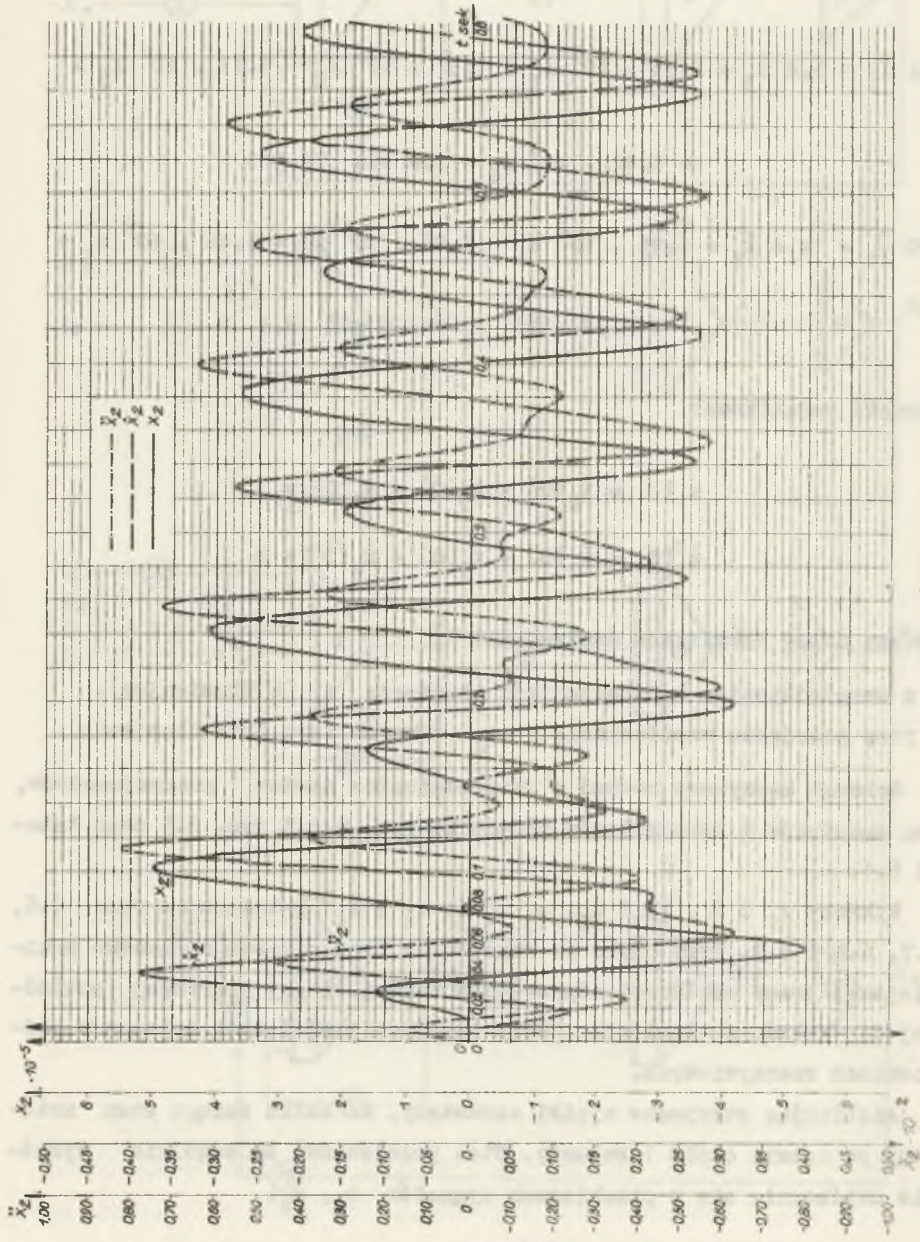


Fig. 6.3

$$165 \ddot{x}_2 + 8,5 \dot{x}_1 - 4,41 \cdot 10^5 x_1 + 1,55 \cdot 10^6 x_2 - 1,31 \cdot 10^6 x_3 + \\ + 2,06 \cdot 10^5 x_4 = 0$$

$$104 \ddot{x}_3 + 5,4 \dot{x}_3 + 1,54 \cdot 10^5 x_1 - 1,31 \cdot 10^6 x_2 + 1,71 \cdot 10^6 x_3 - \\ - 5,46 \cdot 10^5 x_4 = 3,0 \sin 79,5 t$$

$$202 \ddot{x}_4 + 10,4 \dot{x}_4 + 6,95 \cdot 10^4 x_1 + 2,06 \cdot 10^5 x_2 - 5,46 \cdot 10^5 x_3 + \\ + 2,70 \cdot 10^5 x_4 = 1,0 \sin 9,4 t$$

Warunki początkowe:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = \dot{x}_4(0) = 0$$

Podany układ rozwiązano dwukrotnie:

- z uwzględnieniem współczynników tłumienia c_i (z tłumieniem),
- przy przyjęciu współczynników c_i równych zero (bez tłumienia).

Schemat maszynowy równań z uwzględnieniem nastaw potencjometrów, wag sumatorów i integratorów podano na rys. 6.4 i rys. 6.5 oraz tabeli 6.1.

Wykresy x_1 i \dot{x}_1 , x_2 i \dot{x}_2 , x_3 i \dot{x}_3 , x_4 i \dot{x}_4 pokazano na rys. 6.6, 6.7, 6.8 i 6.9. Przy czym, ze względu na brak miejsca załączono w niniejszej pracy wielkości odprowadzeń funkcji i jej pierwszej pochodnej dla układu z tłumieniem. Osie rzędnych i odciętych opisano w jednostkach rzeczywistych.

Analizując otrzymane wyniki zauważamy, że układ osiąga stan ustalony po czasie około 1 sekundy. Stan przejściowy szczególnie wyraźnie uwidacznia się w przebiegach sygnałów x_2 , \dot{x}_2 .

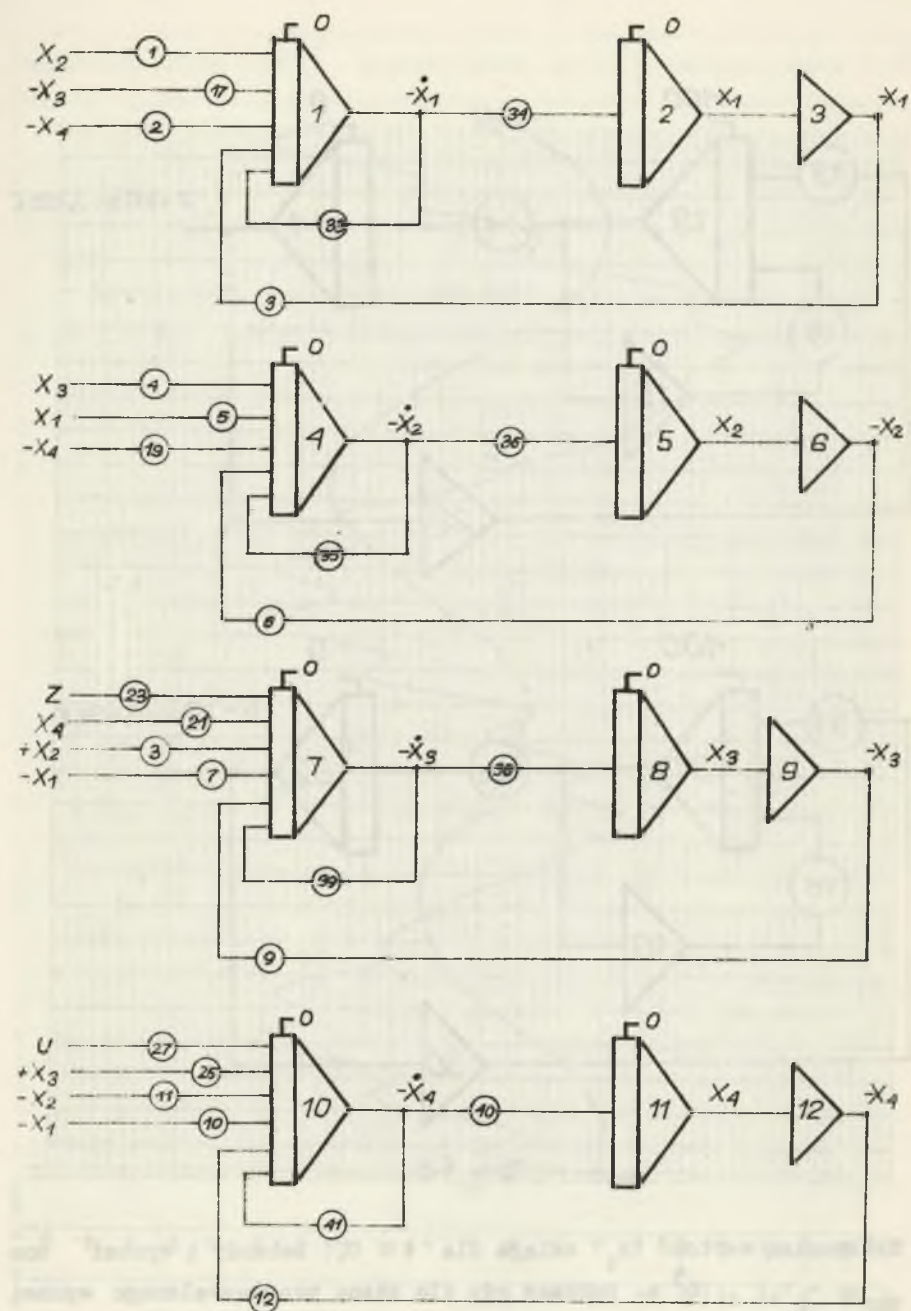
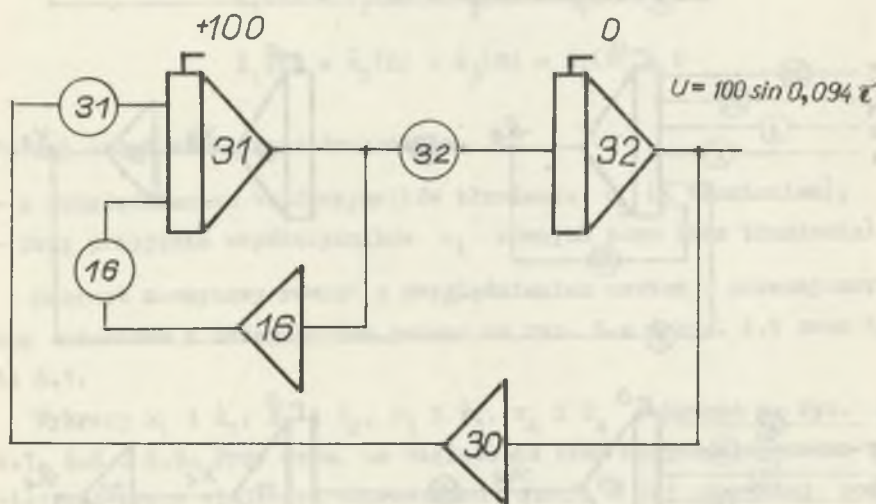
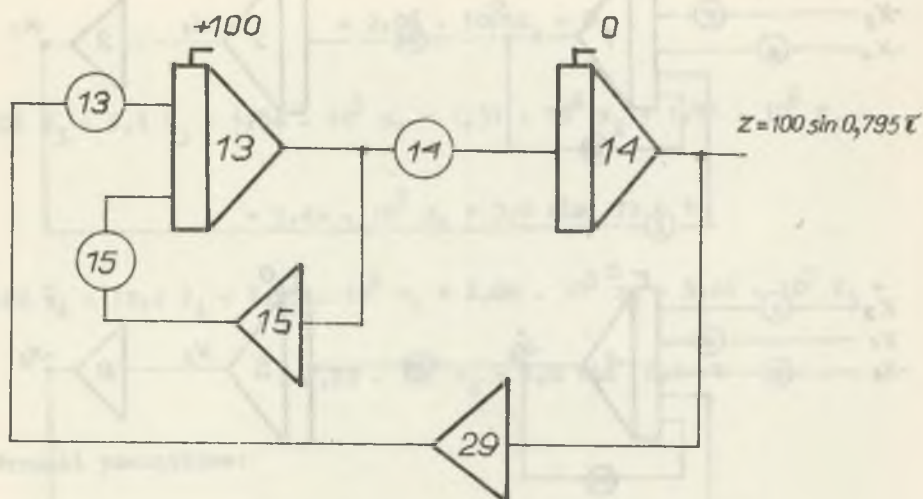


Рис. 6.4



Rys. 6.5

Maksymalną wartość x_1 osiąga dla $t \approx 0,1$ sekundy i wynosi ona $x_{1 \max} \approx -1,2 \cdot 10^5$ m, podczas gdy dla stanu quasiustalonego wynosi $0,55 \cdot 10^{-5}$ m, a więc około 2,5 razy mniej. Prędkość \dot{x}_1 w stanie nieustalonym osiąga wartość $0,0057 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ a po ustaleniu $0,0034 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

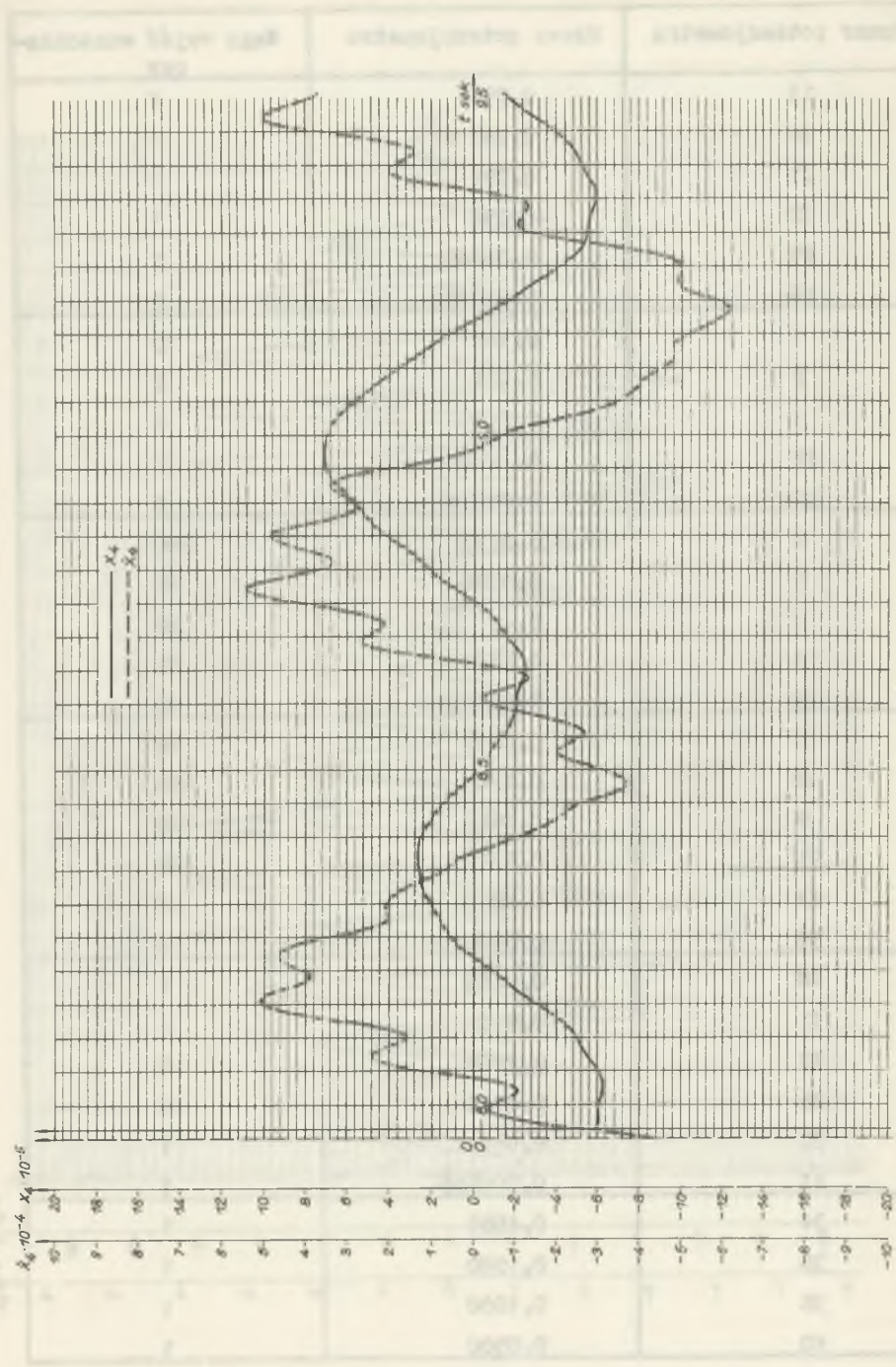
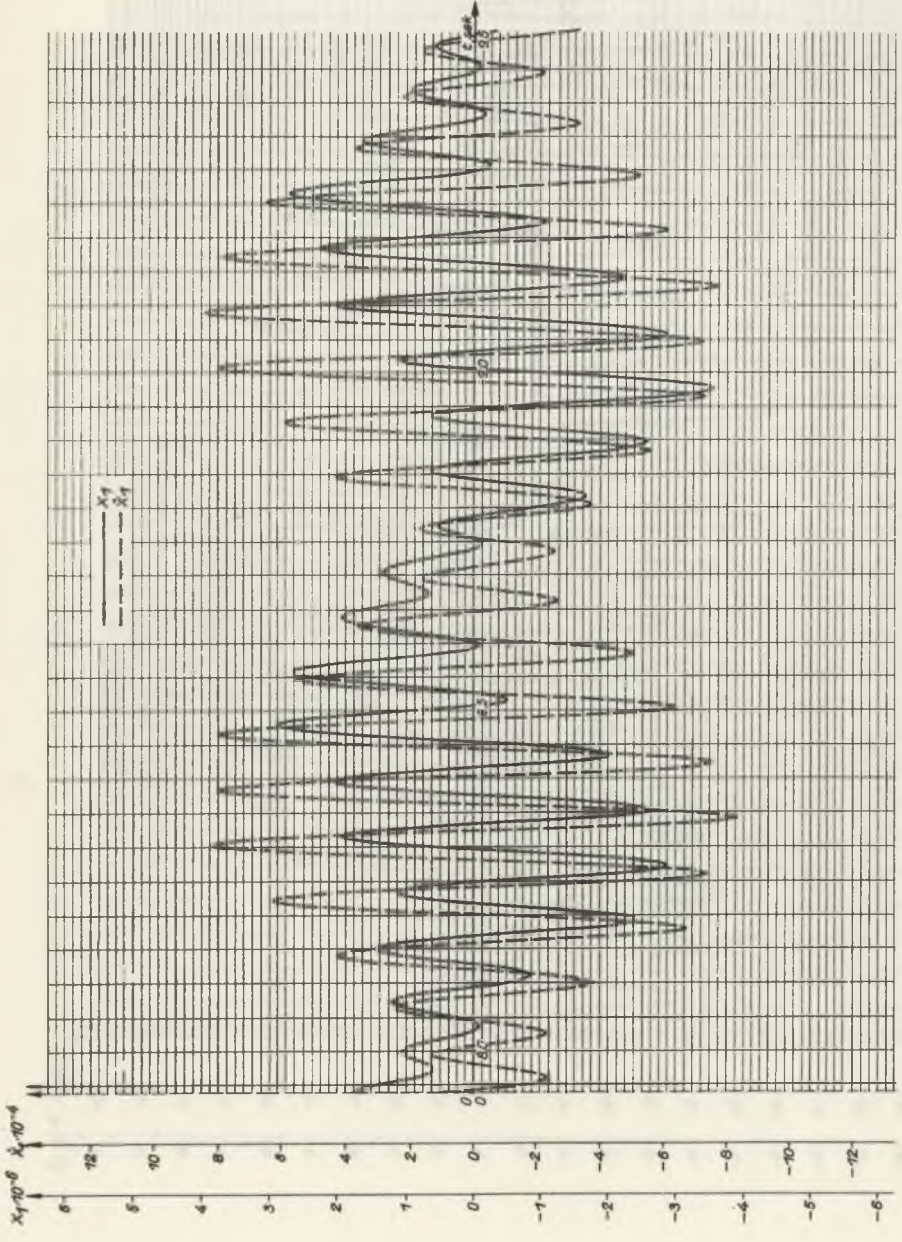


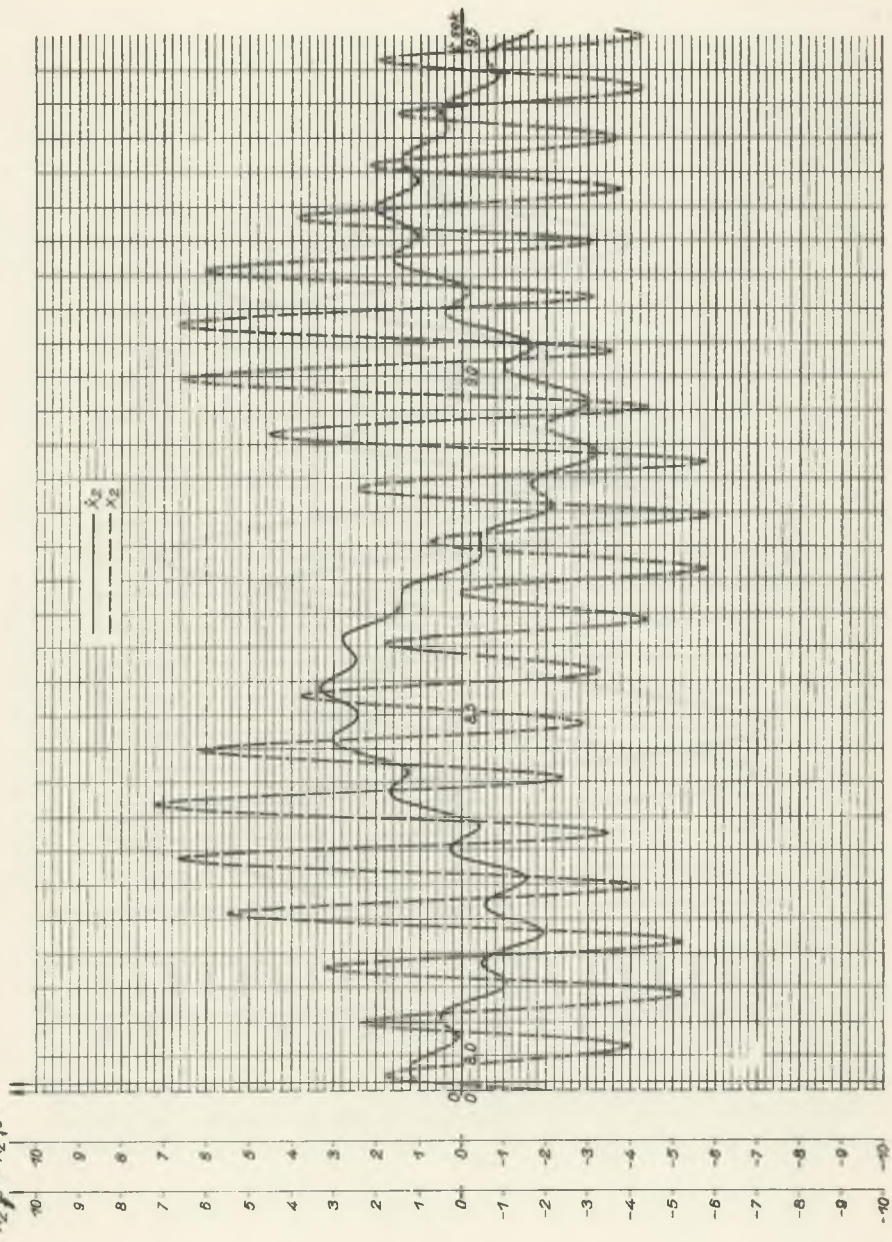
Рис. 6.9

Tabela 6.1

Numer potencjometru	Nazwa potencjometru	Waga wejść wzmacnia- czy
13	0,795	1
14	0,795	1
31	0,094	1
32	0,094	1
15	0,00049	1
16	0,000000	1
1	0,365	10
2	0,574	2
3	0,6745	1
17	0,1272	10
33	0,000515	1
4	0,0795	100
5	0,0356	10
6	0,47	20
19	0,248	10
35	0,0000515	10
7	0,0197	10
8	0,126	100
9	0,1644	100
21	0,5250	20
23	0,0283	10
39	0,0000515	10
10	0,0459	1
11	0,510	2
12	0,2668	10
25	0,2705	10
27	0,0495	1
41	0,000515	1
34	0,4685	1
36	0,1000	1
38	0,1000	1
40	0,0500	1



$x_2 \times 10^{-5}$



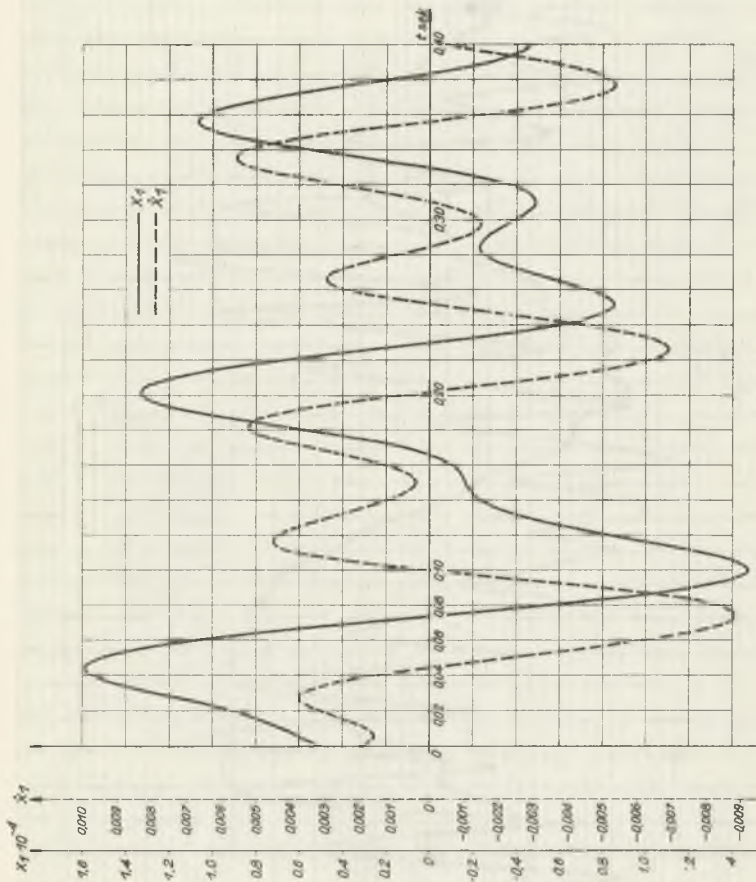
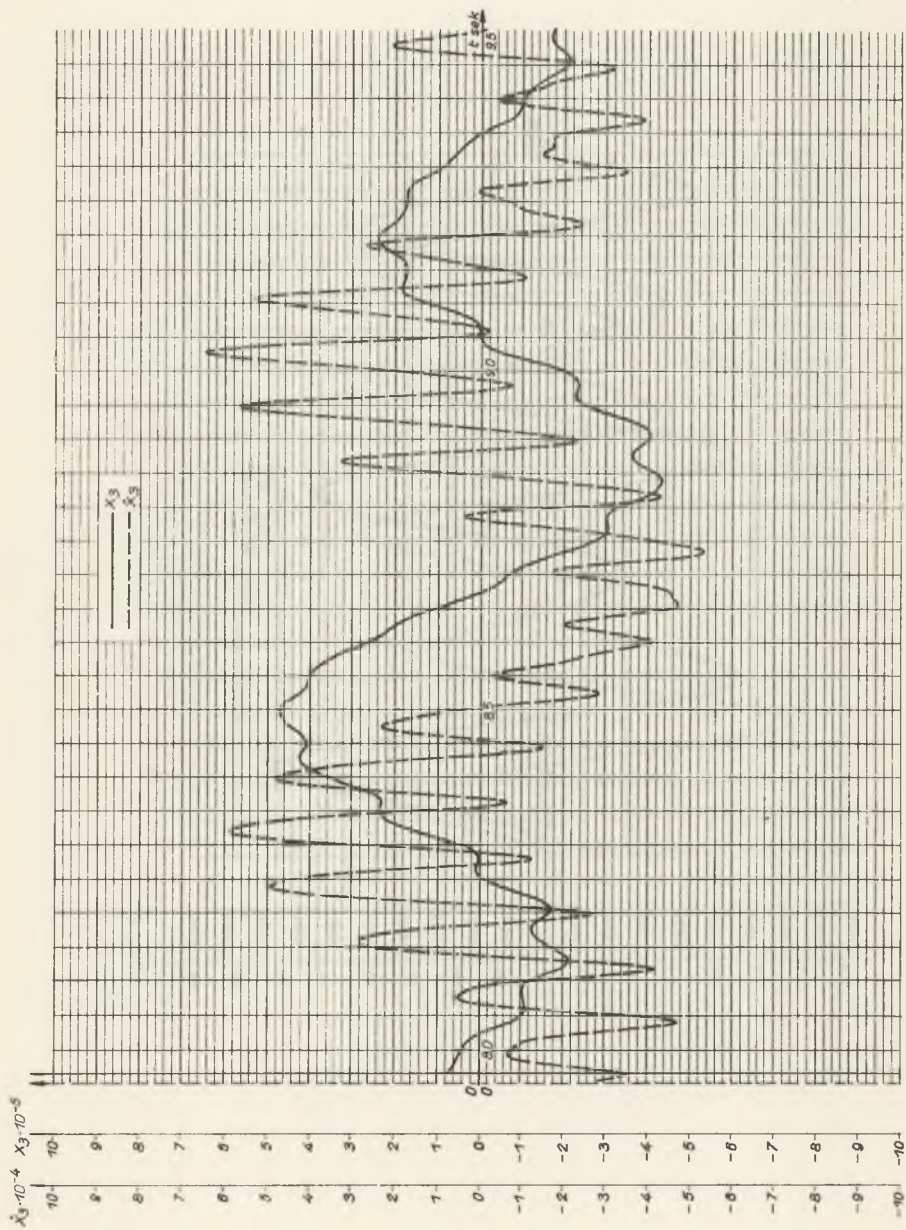


Fig. 7-6



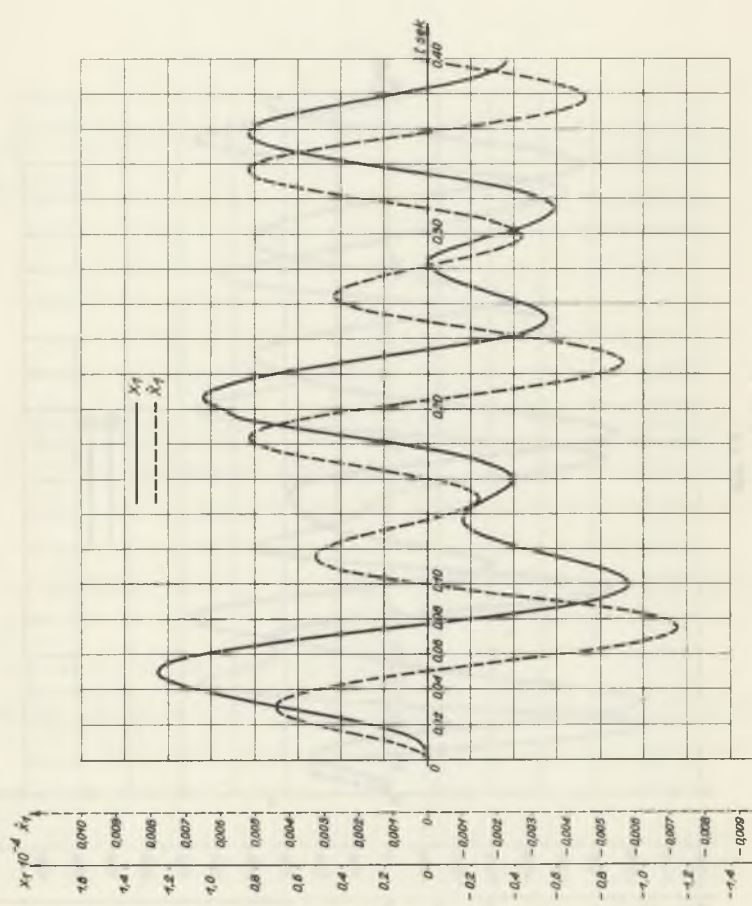


Fig. 7-5

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a title or header.

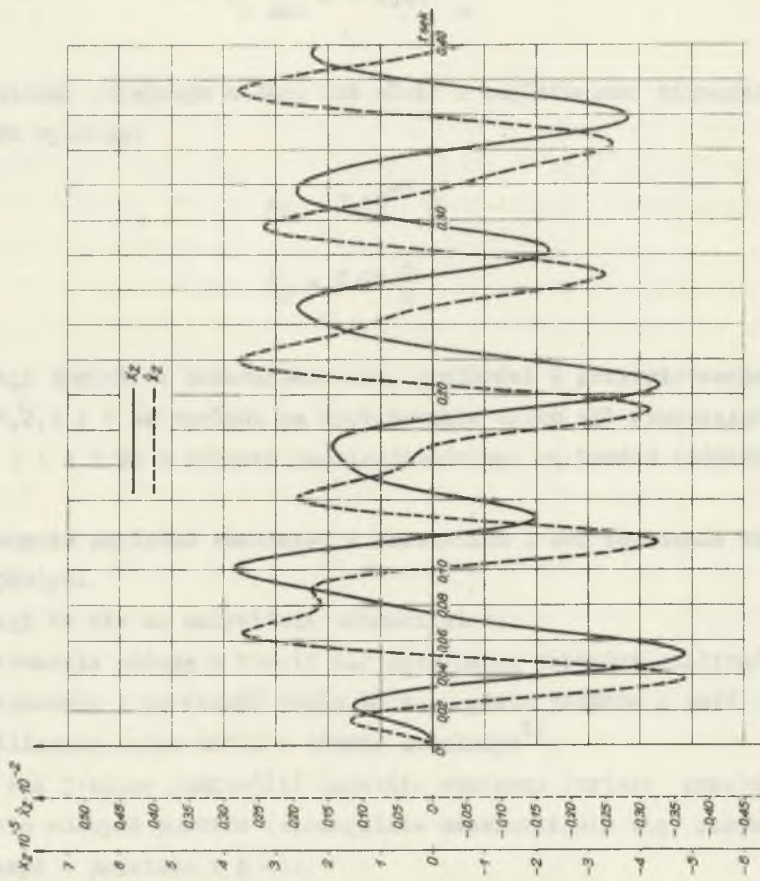


Fig. 1.7

Przebiegi sygnałów w punkcie 2 są w stanie nieustalonym bardziej zniekształcone, lecz i one podobnie jak sygnały w punkcie 1 po upływie około 1 s, stają się wyraźnie przebiegami sinusoidalnymi. I tak maksymalne wartości sygnałów w stanie przejściowym wynoszą odpowiednio:

$$x_2 \max = -5,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\dot{x}_2 \max = -0,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

W stanie niemal ustalonym możemy już mówić o amplitudach sinusoidalnych, które wynoszą:

$$x_2 = 3,10^{-5} \text{ m}$$

$$\dot{x}_2 = 0,27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Przebiegi sygnałów: przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w punktach 1,2,3 i 4 ze względu na występowanie tylko sił wymuszających w punkcie 3 i 4 i to o różnych częstotliwościach są bardzo zróżnicowane.

Z porównania amplitud rozwiązań z tłumieniem i bez tłumienia widać wyraźne różnice.

Przebiegi te nie są oczywiście sinusoidalne.

Dla porównania podamy w tabeli 6.2 maksymalne wartości amplitud zaraz po zakończeniu i po czasie około 10 s, gdzie jedynie z dość dużym przybliżeniem można mówić o stanie ustalonym¹⁾.

Należy raz jeszcze podkreślić zupełnie odmienny kształt przebiegu sygnałów dla różnych punktów (szczególnie odzwierciedla się porównując przebiegi w punktach 1 i 4).

¹⁾ Zakończony wykresy na rys. 6.6 - 6.9 stanowią jedynie fragmenty wibrografów, a czas obserwacji podany jest na osi odciętych.

Tabela 6.2

Sygnały w punktach	Amplitudy			
	z tłumieniem		bez tłumienia	
	Stan nieustalony	Stan quasiustalony ($t \approx 10_s$)	Stan nieustalony	Stan quasiustalony ($t \approx 10_s$)
x_1	$12,3 \cdot 10^{-6}$	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$13,0 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$
\dot{x}_1	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-6}$	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$3,40 \cdot 10^{-4}$
x_2	$6,7 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-5}$	$3,4 \cdot 10^{-5}$
\dot{x}_2	$8,8 \cdot 10^{-4}$	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$
x_3	$9,2 \cdot 10^{-5}$	$+4,6 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-5}$	$4,95 \cdot 10^{-5}$
\dot{x}_3	$-8,4 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-4}$	$-8,4 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-4}$
x_4	$13,5 \cdot 10^{-5}$	$6,60 \cdot 10^{-4}$	$13,6 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$
\dot{x}_4	$-9,5 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$-9,5 \cdot 10^{-4}$	$-6,0 \cdot 10^{-4}$

7. PROCESY USTALANIA SIĘ DRGAŃ WYMUSZONYCH

7.1. Określenie stanu nieustalonego

W poprzednich rozdziałach niniejszej pracy rozpatrywano drgania układów mechanicznych i obwodów elektrycznych opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, liniowymi niejednorodnymi.

Z analizy pełnego rozwiązania równania różniczkowego podanego wzorem (3.14) wynika, że poszukiwana funkcja, określająca drgania wymuszone siłą harmonicznie zmienną układów tłumionych, w początkowym okresie czasu jest nieokresowa; oznacza to, że:

$$x(t) \neq x(t + T) \quad (7.1)$$

Teoretycznie po czasie $t = \infty$, a praktycznie po kilku lub kilkunastu okresach (duży wpływ na okres ustalania się drgań ma tłumienie) drgania przyjmują postać ustaloną o częstotliwości równej częstotliwości siły wymuszającej. Proces ten nazywamy ustalaniem się drgań harmonicznym, a stan, w jakim znajduje się układ nazywamy stanem nieustalonym (przejściowym)¹⁾.

7.2. Stan nieustalony układu o jednym stopniu swobody

Rozpatrzmy raz jeszcze równanie drgań układu o jednym stopniu swobody (2.1) podane w formie:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

¹⁾ Rozważania powyższe są oczywiście słuszne dla układów stabilnych.

Przyjmijmy wymuszenie harmoniczne w postaci:

$$p(t) = p \sin(\omega t + \phi);$$

Pozostałe oznaczenia jak we wzorze (2.1).

Załóżmy dodatkowo występowanie małego tłumienia w rozpatrywanym układzie $c < 2\sqrt{mk}$

oraz warunków początkowych: $x(0)$ i $\dot{x}(0)$.

Pełne analityczne rozwiązanie równania różniczkowego ma postać:

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[x(0) \cos \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} t + \frac{\dot{x}(0) + x(0)\delta}{\sqrt{\alpha^2 - \delta^2}} \sin \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} t \right] + \frac{pe^{-\delta t}}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \left[\frac{\delta \sin(\phi - \psi) + \omega \cos(\phi - \psi)}{\sqrt{\alpha^2 - \delta^2}} \sin \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} t + \sin(\phi + \psi) \cos \sqrt{\alpha^2 - \delta^2} t \right] + \frac{p}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi - \psi) t \quad (7.2)$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\delta\omega}{\alpha^2 - \omega^2}, \quad \delta = \frac{c}{2m}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jak widać pełne powiązanie analityczne równania (2.1) podane w zapisie (7.2) składa się z trzech członów reprezentujących następujące procesy: drgania własne, wpływ warunków początkowych oraz drgania wymuszone. W procesie ustalania się drgań harmonicznych człony reprezentujące drgania własne oraz wpływ warunków początkowych, zaburzające okresowość ruchu wskutek tłumienia, wygasają z upływem czasu.

Ruch układu przechodzi stopniowo w drgania harmoniczne z częstotliwością siły wymuszającej.

7.3. Stan nieustalony układów o wielu stopniach swobody

Rozpatrzmy równanie drgań układów o wielu stopniach swobody podane zapisem macierzowym (3.14)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + rx = p(t)$$

gdzie oznaczenia jak na wzorze (3.14). Załóżmy warunki początkowe

$$x(0) = x_0 \quad \text{i} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Układ równań (3.14) rozwiązać można metodą transformacji Laplace'a, po dokonaniu której otrzymamy:

$$s^2 mx(s) - m\dot{x}_0 - smx_0 + scx(s) - cx_0 + cx(s) = p(s) \quad (7.3)$$

gdzie $x(s)$ i $p(s)$ są transformatorami wektorów $x(t)$ i $p(t)$.

Po uporządkowaniu równania (7.3) otrzymamy:

$$ms^2 + cs + r(x) s = mx_0 + smx_0 + cx_0 + p(s) \quad (7.4)$$

oznaczając:

$$G(s) = (ms^2 + cs + r)^{-1}$$

$$a = m\dot{x}_0 + cx_0$$

$$b = mx_0$$

Równanie (7.4) przybierze postać

$$x(s) = G(s)a + sG(s)b + G(s)p(s) \quad (7.5)$$

Wykonując transformację odwrotną otrzymamy

$$x(t) = G(t)a + \frac{d}{dt} [G(t)b] + \int_0^t G(t-\tau) p(\tau) d\tau \quad (7.6)$$

Jest to najbardziej ogólna postać rozwiązania układu równania podanego zapisem macierzowym (3.14). Dwa pierwsze człony przedstawiają drgania własne układu oraz wpływ warunków początkowych. Trzeci człon przedstawia drgania wymuszone układu.

Wyrażenie $G(s)$ przedstawia macierz przejścia układu dynamicznego o n wejściach i wyjściach. Jej transformata odwrotna stanowi impulsową funkcję przejścia.

Elementy tej macierzy $g_{ik}(t)$ stanowią odpowiedź k -tej współrzędnej (przemieszczenie) na impuls Diraca $\delta(t)$ podany na i -tym wejściu.

W przypadku, gdy warunki początkowe $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, zapis (7.6) upraszcza się do postaci

$$x(t) = \int_0^t G(t-\tau) p(\tau) d\tau \quad (7.7)$$

Znalezienie rozwiązań analitycznych w postaci niuwikłanej zapisów (7.6) a nawet (7.7) nie jest proste. Ogromna ilość pracy rachunkowej nawet dla układu o dwóch stopniach swobody czyni metodę transformacji Laplace'a nieprzydatną do celów praktycznych.

7.4. Wykorzystanie maszyn analogowych do znalezienia postaci drgań w stanie nieustalonym

W rozdziale 6 niniejszej pracy omówiono ogólne zasady postępowania się techniką analogową. Podano również dwa przykłady obliczenia drgań ustalonych: belki oraz wieży wyciągowej. Maszyny analogowe mają tę ogromną przewagę nad maszynami cyfrowymi, że umożliwiają w prosty sposób obliczenie drgań w stanie nieustalonym. W niniejszym rozdziale na konkretnym przykładzie wykażemy te możliwości.

Jak już wspomniano w rozdziale 6, podstawowym elementem maszyny analogowej jest wzmacniacz prądu stałego o bardzo dużym wzmocnieniu przeciętnie $10^4 - 10^7$ V/V, znikomym drycie zera oraz liniowości w całym zakresie pracy. Oprócz tego każda maszyna analogowa jest wyposażona w cały szereg urządzeń peryferyjnych takich jak rejestratory, woltomierze cyfrowe itp.

Obliczmy drgania w stanie nieustalonym belki pokazanej na rys.5.2, które opisane są układem równań (6.1).

$$1,74 \ddot{x}_1 + 10,0 \dot{x}_1 + 3,41 \cdot 10^3 \cdot x_1 + 4,08 \cdot 10^3 x_2 = 0,52 \sin 83,3 t$$

$$0,87 \ddot{x}_2 + 5,0 \dot{x}_2 + 4,08 \cdot 10^3 x_1 + 22,28 \cdot 10^3 x_2 = 0,26 \sin 83,3 t$$

Powyższy układ równań rozwiązano dla dwóch warunków początkowych:

1. Warunki początkowe zerowe:

$$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

2. Warunki początkowe różne od zera:

$$x_1(0) = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad x_2(0) = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\dot{x}_1(0) = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} \quad \dot{x}_2(0) = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

Pierwszą czynnością przy rozwiązywaniu problemu jest narysowanie schematu maszynowego układu równań różniczkowych. Schemat taki podano na rys. 6.1. Drugim krokiem jest zastąpienie zmiennych rzeczywistych przez tzw. zmienne maszynowe. Dokonuje się tego za pomocą współczynników skalowych, definiowanych jako:

$$a_x = \frac{x}{X}$$

gdzie

x - zmienna rzeczywista,

X - zmienna maszynowa.

Współczynnik skalowy określa, ile jednej jednostce rzeczywistej odpowiada jednostek zmiennej maszynowej. Ze względu na to, że na ogół w maszynach analogowych zbudowanych w technice lampowej zakres liniowy wzmacniacza operacyjnego wynosi ± 100 V, a w technice tranzystorowej ± 10 V, odpowiednio jednostka maszynowa posiada wartość 100 i 10.

Dobierając współczynnik skalowy staramy się, aby on był ze względu na dokładność pomiaru jak największy.

Należy również dobrać współczynnik skalowy czasu:

$$a_t = \frac{\tau}{t}$$

t - czas rzeczywisty,

τ - czas maszynowy.

Współczynnik skalowy czasu powinien być tak dobrany, aby nie była przekroczona graniczna częstotliwość pracy wzmacniacza operacyjnego i jednocześnie, aby można było obserwować przebieg zmian na rejestratorze.

W omawianym przykładzie przyjęto następujące współczynniki skalowe:

$$a_{x_1} = 62500$$

$$a_{x_2} = 1500000$$

$$a_{\dot{x}_1} = 10000$$

$$a_{\dot{x}_2} = 20000$$

$$a_{x_1''} = 200$$

$$a_{x_2''} = 200$$

$$a_t = 100$$

Wykorzystując wcześniej (patrz rozdział 6.2) otrzymane przebiegi dla stanu ustalonego, przyjęto skalę czasu $a_t = 100$, co stanowi zmniejszenie skali w stosunku do skali czasu w stanie ustalonym 400-krotnie.

Badania przeprowadzono dla przedziału czasowego $t = 0 \div 0,4$ s, który obejmuje około pięciu okresów początkowych. Dla przykładu pierwszego (warunki początkowe zerowe) na rys. 7.1 pokazano przebiegi zmiennych x_1 i \dot{x}_1 , na rys. 7.3 odpowiednio zmienne x_2 i \dot{x}_2 . Osie rzędnych wycechowane są w jednostkach rzeczywistych. Pokazane przebiegi na obu rysunkach są mocno zniekształcone w porównaniu z odpowiednimi rozwiązaniami w czasie ustalonym. Uwidacznia się bardzo wyraźnie wpływ drgań własnych układu, szczególnie w pierwszych trzech okresach.

Przemieszczenie x_1 osiąga maksymalną wartość $x_{1\max} = 1,32 \cdot 10^{-4}$ m dla $t = 0,053$ s a odpowiednio $x_{2\max} = 5,35 \cdot 10^{-5}$ m dla $t = 0,036$ s.

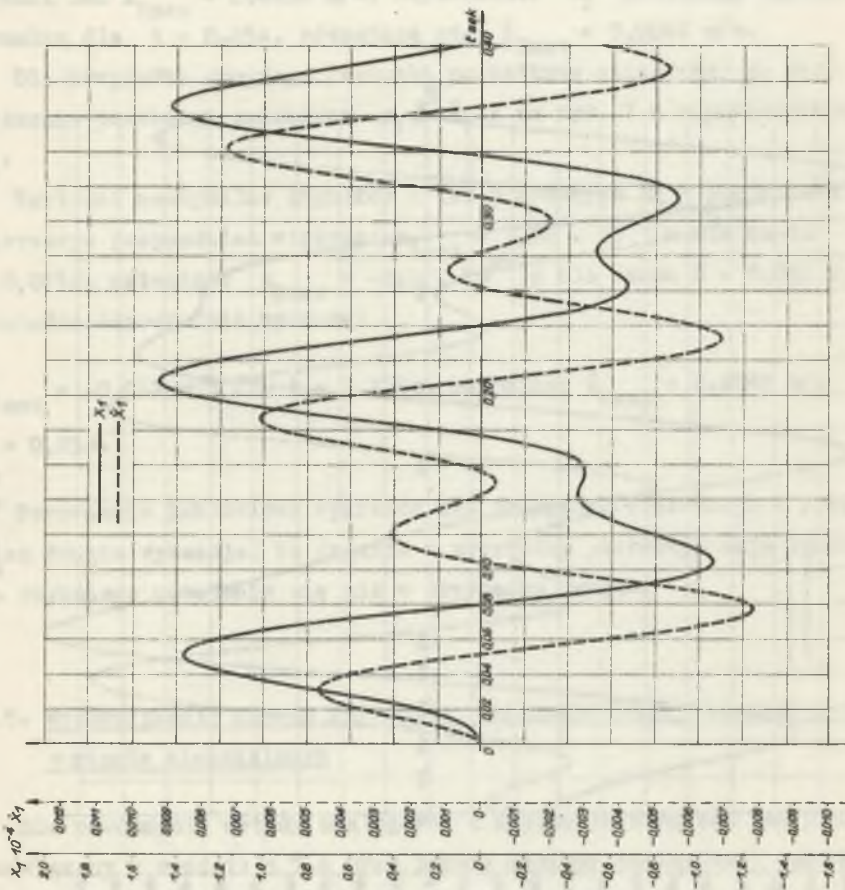
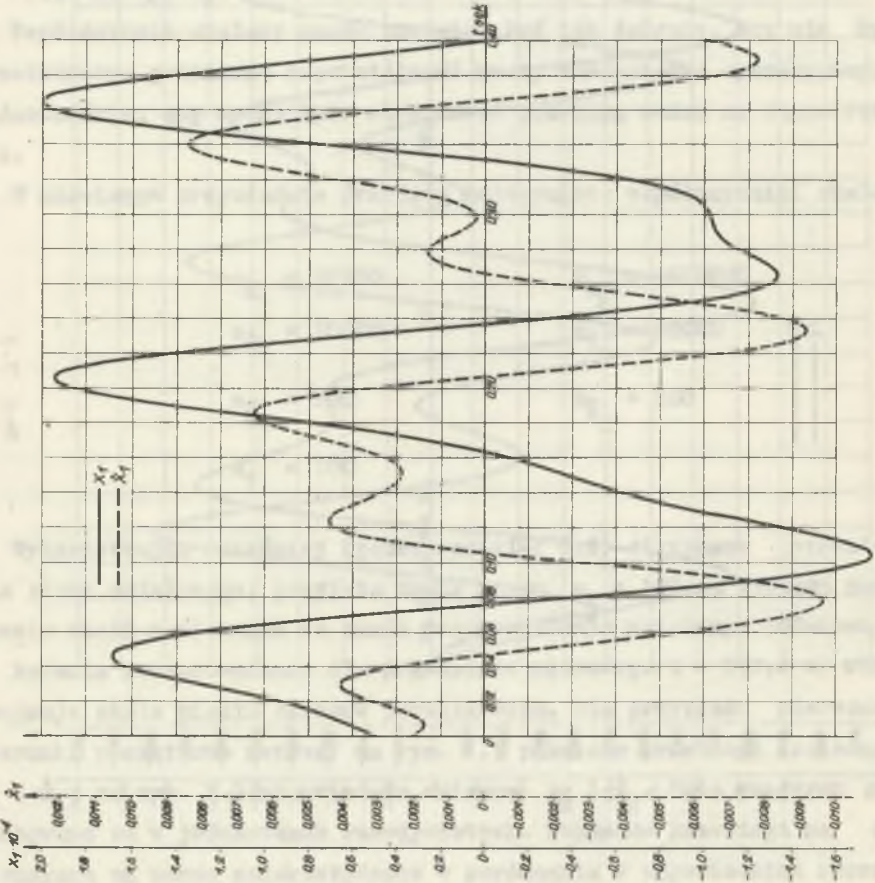


Fig. 7.1

... ..



Rys. 7.2

W miarę upływu czasu, amplitudy maksymalne obu sygnałów ulegają sta-
łemu zmniejszeniu. Szybciej ulega ustaleniu się przemieszczenie x_2
niż x_1 .

Przebiegi pierwszych pochodnych \dot{x}_1 i \dot{x}_2 są też zniekształcone, z
tym, że \dot{x}_2 ma charakter bardziej zbliżony do sinusoidalnego niż \dot{x}_1 .
Maksimum \dot{x}_1 osiąga dopiero w drugim okresie drgań dla $t = 0,206$ s i
wynosi ono $\dot{x}_{1\max} = 0,0092$ m/s, odpowiednio \dot{x}_2 przyjmuje wartość mak-
symalną dla $t = 0,054$, równającą się $\dot{x}_{2\max} = 0,0042$ m/s.

Dla przypadku drugiego (warunki początkowe niezerowe) na rys. 7.2
pokazano przebiegi zmiennych x_1 i \dot{x}_1 , a na rys. 7.4 odpowiednio x_2 i
 \dot{x}_2 .

Wartości maksymalne sygnałów i ich pochodnych są w porównaniu z
pierwszym przypadkiem większe: $x_{1\max} = 1,52 \cdot 10^{-4}$ m dla czasu $t =$
 $= 0,075$ s, natomiast $x_{2\max} = -8,0 \cdot 10^{-5}$ m dla czasu $t = 0,065$ s, a
pochodne odpowiednio wynoszą:

$\dot{x}_{1\max} = -0,012$ m/s dla $t = 0,205$ s, natomiast $\dot{x}_{2\max} = 0,0048$ m/s dla
 $t = 0,05$ s.

Porównanie jakościowe wykresów dla przypadku pierwszego z przypad-
kiem drugim wykazuje, że drgania w przypadku pierwszym mają tendencję
do szybszego ustalenia się niż w przypadku drugim.

7.5. Wykorzystanie maszyn cyfrowych do znalezienia postaci drgań w stanie nieustalonym

Dla porównania metody analogowej z metodą cyfrową ten sam przykład
rozwiązany w rozdziale 7.4 przy pomocy maszyny analogowej rozwiązano
na maszynie cyfrowej. Obliczenia wykonano również dla dwóch przypad-
ków: z warunkami początkowymi równymi zeru i różnymi od zera. Obli-
czeń dokonano na EMC Odra 1204. Wykorzystano do numerycznego rozwią-
zania układu równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty. Wyniki spraw-
dzono dla dwóch kroków całkowania $h_1 = 0,002$ s i $h_2 = 0,001$ s, w obu
przypadkach były one prawie identyczne.

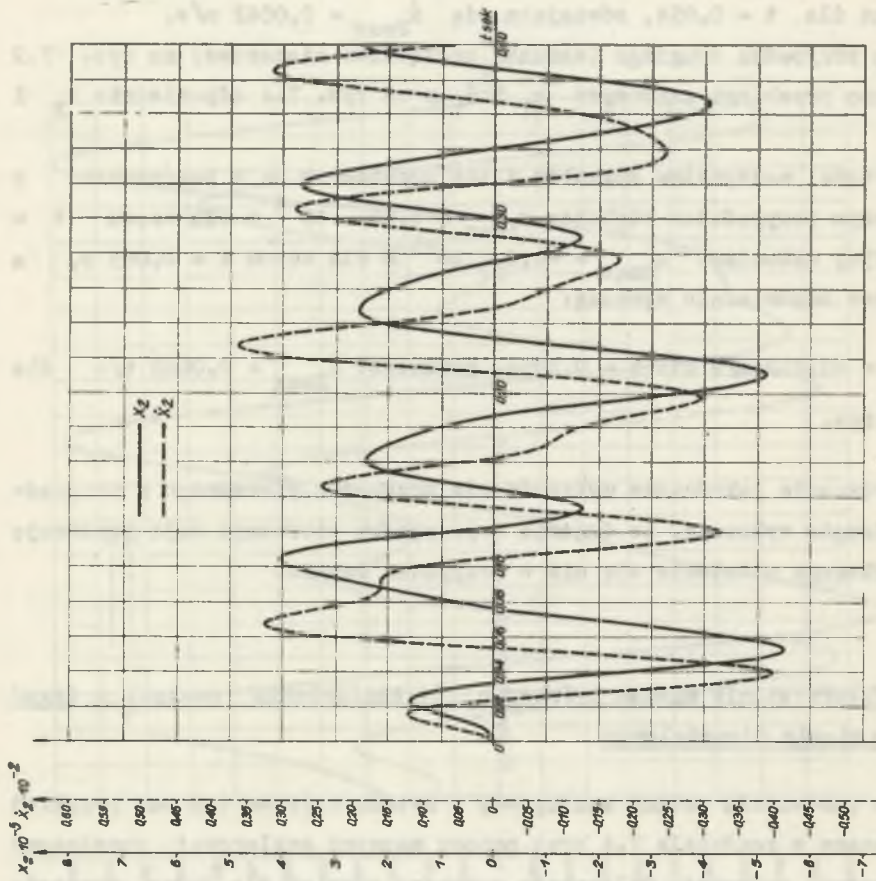


Рис. 7.3

This document contains information that is classified as CONFIDENTIAL. It is the property of the United States Government and is loaned to your agency. It and its contents are not to be distributed outside your agency.

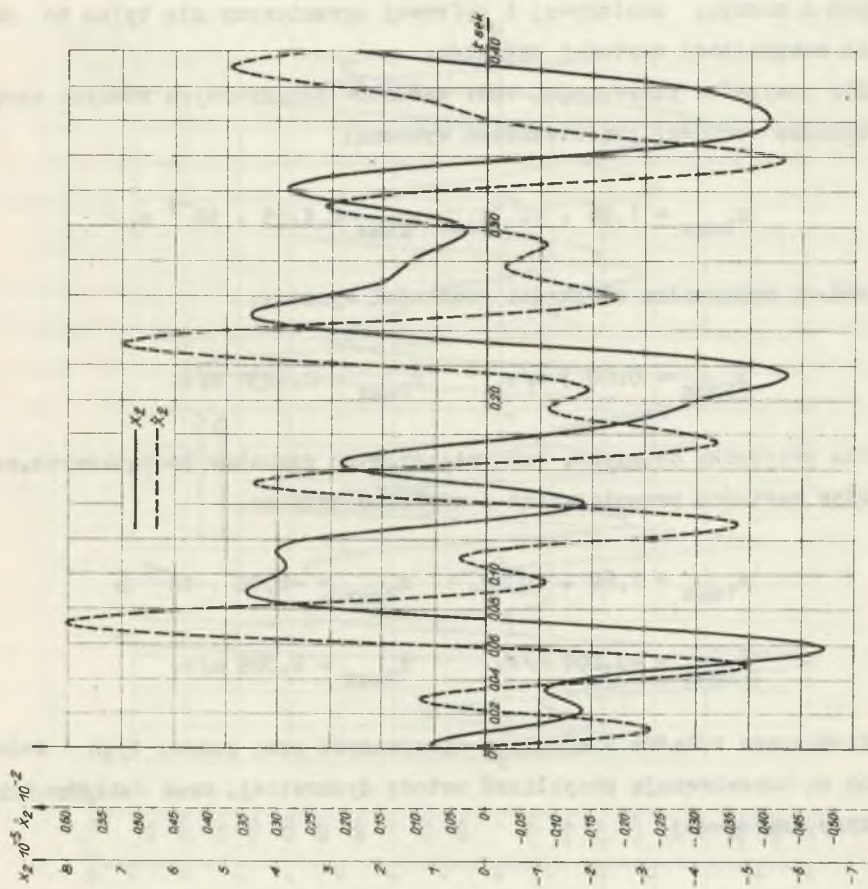


Fig. 7.4

Czas obliczeń przy pierwszym kroku całkowania w zakresie $t = 0,00 - 0,40s$ wyniósł około 15 min. Otrzymane wyniki liczbowe przemieszczeń x_1 i x_2 oraz ich pierwszych pochodnych posłużyły do sporządzenia wykresów przedstawionych na rysunkach (7.5 i 7.8).

Wykresy wykonano w identycznej skali co wydruki z maszyny analogowej, a to w celu łatwego ich porównania.

Ze względu na bardzo zbliżony charakter przebiegów rozwiązań otrzymanych z maszyny analogowej i cyfrowej ograniczymy się tylko do podania maksymalnej wartości sygnałów.

Dla przypadku pierwszego, tzn. warunków początkowych równych zeru, maksymalne wartości przemieszczeń wynoszą:

$$x_{1\max} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad x_{2\max} = 4,85 \cdot 10^{-5} \text{ m},$$

natomiast maksymalne wielkości prędkości wynoszą:

$$\dot{x}_{1\max} = 0,0073 \text{ m/s}, \quad \dot{x}_{2\max} = 0,0038 \text{ m/s}.$$

Dla przypadku drugiego, tzn. niezerowych warunków początkowych, maksymalne wartości przemieszczeń i amplitud wynoszą:

$$x_{1\max} = 1,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad x_{2\max} = -6,00 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\dot{x}_{1\max} = -0,009 \text{ m/s}, \quad \dot{x}_{2\max} = 0,006 \text{ m/s}.$$

Nieznaczne różnice w wynikach otrzymanych przy pomocy tych dwóch metod są konsekwencją przybliżeń metody dyskretnej, oraz dokładnością maszyny analogowej.

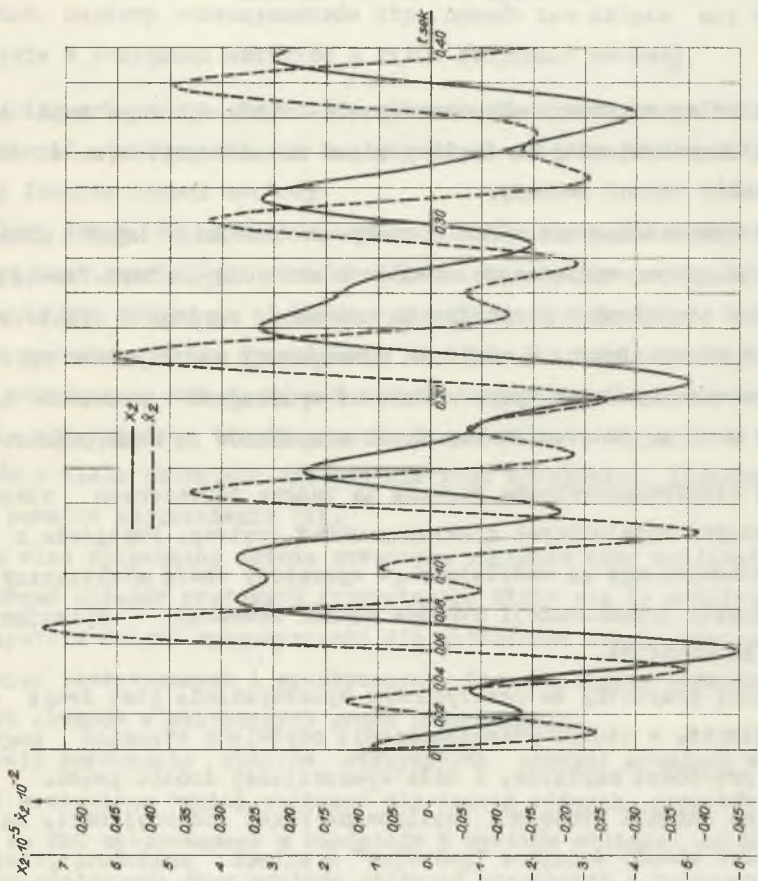


Рис. 7.8

8. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Głównym celem rozprawy było opracowanie metody wykorzystania analogii elektromechanicznej do analizy drgań układów prętowych o skończonej liczbie stopni swobody.

W pracy przeanalizowano różne sposoby modelowania drgań układów prętowych za pomocą sprzężonych obwodów elektrycznych. Rozpatrzono drgania wywołane obciążeniem harmonicznym zmiennym zarówno w stanie ustalonym jak i niestalonym. W analizie numerycznej wykorzystano cyfrowe i analogowe maszyny matematyczne. Wnioski wynikające z rozważań teoretycznych oraz na podstawie wykonanych przykładów są następujące:

- Analogia elektromechaniczna pozwala na budowę sprzężonych obwodów elektrycznych modelujących dyskretny układ prętowy. Przejście z układu mechanicznego na modelujący go sprzężony obwód elektryczny wymaga jednakże transformacji układów równań równowagi opisujących drgania mechaniczne.
- Najbardziej przydatny do praktycznego wykorzystania jest drugi system analogii, w którym przemieszczeniu odpowiada strumień magnetyczny, prędkości napięcie, a siła wymuszającej źródło prądu. Ze względu na warunki sprzężeń, realizowane przez indukcyjności, należy dobierać obwody drgające "podwójne" o siłach prądomotorycznych skierowanych przeciwnie.
- W praktyce projektowej zamiast budowy fizycznej modelu elektrycznego można obliczać układy mechaniczne metodami stosowanymi przy analizie liniowych obwodów prądu przemiennego. Opracowany w niniejszej pracy program na EMC pozwala na pełną automatyzację obliczeń, drgań

ustalonych z zamianą wielkości mechanicznych na elektryczne i na odwrót.

- Do obliczania drgań układów prętowych dyskretnych można również wykorzystywać maszyny analogowe. Dodatkową korzyścią jest w tym przypadku po ustaleniu warunków brzegowych możliwość łatwego otrzymania przebiegu stanów nieustalonych.

Ze względu jednak na pracochłonność związaną z ustaleniem skali amplitud, nastawy potencjometrów itp. sposób ten zaleca się stosować jedynie w przypadku ustrojów o kilku stopniach swobody.

Analiza wykonanych przykładów wykazała bezsporną przydatność metody analogii elektrycznej do analizy drgań układów prętowych o skończonej liczbie stopni swobody.

Należy dodać, że charakter metody umożliwia ujęcie wpływu różnorodnych cech konstrukcji oraz obciążenia wymuszającego drgania i prześledzenia ich wpływu na elektrycznym modelu symulacyjnym. Zaletą podanego sposobu analizy dynamicznej jest również fakt, że dzięki ściślemu rozwiązaniu układu równań różniczkowych odpadła potrzeba posługiwania się pojęciem "współczynnika dynamicznego". Pojęcie to dla ustrojów o wielu stopniach swobody nie jest bynajmniej jednoznaczne i budzi poważne zastrzeżenia [6].

Tak więc opracowana metoda stworzyła zupełnie nowe możliwości analizy drgań układów prętowych dyskretnych. Stało się to możliwe przede wszystkim dzięki wykorzystaniu dla obliczenia drgań mechanicznych osiągnięć teoretycznych i praktycznych teorii drgań, sprzężonych liniowych obwodów elektrycznych prądu przemiennego.

W celu porównania wyników otrzymanych różnymi metodami w tabeli 8.1 zestawiono wyniki obliczeń dla trzech różnych sposobów; programu na EMC opracowanego w rozdziale 5 wyników obliczeń uzyskanych z maszyny analogowej oraz wyników obliczeń uzyskanych z programu opracowanego przez autora w oparciu o odrębną metodę [16].

Jak wynika z analizy otrzymanych rezultatów, wyniki dla trzech różnych metod są bardzo podobne.

Korzyści ze stosowania zaproponowanej w pracy metody skłaniają do podjęcia kroków nad szerszą jej popularyzacją, a w szczególności nad wdrożeniem jej w biurach projektowych.

Tabela 8.1

Lp.	Rodzaj przykładu	Sposoby wykonania obliczeń		
		Program na emc	Kaszyna analogowa	Program porównawczy na emc
1	Belka stalowa dwuprzęsłowa z rozdziału 5.2			
	Amplitudy punktu 1			
	- przemieszczenie [m]	$4,66 \cdot 10^{-5}$	$4,80 \cdot 10^{-5}$	$4,62 \cdot 10^{-5}$
	- prędkość [m/s]	$3,89 \cdot 10^{-4}$	$4,20 \cdot 10^{-4}$	
	- przyspieszenie [m/s ²]	$3,23 \cdot 10^{-1}$	$3,20 \cdot 10^{-1}$	
	Amplitudy punktu 2			
- przemieszczenie	$2,77 \cdot 10^{-5}$	$2,70 \cdot 10^{-5}$	$2,53 \cdot 10^{-5}$	
- prędkość	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$2,40 \cdot 10^{-3}$		
- przyspieszenie	$1,92 \cdot 10^{-1}$	$1,90 \cdot 10^{-1}$		
2	Wieża wyciągowa z rozdziału 5.3			
	Amplitudy punktu 1			
	- przemieszczenie [m]	$0,523 \cdot 10^{-5}$	$0,55 \cdot 10^{-5}$	$0,524 \cdot 10^{-5}$
	- prędkość [m/s]	$2,18 \cdot 10^{-4}$	$3,40 \cdot 10^{-4}$	
	- przyspieszenie [m/s ²]	$1,54 \cdot 10^{-4}$		
	Amplitudy punktu 2			
	- przemieszczenie	$0,344 \cdot 10^{-4}$	$0,35 \cdot 10^{-4}$	$0,337 \cdot 10^{-4}$
	- prędkość	$6,09 \cdot 10^{-4}$	$6,30 \cdot 10^{-4}$	
	- przyspieszenie	$2,81 \cdot 10^{-4}$		
	Amplitudy punktu 3			
	- przemieszczenie	$0,476 \cdot 10^{-4}$	$0,49 \cdot 10^{-4}$	$0,463 \cdot 10^{-4}$
	- prędkość	$6,07 \cdot 10^{-4}$	$6,80 \cdot 10^{-4}$	
- przyspieszenie	$1,03 \cdot 10^{-4}$			
Amplitudy punktu 4				
- przemieszczenie	$0,689 \cdot 10^{-4}$	$7,10 \cdot 10^{-4}$	$0,669 \cdot 10^{-4}$	
- prędkość	$6,88 \cdot 10^{-4}$	$6,10 \cdot 10^{-4}$		
- przyspieszenie	$9,62 \cdot 10^{-3}$			

9. LITERATURA

- [1] Bishop R.E.D.: The matrix analysis of vibration. Cambridge University Press 1965.
- [2] Ciesielski R.: Obliczenia dynamiczne przy projektowaniu wysokich kominów żelbetowych. Budownictwo Przemysłowe nr 1-4/1954.
- [3] Cholewicki G.: Analiza obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 1962.
- [4] Dąbrowski O., Jarmońkiewicz L.: Analog elektryczny układów prętowych. Inżynieria i Budownictwo nr 12/1964.
- [5] Gawroński W., Kruszewski J.: Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych. Archiwum Budowy Maszyn nr 4/1972r.
- [6] Głomb J.A.: Niektóre problemy dynamiki mostów drogowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo nr 6, Gliwice 1962.
- [7] Gille J.C.: Serwomechanizmy. PWN, Warszawa 1971.
- [8] Gutienmacher Ł.I.: Elektrieszeskije modeli. AN SSRR, Moskwa 1949.
- [9] Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1968.
- [10] Kieropian K.K., Czegolin P.M.: Elektrieszeskoje modelirowanie w stroitielnoj mechanicznej. Gostrojizdat, Moskwa 1963.
- [11] Kisiel I.: Dynamika fundamentów pod maszyny. PWN, Warszawa 1957.
- [12] Lisowski A.: Technika analogii elektrycznych w budownictwie. Arkady, Warszawa 1969.
- [13] Lisowski A.: Analogowe maszyny matematyczne. PWN, Warszawa 1967.
- [14] Lisowski A., Siemieniec A.: Podstawy doświadczalnej analizy naprężeń i odkształceń. PWN, Warszawa 1966.
- [15] Mazurek A., Paszkiewicz T.: Elektryczne urządzenie analogowe do obliczania ustrojów statycznie niewyznaczalnych. Projekty - Problemy nr 8/1962.
- [16] Mazurek A.: Zastosowanie maszyn cyfrowych do obliczania drgań własnych budowli wieżowych. Inżynieria i Budownictwo nr 11/1966.
- [17] Müller L.: Teoria podobieństwa mechanicznego. WNT, Warszawa 1961.
- [18] Puchow G.E.: Elektrieszeskoje modelirowanie zadacz stroitielnoj mechanicznej. Izdat. Akademii Nauk USSR, Kijów 1963.

- [19] Rieznikow R.A.: Metody rieszienija zadacz stroitielnoj miechaniki na eliektronnych cifrowych maszinach. Giprotis, Moskwa 1964.
- [20] Solecki R., Szymkiewicz J.: Układy prętowe i powierzchniowe. Arkady, Warszawa 1964.
- [21] Śliwa J., Mazurek A. - Application of analoge computers to calculate dynamic blok foundations for machines. Proc. of the 44 th Euromech Collegium "Dynamics of Machine Foundations", Bucuresti 1973.
- [22] Szamin T.: Zastosowanie metody analogii elektrycznej do obliczania amplitud drgań fundamentów pod maszyny. Inżynieria i Budownictwo nr 4/1973.
- [23] Szamin T.: Obliczanie metodą analogii elektrycznej obciążonych osiowo bloków fundamentów pod maszyny. Inżynieria i Budownictwo nr 3/1963.
- [24] Szklarski L., Puchała T., Kieszkowski Z.I.: Współczesne metody modelowania ciągłego i cyfrowego w zastosowaniu do badania układów elektromechanicznych. PWN, Kraków 1964.
- [25] Szopliński Z.: Elektryczna technika analogowa. WNT, Warszawa 1969
- [26] Olson H.F.: Dynamical Analogies. D. Von Nostrand Co., New York 1958.
- [27] Zięba S. - Analiza drgań. PWN, Warszawa 1957.
- [28] Smirnov A.F.: Rascziet stroitielnych konstrukcii s primieniem eliektronnych maszin. Sobornik Statiej, Moskwa 1967.

S t r e s z c z e n i e

Głównym celem pracy było znalezienie metody pozwalającej na wykorzystanie analogii elektromechanicznej do analizy drgań układów prętowych o skończonej liczbie stopni swobody.

Ciągle rosnąca moc stymulatorów drgań na tle wyraźnej tendencji do stosowania nowoczesnych, ekonomicznych ustrojów nośnych, o zmniejszonej ciężarze i wymiarach wprowadza dodatkowe kryteria przydatności konstrukcji. Są nimi, pełna analiza drgań oraz utrzymanie wielkości amplitud przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w granicach dopuszczalnych. Duża pracochłonność obecnie stosowanych metod obliczeniowych, nawet z wykorzystaniem emc, skłoniła autora do poszukiwań nad możliwością wykorzystania metod analogowych w dynamice budowli.

W pracy przeanalizowano różne sposoby modelowania drgań układów prętowych za pomocą sprzężonych obwodów elektrycznych. Analizą objęto zarówno stany ustalone jak i nieustalone.

Obliczenia przykładów wykonano posługując się maszynami cyfrowymi i analogowymi. Rozważania teoretyczne jak i analiza wykonanych przykładów wykazały bezsporną przydatność metod analogii elektrycznej do analizy drgań układów prętowych o skończonej liczbie stopni swobody. Najbardziej przydatny okazał się ten system analogii, w którym przemieszczeniu odpowiada strumień magnetyczny, prędkości napięcie o sile wymuszającej źródło prądu.

Dzięki wykorzystaniu teorii drgań sprzężonych obwodów elektrycznych prądu przemiennego okazało się zupełnie niepotrzebne wprowadzenie jakichkolwiek pojęć "współczynnika dynamicznego". W pracy przedstawiono sposoby budowy fizycznych modeli elektrycznych służących do pomiaru poszukiwanych wielkości. Opracowano również specjalny program na emc pozwalający na pełną automatyzację obliczeń bez konieczności budowy modeli fizycznych. Wiele uwagi poświęcono w pracy modelowaniu

drażeń w stanie nieustalonym z wykorzystaniem elektronicznych maszyn analogowych.

Korzyści ze stosowania zaproponowanej metody skłaniają do szerokiej jej popularyzacji w szczególności w ośrodkach projektowych i konstrukcyjnych.

Резюме

Главной целью работы является создание метода, позволяющего использовать электромеханическую аналогию для анализа колебаний системы стержней с конечным количеством степеней свободы.

Постоянно растущая мощность стимуляторов колебаний при отчетливо намечающихся тенденциях применения современных и экономичных несущих конструкций с уменьшенными размерами и весом требует введения дополнительных критериев пригодности конструкций.

Таковыми критериями являются полный анализ колебаний, а также сохранение величины амплитуд перемещений, скоростей и ускорений в допустимых пределах.

Большая трудоёмкость применяемых в настоящее время методов расчета, даже с использованием ЭВМ, заставила автора исследовать возможности использования аналоговых методов в динамике сооружения.

В работе проанализированы разные способы моделирования колебаний систем стержней с помощью сопряжённых электрических цепей. Анализ охватывает как определённые так и неопределённые состояния. Примеры были рассчитаны на цифровых и аналоговых машинах. Теоретические рассуждения анализ проведенных расчетов показали несомненную пригодность методов электрической аналогии для анализа систем стержней с конечным количеством степени свободы. Наиболее подходящим оказался метод аналогии, в которой перемещению отвечает магнитная струя, скорости — напряжение, а сила прикладываемый ток.

Благодаря использованию теории колебаний сопряжённых электрических цепей переменного тока введение любых понятий "динамического коэффициента" оказалось совершенно лишним. В работе представлены способы построения физических электрических моделей для измерения искомой величины. Была также разработана программа на ЭВМ, позволяющая полностью автоматизировать расчёты без необходимости построения физических моделей.

В работе много внимания уделяется моделированию колебаний в неопределённом состоянии с использованием электронных аналоговых машин. Выводы, вытекающие из применения предложенного метода свидетельствуют о необходимости его широкого распространения, особенно в проектных и конструкторских организациях.

R é s u m é

Le but principal de cet ouvrage était de trouver une méthode permettant la mise à profit de l'analogie électromécanique dans l'étude des oscillations des systèmes réticulés ayant un chiffre défini de degrés de liberté.

La puissance des stimulateurs d'oscillations toujours grandissante sur le plan d'une tendance claire aux applications modernes des systèmes porteurs économiques, plus légers et moins dimensions introduit des critères supplémentaires d'aptitude des constructions. Ce sont: la pleine analyse des vibrations ainsi que l'entretien des grandeurs des déplacements, des vitesses et des accélérations dans les limites admissibles. L'application présente des méthodes de calculs très laborieuses, même la mise à profit des ordinateurs, a dirigé l'auteur à des recherches sur la possibilité de la mise à profit des méthodes analogues dans la dynamique des constructions. Dans l'élaboration on a étudié les façons diverses du modelage des oscillations des systèmes réticulés à l'aide de circuits électriques accouplés.

L'étude comport aussi les régimes permanents et transitoires. Les calculs des exemples ont été faits par l'application d'ordinateurs et de machines analogues. Les dissertations théoriques et l'analyse des exemples exécutés ont démontré l'aptitude primordiale des méthodes de l'analogie électrique dans l'analyse des oscillations des systèmes réticulés d'un nombre défini de degrés de liberté. Le système qui s'est montré le plus apte était le système d'analogie dans lequel fleu magnétique, la vitesse la tension à une force extorquante le courant électrique. Grâce à la mise à profit de la théorie des oscillations accouplées des circuits électriques du courant alternatif l'introduction de n'importe quels termes "du coefficient dynamique" s'est montrée inutile. Dans l'élaboration on a présenté les façons de construction des modèles électriques physiques servants pour la mesure

des grandeurs recherchées. On a élaboré aussi un programme special pour les ordinateurs permettant une automacité completé des calculs sans besoins de construction de modeles physique. Beaucoup d'attention on à attiré dans l'elaboration sur le modelage des vibrations dans le regime transitoire par la mise à profit des machines électro- niques analogues. Les benefices de cette méthode proposée inclinent vers son vaste applications surtout dans les centres de projection et de construction.