BUDOWNICTWO z. 38

JAN KUBIK

ANALOGIE I PODOBIEŃSTWO W LINIOWYCH OŚRODKACH ODKSZTAŁCALNYCH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 455 – GLIWICE 1975

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 455

JAN KUBIK

ANALOGIE I PODOBIEŃSTWO W LINIOWYCH OŚRODKACH ODKSZTAŁCALNYCH

GLIWICE 1975

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Włodzimierz Starosolski

SEKRETARZ REDAKCJI

Jan Znamirowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 100+170 Ark. wyd. 6 Ark. druk. 6,12 Papier offsetowy kl. III 70x100, 70 g
Oddano do druku 4 7.1975 Podpis. do druku 9.11.1975 Druk ukończ. w listopadzie 1975
Zamówienie 1291 75 T24 Cena zł 9 —

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

WSTĘP 5

Część I - ANALOGIE I PODOBIEŃSTWO W LINIOWYCH TEORIACH OŚRODKA ODKSZTAŁCALNEGO 7

Rozdział I - Liniowe teorie ośrodka ciągłego 9

1. Wprowadzenie 9
2. Założenia 10
3. Równania teorii szczególnych mechaniki ośrodka ciągłego..... 15
4. Analogie między rozwiązaniami w liniowych teoriach ośrodka ciągłego 17

Rozdział II - Klasyfikacja rozwiązań w liniowej teorii ośrodka ciągłego 23

5. Wprowadzenie 23
6. Pole dystrybucji i grupy strukturalne 24
7. Grupy przekształceń G_p ("w przestrzeni") 38
8. Algebry rozwiązań podobnych 44
9. Algebry rozwiązań podobnych w teoriach szczególnych 52
   9.1. Algebra rozwiązań podobnych w termo-lepkosprężystości.... 52
   9.2. Algebra rozwiązań podobnych w termosprężystości 53
   9.3. Algebra rozwiązań podobnych w teorii termo-starzenia 53
10. Symetrie w liniowych teoriach ośrodka odkształcalnego..... 54
   10.1. Układ niezmienników grupy $\mathcal{G}$..... 56
   10.2. Zadania optymalizacyjne 58

Rozdział III - Zastosowania 61

11. Przestrzeń i półprzestrzeń lepkosprężysta..... 61
   11.1. Macierze **B** algebr rozwiązań podobnych 61
   11.2. Rozwiązania podobne zadań brzegowych półprzestrzeni.... 63
   11.3. Analogie między rozwiązaniami zadań brzegowych półprzestrzeni 65
   11.4. Działanie siły masowej w półprzestrzeni..... 66
   11.5. Przemieszczenia normalne brzegu półprzestrzeni..... 67
   11.6. Działanie centrum ściskania 67

Str.

11.7. Działanie pola temperatur 68
11.8. Zastosowanie analogii między rozwiązaniami sprężystymi a starzejącymi się 69

Część II - PRZEPŁYWY MASY I CIEPŁA W CIELE LEPKOSPRĘŻYSTYM 73

Rozdział IV - Termodyfuzja lepkosprężysta 75

12. Równania termodyfuzji lepkosprężystej 75
13. Twierdzenia o wzajemności 84

Wnioski końcowe 89

Literatura cytowana w tekście 90

WSTĘP

Prezentowaną pracę należy uważać za próbę klasyfikacji niektórych rozwiązań problemów początkowo-brzegowych liniowych teorii ośrodka odkształcalnego (teorie: sprężystości, termosprężystości, lepkosprężystości i teoria starzenia się). Klasyfikacja ta wiąże się jak najściślej z odpowiedzią na zupełnie elementarne pytanie: kiedy i w jaki sposób można rozwiązania zadania początkowo-brzegowego jednej teorii liniowej (np. sprężystej) wykorzystać do konstruowania rozwiązania innego (też sprężystego lub np. lekosprężystego). Odpowiedź na sformułowane powyżej pytanie jest niezwykle ważna w zastosowaniach, z uwagi na trudności jakie występują przy rozwiązywaniu problemów brzegowych w każdej z dyscyplin mechaniki ciała odkształcalnego. Można również cel pracy scharakteryzować nieco inaczej, a mianowicie jako próbę maksymalnego wykorzystania informacji zawartych w rozwiązaniu jednego zagadnienia mechaniki ciała odkształcalnego do otrzymania informacji o innym rozwiązaniu. Dodajmy, że oprócz uzyskania wyników przydatnych w zastosowaniach, rozważania przeprowadzone w pracy mają również istotne znaczenie w poznawczej stronie wspomnianych teorii liniowych. Akcentując tutaj zastosowania bynajmniej nie zamierzamy pomniejszać strony poznawczej ponieważ przeprowadzona w pracy klasyfikacja rozwiązań pozwoliła wprowadzić zupełnie nową strukturę formalną w zbiorze rozwiązań. Wspomnianą strukturę zbudowano na pojęciach typowych dla: teorii grup, algebr liniowych, teorii reprezentacji i teorii przestrzeni Hilberta. Wprowadzona struktura formalna, której zauważenie stanowi treść poznawczą pracy, jest bardzo pomocną w jakościowych badaniach równań mechaniki ośrodka odkształcalnego. Dodajmy tutaj, iż badania te rozszerzają w sposób zasadniczy obszar zastosowań. Powyższy sposób podejścia pozwala na wykorzystanie pewnych wielomianowych przekształceń macierzowych, które przeprowadzają rozwiązanie jednego zadania w rozwiązanie problemu drugiego, z pominięciem równań tego ostatniego. Fakt, że każde rozwiązanie posiada przyporządkowaną mu całą przestrzeń innych rozwiązań, ograniczoną jednak z jednej strony tożsamością Cayley'a-Hamiltona, a z drugiej algebrą liniową zbudowaną na tej przestrzeni, wpływa w sposób istotny na klasyfikację tych rozwiązań; w tym przypadku postępowanie jest takie samo jak w algebrze liniowej. Przeniesienie to pozwala klasyfikować rozwiązania podobne uzyskane w mechanice, jednym słowem: klasy rozwiązań podobnych są jak najściślej opisane przez odpowiednie algebry.

W całej pracy zakłada się, że istnieją odwzorowania zadań początkowo-brzegowych np. przez przekształcenia całkowe (transformacja Fouriera lub Laplace'a por. [2,13,28,34,46,47,51,61,83,87]) na pewne równanie macierzowe (problem algebraiczny).

Pierwszy rozdział pracy poświęcony jest omówieniu podstawowych problemów, do których zaliczać będziemy formułowanie zagadnień brzegowych, a także konstruowanie analogii między teoriami szczególnymi. W drugim rozdziale pracy badamy pomocnicze właściwości rozwiązań i to takie, które umożliwiają stosowanie pola dystrybucji o elementach będących "współczynnikami" w rozwinięciach wielomianowych dla rozwiązań podobnych.

Ogólna analiza rozwinięć wielomianowych powołuje algebry liniowe, opisujące rozwiązania podobne w każdej teorii szczególnej. Opis w ramach algebry liniowej jest końcowym efektem pracy, na który złożyły się pozytywne odpowiedzi na sformułowane w poszczególnych rozdziałach problemy. Sformułowania tych problemów podporządkowane są uwypukleniu grupowego charakteru rozwiązań podobnych, który w konsekwencji pozwala określić odpowiednie algebry.

Praca w znacznym stopniu korzysta z dobrze już w chwili obecnej rozwiniętego aparatu formalnego równań liniowej mechaniki ośrodka odkształcalnego. Dosyć dobrze jest rozpoznany zakres zastosowań teorii sprężystości, termosprężystości i lepkosprężystości tak, że umożliwia to skuteczne podjęcie problematyki klasyfikacji rozwiązań w tych teoriach. Zauważmy, że postawione na samym początku zadanie można również sprowadzić do skonstruowania relacji równoważności, która dzieliłaby całą przestrzeń rozwiązań na zbiory rozłączne, w których znajdowałyby się rozwiązania podobne.

Sygnalizujemy tutaj jeszcze jeden z pośrednich celów pracy; istnieje mianowicie możliwość analizy wyników badań doświadczalnych. W tym zakresie praca wnosi także nowe idee. Umożliwiają one pełniejszą i wnikliwszą analizę następujących wyników: mając dane pomiarowe, np. przemieszczenie punktów tego samego ciała dla odpowiednich warunków początkowo-brzegowych, możemy odpowiedzieć na pytanie: które z warunków brzegowych - (w naprężeniach) realizują stan przynależny do jednej z teorii szczególnych. Rezultaty te są ważne zarówno poznawczo jak i w zastosowaniach.

Może nas zastanowić głęboko tkwiąca analogia między rozwiązaniami podobnymi, uzyskanymi w tej pracy a odpowiednimi rozwiązaniami spotykanymi w analizie wymiarowej. Istotnie, oba zadania można sprowadzić do dwóch równolegle postawionych zadań geometrycznych, określonych na tej samej przestrzeni. Podkreślamy, że idee tkwiące w analizie wymiarowej, a w szczególności jej właściwości grupowe inspirowały autora do napisania tej pracy.

Część I

ANALOGIE I PODOBIEŃSTWO W LINIOWYCH TEORIACH OŚRODKA ODKSZTAŁCALNEGO

ROZDZIAŁ I

LINIOWE TEORIE OŚRODKA CIĄGŁEGO

1. Wprowadzenie

Przed podaniem najważniejszych wyników tego rozdziału, związanych z klasyfikacją rozwiązań podobnych, musimy w sposób syntetyczny podać niektóre fakty z klasycznych działów liniowej mechaniki ciała odkształcalnego. Wobec powszechnie stosowanego - w drugim rozdziale pracy - aparatu formalnego teorii przestrzeni Hilberta i teorii grup, uważaliśmy za konieczne rozważania tego rozdziału budować na tych samych podstawach formalnych; w ten sposób uzyskuje się możliwość porównania wyników obu tych rozdziałów, a co najważniejsze - taki sposób ujęcia jest wygodny w przeprowadzonej klasyfikacji rozwiązań. Zajmując się liniowymi teoriami ośrodka odkształcalnego zwracamy uwagę na formalne podobieństwo równań poszczególnych teorii, widoczne nieraz dopiero po pewnych transformacjach. Podobieństwa te pozwalają rozwiązania równań jednej teorii wykorzystać do rozwiązań w innej. Na tej drodze otrzymujemy tzw. analogie. Pierwszą z takich analogii zauważyli Duhamel i Neumann; jest to analogia sił masowych i wpływów termicznych. Analogia ta występuje między równaniami teorii sprężystości a teorii naprężeń cieplnych i korzysta się z niej również przy poszukiwaniu rozwiązań w termo-lepkosprężystości i termo-starzeniu się.

Dalsze analogie w liniowej mechanice związane są z nazwiskami Hiltona, Lee, Alfrey'a, Sternberga, (por. [1,21,23,24,31,37,68]). Uwzględnienie wpływu temperatury na właściwości fizyczne ośrodka doprowadza do dalszych komplikacji równań, przekształcając różniczkowe równania problemu na pewne równania funkcyjne. Ze względu na prostotę otrzymanych równań najrozsądniejszym wydaje się przyjęcie - proponowane przez Leadermanna i Ferrego [30,57,64] - hipotezy ciała termo-reologicznie prostego. Myślą przewodnią tej hipotezy jest zastąpienie czasu fizykalnego pewnym czasem sprowadzonym; taki zredukowany czas, uwzględnia wpływ temperatury. Zmieniając skalę czasu powodujemy tzw. "skażenie" skali. Oczywiście, "skażenie" to należy uzyskać na podstawie pomiarów w naturze.

W przedstawionej tutaj pracy formułuje się ogólniejszą analogię występującą między rozwiązaniami starzejącymi się - z uwzględnieniem pola termicznego, a rozwiązaniami termo-sprężystymi. Analogia ta pozwala wykorzystać rozwiązanie sprężyste do wyznaczenia rozwiązania dla ośrodka starzejącego się.

Zakres każdej z wprowadzonych analogii określa również jej użyteczność. Patrząc z tego punktu widzenia należałoby założyć, że pole termiczne nie będzie wpływało na zmiany funkcji materiałowych: ośrodek izotropowy pozostanie izotropowym i jednorodnym. Na tym założeniu bazować będziemy przy budowie analogii wprowadzanych w niniejszej pracy. Dodatkowo podana w pracy analogia między rozwiązaniami termo-sprężystymi a termo-starzejącymi się zawiera jako przypadki szczególne: analogię sił masowych w lepkosprężystości, analogię Lee-Alfrey'a [1,31] oraz analogię Duhamela - Neumanna.

2. Założenia

Podamy teraz powszechnie przyjęte w liniowej teorii ośrodka ciągłego założenia i określenia pozwalające formułować odpowiednie zadania początkowo-brzegowe, a także analizować występujące tam równania. W pierwszej kolejności podamy twierdzenie Efrosa, dalej wyprowadzimy wynikające z niego konsekwencje w liniowej teorii ośrodków podlegających starzeniu się a następnie przytoczymy określenia i pojęcia dotyczące samej mechaniki.

a) Oznaczymy przez $f(x,t)$ funkcję zmiennych rzeczywistych $x = (x_1,x_2,x_3)$, t a przez $\bar{f}(x,p)$ odpowiadającą jej transformatę Laplace'a

$$(2.1)\quad f(x,t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \bar{f}(x,p) = \mathcal{L}\left[f(x,t)\right] \overset{df}{=} \int_0^{\infty} f(x,t)e^{-pt}\,dt, \qquad t\in[0,\infty)$$

Retransformatę funkcji $\bar{f}(x,p)$ definiujemy zależnością

$$(2.2)\quad \bar{f}(x,p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(x,p)\right] \overset{df}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(x,p)e^{pt}\,dp.$$

Podobnie transformatę Fouriera funkcji $f(x,t)$, ze względu na zmienną x, określa związek

$$(2.3)\quad f(x,t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\xi,t) = \mathcal{F}\left[f(x,t)\right] \overset{df}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)e^{-x\xi}\,dx,$$

gdzie $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, a $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$,

natomiast retransformatę określa równanie

$$(2.4)\quad \hat{f}(\xi,t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\xi,t)\right] \overset{df}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi,t)e^{+\xi x}\,d\xi$$

Złożenie przekształceń $\mathcal{F}$ (dla zmiennej x) i $\mathcal{L}$ (dla zmiennej t) jest operacją przemienną, tzn.

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{L}\left[.....\right] = \mathcal{L} \circ \mathcal{F}\left[.....\right].$$

W całej pracy stosować będziemy przekształcenia Laplace'a i Fouriera rozumiane w sensie wzorów (2.1) - (2.4).

TWIERDZENIE EFROSA [51,89].

Jeżeli $f(x,t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \bar{f}(x,p)$ i $H(t-\tau)\varphi(t,\tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(p)e^{-\tau q(p)}$, gdzie $\Phi(p)$ i $q(p)$ są funkcjami analitycznymi, to

$$\int_0^\infty \varphi(t,\tau)f(x,\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(p) \cdot \bar{f}(x,q(p)) \tag{2.5}$$

Podobnie, wykorzystując twierdzenie E f r o s a oraz całkowanie przez części otrzymujemy kolejne równości

$$Q(x,t) = \int_0^t \varphi(t,\tau)\,\frac{\partial^n f(x,\tau)}{\partial \tau^n}\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \bar{Q}(x,p),$$

gdzie:

$$\bar{Q}(x,p) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \varphi(t,\tau)H(t-\tau)\frac{\partial^n f(x,\tau)}{\partial \tau^n}\,d\tau\right]e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial^n f(x,\tau)}{\partial \tau^n}\left[\int_0^\infty \varphi(t,\tau)H(t-\tau)e^{-pt}\,dt\right]d\tau = \int_0^\infty \frac{\partial^n f(x,\tau)}{\partial \tau^n}\mathcal{L}\left[\varphi(t,\tau)H(t-\tau)\right]d\tau = \tag{2.6}$$

$$= \Phi(p)\left[q^n(p)\bar{f}(x,q(p)) - q^{n-1}(p)f(x,o) - q^{n-2}(p)f'(x,o) - \ldots - f^{n-1}(x,o)\right].$$

Przyjmując w twierdzeniu Efrosa: $\varphi(t,\tau) = \varphi(t-\tau)$ dla $t>\tau$ i $\varphi(t-\tau) \equiv 0$ - dla $t<\tau$ otrzymujemy twierdzenie Borela. Związany z twierdzeniem Efrosa splot (uogólniony) oznaczymy symbolem

$$f_1 \square f_2 \overset{df}{=} \int_0^t f_1(t,\tau)\, f_2(\tau)d\tau, \tag{2.7}$$

a zwykły splot oznaczymy

$$f_1 * f_2 \overset{df}{=} \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Algebra splotu (2.7) będzie w dalszej części pracy przydatna do rozwiązywania zadań teorii starzenia się, natomiast algebra splotu (2,8) posiada zastosowanie w liniowej lepkosprężystości por. np. [2,4,11,22,45 64,76,77,93] .

Podkreślamy tutaj, że wszelkie rozważania dotyczące teorii starzenia się uwzględniają założenie, że jądra $\varphi(t,\tau)$ związków całkowych splotu uogólnionego, które występują w odpowiednich równaniach, spełniają zależność $\int_\tau^\infty \varphi(t,\tau)e^{-pt}\,dt = \Phi(p)e^{-\tau q(p)}$.

Założenie to zawęża klasę rozpatrywanych materiałów, które podlegają starzeniu się.

b) W całej pracy rozważamy ciało stałe $\mathcal{B}$, ograniczone ustalonym brzegiem $\partial\mathcal{B}$, poddane działaniu: sił zewnętrznych, pola przemieszczeń i pola temperatury. Zakładamy, że materiał ośrodka w najogólniejszym przypadku podlega liniowym prawom dziedziczenia, nieinwariantnym z uwagi na zmianę skali czasowej (materiały starzejące się). Przyjmować będziemy, że stan wyjściowy przy temperaturze T_o będzie zatem stanem beznaprężeniowym i przyjmować go będziemy jako stan odniesienia (stan naturalny) przy określeniu stanu przemieszczeń i naprężeń. Nadmieniamy, że przypadkami szczególnymi liniowej teorii starzenia się, są wszystkie inne teorie rozpatrywane w pracy. Do opisu ruchu pola przemieszczeń, temperatur i obciążeń w ośrodku $\mathcal{B}$ używać będziemy wyłącznie prostokątnego układu współrzędnych kartezjańskich. Zbiór liczb $(x_1,x_2,x_3,t) = (x_i,t) = (x,t)$, przedstawia punkt w czasoprzestrzeni. Tensory naprężenia $\sigma_{ij}(x,t)$, odkształcenia $\varepsilon_{ij}(x,t)$, dalej dewiatory naprężenia $s_{ij}(x,t)$ i odkształcenia $e_{ij}(x,t)$ (zdefiniowane wzorami $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} s\,\delta_{ij}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} e\delta_{ij}$, gdzie $s = \sigma_{kk}$, $e = \varepsilon_{kk}$, a δ_{ij} jest symbolem Kroneckera) określone są w każdej cząstce x ciała $\mathcal{B}$ oraz przedziale czasowym $[0, +\infty)$. Przyjmujemy, że pole przemieszczeń $u_i(x,t)$ określone względem stanu odniesienia, będzie tej klasy, iż słusznymi pozostaną związki

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad i,j = 1,2,3. \tag{2.9}$$

W równaniach (2.9), a także w dalszej części pracy, przecinkiem umieszczonym za indeksem dolnym oznaczać będziemy różniczkowanie względem odpowiedniej współrzędnej występującej za przecinkiem. W całej pracy obowiązuje konwencja sumacyjna wobec małych liter alfabetu łacińskiego. Na mocy przyjętych powyżej założeń możemy utożsamić materialny i przestrzenny opis ruchu.

c) Chwilową temperaturę ośrodka oznaczymy przez T, a przyrost temperatury, w stosunku do temperatury odniesienia T_o przez $\Theta = T - T_o$. Chwilowa temperatura T winna spełniać klasyczne równania przewodnictwa cieplnego [6,12,17,42]

$$\Theta_{,kk} + \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta} = \frac{Q}{\varkappa}, \qquad \varkappa = \frac{\lambda_o}{\varrho c}, \qquad \dot{\Theta} = \frac{\partial\Theta}{\partial t}, \tag{2.10}$$

gdzie λ_o jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, c ciepłem właściwym, ϱ gęstością. Funkcję $Q(x,t)$ określamy wzorem $Q = \frac{w}{\varrho c}$, w którym w jest ilością ciepła wytworzoną przez źródło odniesioną do jednostki czasu i objętości.

d) Możemy teraz wprowadzić równania konstytutywne występujące w teorii starzenia się; równania te opisują związki fizyczne między tensorami stanu naprężenia $\sigma_{ij}(x,t)$ a odkształcenia $\varepsilon_{ij}(x,t)$. Związki te podamy jako zależności między dewiatorem stanu naprężenia s_{ij} a dewiatorem stanu odkształcenia e_{ij}

$$(2.11) \qquad s_{ij}(x,t) = \int_0^t \Psi_1(t,\tau)\, \frac{\partial e_{ij}(x,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau, \qquad i \neq j,$$

oraz jako relacje między pierwszymi niezmiennikami stanu odkształcenia $e(x,t)$ (dylatacja) a naprężenia $s(x,t)$.

$$(2.12) \qquad s(x,t) = \int_0^t \Psi_2(t,\tau) \left[\frac{\partial e(x,t)}{\partial \tau} - 3\,\alpha_T \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right] d\tau.$$

Wyrażając w związkach (2.11) dewiator naprężenia przez tensor naprężenia, a także uwzględniając (2.12), uzyskujemy poszukiwaną zależność między tensorami stanu naprężenia a tensorem prędkości odkształceń; ma ona postać

$$(2.13)\ \sigma_{ij}(x,t) = 2\mu(t,\tau) \square \dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau) + \delta_{ij} \left[\lambda(t,\tau) \square \dot{e}(x,\tau) - \gamma(t,\tau) \square \dot{\theta}(x,\tau) \right],$$

gdzie

$$2\mu(t,\tau) = \Psi_1(t,\tau), \quad \lambda(t,\tau) = \frac{1}{3} \left[\Psi_2(t,\tau) - \Psi_1(t,\tau) \right],$$

$$\gamma(t,\tau) = \alpha_T \Psi_2(t,\tau) = \alpha_T \left[3\lambda(t,\tau) + 2\mu(t,\tau) \right].$$

Równanie (2.13) ma budowę analogiczną do prawa Hooke'a w teorii sprężystości, z tym, że działanie mnożenia zastąpione jest uogólnionym mnożeniem splotowym, a tensory odkształceń i temperaturę zastąpić należy pochodnymi tych wielkości względem czasu.

Można również uwzględniać wpływ zmian temperatury θ na funkcje $\mu(t,\tau)$, $\lambda(t,\tau)$ wykorzystując postulat równoważności temperaturowo-czasowej. (por. E. Sternberg [64] i Rżanicyn [94]). Zagadnienie to stanowi oddzielny problem, którym w niniejszej pracy zajmować się nie będziemy.

e) Komplet równań termo-starzenia się ciał stałych obejmuje:

- związki konstytutywne

$$(2.14)\ \sigma_{ij}(x,t) = 2\mu(t,\tau) \square \dot{\varepsilon}_{ij}(x,t) + \delta_{ij} \left[\lambda(t,\tau) \square \dot{e}(x,t) - \gamma(t,\tau) \square \dot{\theta}(x,t) \right],$$

- równanie przewodnictwa ciepła (dla zagadnień niesprzężonych)

$$\Theta_{,ij} + \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta} = -\frac{Q}{\varkappa}; \tag{2.15}$$

- równanie pola

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (\varrho\ddot{u}_i), \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tag{2.16}$$

- równanie geometryczne

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \tag{2.17}$$

Podstawiając (2.17) do (2.14), a następnie uzyskane w ten sposób równanie do - (2.16) otrzymujemy po przekształceniach

$$\mu \square \dot{u}_{i,jj} + (\lambda+\mu) \square \dot{u}_{j,ji} + X_i - \gamma \square \dot{\Theta}_{,i} = 0 \quad (\varrho\ddot{u}_i), \tag{2.18}$$

tj. równanie przemieszczeniowe teorii termo-starzenia się.

Z równaniami (2.18) i (2,15) wiążemy następujące warunki początkowe i brzegowe:

$$u_i(x,t)\Big|_{x=x_1} = \overset{0}{u}_i(x,t), \quad \text{dla} \quad x \in \partial\mathcal{B}_1, \tag{2.19}$$

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x)\Big|_{x=x_2} = \Big[\mu(t,\tau) \square (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda(t,\tau) \square \dot{u}_{k,k} - \gamma(t,\tau) \square \dot{\Theta})\Big] n_j(x) = p_i(x,t), \quad \text{dla} \quad x \in \partial\mathcal{B}_2,$$

$$\partial\mathcal{B}_1 \cup \partial\mathcal{B}_2 = \partial\mathcal{B} \quad \text{i} \quad \partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2 = \phi,$$

$$\Theta(x,t)\Big|_{x=x_3} = A(x,t), \quad \text{dla} \quad x \in \partial\mathcal{B}_3, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial n}\Big|_{x=x_4} = B(x,t) \quad \text{dla} \quad x \in \partial\mathcal{B}_4,$$

$$\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial n} + \alpha\Theta(x,t)\Big|_{x=x_5} = C(x,t), \quad \text{dla} \quad x \in \partial\mathcal{B}_5,$$

$$\partial\mathcal{B}_3 \cup \partial\mathcal{B}_4 \cup \partial\mathcal{B}_5 = \partial\mathcal{B}, \quad \partial\mathcal{B}_3 \cap \partial\mathcal{B}_4 \cap \partial\mathcal{B}_5 = \phi,$$

(2.21) $$u_i(x,o) = \overset{o}{u}_i(x),$$

$$\dot{u}_i(x,o) = \overset{o}{\dot{u}}_i(x),$$

$$\Theta(x,o) = \overset{o}{\Theta}(x), \qquad \text{dla} \quad x \in \mathcal{B}.$$

3. Równania teorii szczególnych mechaniki ośrodka ciągłego

Podane w poprzedniej części pracy równania teorii starzenia się zawierają w sobie cały zbiór przypadków szczególnych, i tak np. przyjmując zamiast mnożenia ($\square$) mnożenie ($*$) otrzymujemy równanie lepkosprężystości. Rozpatrywanie każdego z takich przypadków z osobna prowadziłoby do analizy indywidualnej, a celem naszym jest synteza, stąd dążność w całej pracy do łącznego traktowania wszystkich liniowych teorii ośrodka odkształcalnego. Korzyść z takiego podejścia jest typowa dla ujęć ugólnych; w wyniku uzyskujemy ogólne właściwości równań mechaniki. We wszystkich wymienionych w tym rozdziale przypadkach teorii szczególnych zakładać będziemy że warunki początkowe i brzegowe drugiego rodzaju pozostają bez zmiany, niezależnie od rozpatrywanej teorii szczególnej. Jest to założenie bardzo istotne dla omawianych analogi (punkty 3,4). Mając na uwadze wyżej przytoczone założenia, uzyskamy następujące równania teorii szczególnych mechaniki ośrodka ciągłego.

a) Równania teorii starzenia się ($\Theta = 0$)

(3.1) $$\mu \square \dot{u}_{i,jj} + (\lambda+\mu) \square \dot{u}_{j,ji} + X_i = 0 \qquad (\varrho \ddot{u}_i),$$

b) Równania termo-lepkosprężystości ($\dot{u}_i \to u_i$, $(\square) \to (*)$; $\mu, \lambda, \vartheta \to \mu(t-\tau)$, $\lambda(t-\tau)$, $\vartheta(t-\tau)$[*])

(3.2) $$\mu * u_{i,jj} + (\lambda+\mu) * u_{j,ji} + X_i - \vartheta * \Theta_{,i} = 0, \qquad (\varrho \ddot{u}_i).$$

c) Równania izotermicznej lepkosprężystości ($\Theta = 0$, $\dot{u}_i \to u_i$, $(\square) \to (*)$, $\mu, \lambda, \vartheta \to \mu(t-\tau)$, $\lambda(t-\tau), \vartheta(t-\tau)$).

(3.3) $$\mu * u_{i,jj} + (\lambda+\mu) * u_{j,ji} + X_i = 0, \qquad (\varrho \ddot{u}_i).$$

---

[*] Związki fizyczne w termo-lepkosprężystości mają postać:

$$\sigma_{ij} = 2\mu * \varepsilon_{ij} + \lambda * \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} - \vartheta * \Theta \delta_{ij}.$$

d) Równania teorii naprężeń cieplnych ($\mathring{u}_i \to u_i$, $(\Box)\to(.)$; $\mu,\lambda,\vartheta \to \mu,\lambda,\vartheta$)

$$\mu\, u_{i,jj} + (\lambda+\mu)\, u_{j,ji} + X_i - \vartheta\Theta_{,i} = 0, \qquad (\varrho\ddot{u}_i) \tag{3.4}$$

e) Równania izotermicznej teorii sprężystości ($\mathring{u}_i \to u_i$, $(\Box)\to(.)$; $\Theta = 0$; $\mu,\lambda,\vartheta \to \mu,\lambda,\vartheta$).

$$\mu\, u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + X_i = 0, \qquad (\varrho\ddot{u}_i). \tag{3.5}$$

Zauważmy, że równania teorii szczególnych (związki (3.1 - 3.5) uzyskane były przez zmiany w następującym zbiorze funkcji $\{\mu,\lambda,\vartheta,\Theta\}$, a także przez wymienność operacji mnożenia $(\Box, *, \cdot)$.

Przejdziemy obecnie do określenia przekształceń przeprowadzających rozwiązania jednej teorii w rozwiązania innej. W tym celu wprowadzimy funkcyjną przestrzeń Hilberta, której elementami będą rozwiązania problemów początkowo-brzegowych (2.18) ÷ (2.21). Przestrzeń tę będziemy nazywać też przestrzenią fizyczną rozwiązań termo-starzejących się i oznaczać symbolem $\mathcal{X}_{T-ST}$. W przestrzeni tej iloczyn skalarowy określa (por. [32]) zależność

$$(u_i,\tilde{u}_i) = \left[\int_B \int_0^\infty u_i(x,\tau)\, \tilde{u}_i(x,\tau)\,dx\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad u_i,\tilde{u}_i \in \mathcal{X}_{T-ST} \tag{3.6}$$

Ponieważ rozwiązania przedstawionych problemów brzegowych są wektorami przeto spełniają one aksjomaty przestrzeni Hilberta. W zupełnie analogiczny sposób określa się przestrzenie fizycznych rozwiązań: starzejących się $\mathcal{X}_{ST}$, termo-lepkosprężystych $\mathcal{X}_{T-L-S}$, lepkosprężystych $\mathcal{X}_{L-S}$, teorii naprężeń cieplnych $\mathcal{X}_{T-S}$, i sprężystych $\mathcal{X}_{S}$.

Wprowadzamy następujące przekształcenia:

$$\mathcal{K}_a^{-1} : u_i(x,t;\mu(t,\tau),\lambda(t,\tau),\vartheta(t,\tau);\ \Theta,\ X_i;\Box)_{T-ST} \longrightarrow \tag{3.7}$$

$$\longrightarrow u_i(x,t;\ \mu(t,\tau),\lambda(t,\tau),\vartheta(t,\tau);\ X_i;\Box)_{ST},\quad \mathcal{X}_{T-ST} \xrightarrow[(na)]{\mathcal{K}_a^{-1}} \mathcal{X}_{ST}.$$

Przekształcenie powyższe oznacza, iż rozwiązania teorii termo-starzenia się zawierają jako przypadek szczególny rozwiązania starzejące się, które są elementami przestrzeni $\mathcal{X}_{ST} \subset \mathcal{X}_{T-ST}$;

$$\mathcal{K}_b^{-1} : u_i(x,t;\mu(t,\tau),\lambda(t,\tau),\vartheta(t,\tau);\ \Theta,\ X_i;\Box)_{T-ST} \longrightarrow \tag{3.8}$$

$$\longrightarrow u_i(x,t;\ \mu(t-\tau),\lambda(t-\tau),\vartheta(t-\tau);\ \Theta,\ X_i;*)_{T-L-S},\quad \mathcal{X}_{T-ST} \xrightarrow[(na)]{\mathcal{K}_b^{-1}} \mathcal{X}_{T-L-S}$$

Przekształcenie (3.8) oznacza, że rozwiązania teorii termo-starzenia się zawierają jako przypadek szczególny rozwiązania termo-lepkosprężyste, które są elementami przestrzeni $\mathcal{W}_{T-L-S} \subset \mathcal{W}_{T-ST}$;

$$\mathfrak{K}_c^{-1} : u_i(x,t;\ \mu(t,\tau), \lambda(t,\tau), \vartheta(t,\tau)\ ;\Theta,\ X_i;\ \square)_{T-ST} \longrightarrow$$

(3,9)

$$\longrightarrow u_i(x,t;\ \mu(t-\tau), \lambda(t-\tau), \vartheta(t-\tau);\ X_i;\ *)_{L-S},\quad \mathcal{W}_{T-ST} \xrightarrow[(na)]{\mathfrak{K}_c^{-1}} \mathcal{W}_{L-S}$$

Odwzorowanie (3.9) przeprowadza rozwiązanie teorii termo-starzenia się (niektóre elementy przestrzeni $\mathcal{W}_{T-ST}$) w rozwiązanie lepko-sprężyste $\mathcal{W}_{L-S}$

$$\mathfrak{K}_d^{-1} : u_i(x,t;\ \mu(t,\tau), \lambda(t,\tau), \vartheta(t,\tau);\ \Theta,\ X_i;\ \square)_{T-ST} \longrightarrow$$

(3.10)

$$\longrightarrow u_i(x,t;\ \mu,\ \lambda\ ,\vartheta\ ;\Theta,X_i;\ \cdot)_{T-S} \qquad \mathcal{W}_{T-ST} \xrightarrow[(na)]{\mathfrak{K}_d^{-1}} \mathcal{W}_{T-S}$$

Operator $\mathfrak{K}_d^{-1}$ przyporządkowuje rozwiązaniom teorii termo-starzenia się rozwiązania teorii naprężeń cieplnych,

$$\mathfrak{K}_e^{-1} : u_i(x,t;\ \mu(t,\tau), \lambda(t,\tau), \vartheta(t,\tau)\ ;\Theta,\ X_i;\ \square)_{T-ST} \longrightarrow$$

(3.11)

$$\longrightarrow u_i(x,t;\ \mu\ ,\lambda\ ,\vartheta\ ;\Theta,\ X_i;\ \cdot)_S,\qquad \mathcal{W}_{T-ST} \xrightarrow[(na)]{\mathfrak{K}_e^{-1}} \mathcal{W}_S$$

Odwzorowanie (3.11) jest analogiczne do poprzednich w zakresie teorii termo-starzenia się i teorii sprężystości.

Można również rozpatrywać przekształcenia innego typu, np. przestrzeni $\mathcal{W}_{T-L-S} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-S}$, $\mathcal{W}_{ST} \longrightarrow \mathcal{W}_S$, $\mathcal{W}_{ST} \longrightarrow \mathcal{W}_{L-S}$ itd. Z uwagi jednak na małą wartość poznawczą przekształceniami tymi zajmować się nie będziemy.

W punkcie następnym przejdziemy do omówienia przekształceń odwzorowujących rozwiązania sprężyste, czy też termo-sprężyste na rozwiązania teorii lepkosprężystych i teorii starzejących się. Przekształcenia te w literaturze przedmiotu noszą nazwę analogii.

4. Analogie między rozwiązaniami w liniowych teoriach ośrodka odkształcalnego

Znając sposoby uzyskiwania rozwiązań sprężystych, zastanowimy się nad procedurą poszukiwania rozwiązań w pozostałych teoriach liniowej mechaniki ośrodka ciągłego. Procedura ta polega na wykorzystaniu rozwiązań sprężystych i termosprężystych. Takie postępowanie posiada istotne znaczenie w mechanice ciała odkształcalnego. Wynika ono z kilku faktów: po pierwsze,

rozwój mechaniki ośrodka ciągłego rozpoczął się od teorii sprężystości, stąd znane rozwiązania zadań początkowo-brzegowych w teorii sprężystości próbowano wykorzystywać do rozwiązywania analogicznych problemów w innych teoriach; po drugie, postępowanie takie umożliwia porównywanie sposobów rozwiązywania zadań (ważnych w zastosowaniach) a proponowanych przez różne teorie, - w stosunku do rozwiązań sprężystych.

Obecnie przystąpimy do omówienia analogii między rozwiązaniami sprężystymi lub termosprężystymi a innymi rozwiązaniami liniowej mechaniki ośrodków ciągłych. Ponieważ najogólniejszą analogią (z której wynikać będą pozostałe) będzie analogia między rozwiązaniami termosprężystymi a termostarzejącymi się, przejdziemy dalej do porównania transformat Laplace'a odpowiednich równań i warunków początkowo-brzegowych opisujących problemy charakterystyczne dla tych dyscyplin (równania (2.18), (3.4):

$$(4.1)\qquad \bar{\mu}\bar{u}_{i,jj}(x,q(p)) + (\bar{\lambda}_0 + \bar{\mu}_0)\bar{u}_{j,ji}(x,q(p)) + \bar{X}_i(x,p) - \bar{\gamma}_0\bar{\Theta}_{,i}(x,q(p)) = 0$$

$$(4.2)\qquad \mu\bar{U}_{i,jj}(x,p) + (\lambda+\mu)\,\bar{U}_{j,ji}(x,p) + \bar{X}_i(x,p) - \gamma\bar{\Theta}_{,i}(x,p) = 0.$$

W równaniu (4.1) mając na uwadze założenia twierdzenia Efrosa, wprowadzono następujące nowe funkcje:

$$\mathcal{L}\left[H(t-\tau)\,\Psi_1(t,\tau)\right] = e^{-\tau q(p)}\,\frac{2\,\bar{\mu}_0(p)}{q(p)}$$

$$(4.3)\qquad \mathcal{L}\left[H(t-\tau)\,\Psi_2(t,\tau)\right] = e^{-\tau q(p)}\,\frac{3\bar{\lambda}_0(p) + 2\,\bar{\mu}_0(p)}{q(p)}$$

$$\bar{\gamma}_0(p) = 3\,\bar{\lambda}_0(p) + 2\,\bar{\mu}_0(p).$$

Po przetransformowaniu pierwszego warunku brzegowego uzyskamy

$$\bar{u}_i(x,p)\Big|_{x=x_1} = \overset{\circ}{\bar{u}}_i(x_1,p), \qquad \text{dla} \quad x_1 \in \partial\mathcal{B}_1,$$

$$(4.4)\qquad \bar{U}_i(x,p)\Big|_{x=x_1} = \overset{\circ}{\bar{U}}_i(x_1,p), \qquad \text{dla} \quad x_1 \in \partial\mathcal{B}_1$$

Funkcje występujące po prawych stronach równań (4.4) połączone są związkiem

$$(4.5)\qquad \overset{\circ}{\bar{U}}_i(x_1,p) = \frac{1}{\bar{\mu}_0(p)}\,\mathcal{L}\left[\int_0^\infty \mu(t,\tau)\,\overset{\circ}{u}_i(x_1,\tau)\,d\tau\right].$$

Równanie (4.5) wynika z porównania równań (4.2) i (4.1) oraz twierdzenia Efrosa. Retransformując związek (4.5) otrzymujemy przyporządkowany pierwszemu warunkowi brzegowemu w termo-starzeniu, odpowiadający mu warunek brzegowy w termosprężystości; po przekształceniach ma on postać

$$\overset{o}{U}_i(x,t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{\mu}_o^{-1}(p)\right] \int_0^\infty \mu(t,t')\, \overset{o}{u}_i(x,t')\, dt'\, dt. \tag{4.6}$$

Transformując warunki brzegowe w naprężeniach otrzymujemy

$$\left\{ \bar{\mu}_o(p)\left[\bar{u}_{i,j}(x,q(p)) + \bar{u}_{j,i}(x,q(p))\right] + \delta_{ij}\left[\bar{\lambda}_o(p)\bar{u}_{k,k}(x,q(p))\right]\right\} n_j(x)\Big|_{x=x_2} =$$

$$= \bar{p}_i(x_2,p) + \bar{\vartheta}_o(p)\,\bar{\Theta}(x_2,q(p))\,\delta_{ij}\,n_j(x_2), \qquad x_2 \in \partial\mathcal{B}_2,$$

$$\left\{ \mu\left[\bar{U}_{i,j}(x,p) + \bar{U}_{j,i}(x,p)\right] + \delta_{ij}\left[\lambda\,\bar{U}_{k,k}(x,p)\right]\right\} n_j(x)\Big|_{x=x_2} \tag{4.7}$$

$$= \bar{P}_i(x_2,p) + \vartheta\,\bar{\Theta}(x_2,p)\,\delta_{ij}\,n_j(x_2).$$

Przyjmować będziemy, że warunki początkowe dla ośrodka starzejącego się i sprężystego, będą takie same

$$u_i(x,o) = U_i(x,o) \tag{4.8}$$

Mając przetransformowane równania przemieszczeniowe i warunki brzegowe, przystępujemy do sformułowania analogii między rozwiązaniami termosprężystymi a termostarzejącymi się; analogię tę oznaczać będziemy symbolem $\mathfrak{A}_1$.

ANALOGIA $\mathfrak{A}_1$. Przyjmując identyczność warunków początkowych, drugich warunków brzegowych, a także przekształcony wg równania (4.6) warunek brzegowy (pierwszego rodzaju), a następnie porównując równania (4.1) i (4.2), stwierdzamy zupełną analogię, którą symbolicznie ujmujemy następująco:

$$\bar{U}_i(x,p) \longrightarrow \bar{u}_i(x,q(p)); \quad \bar{X}_i(x,p) \longrightarrow \bar{X}_i(x,p), \quad \bar{\Theta}(x,p) \longrightarrow \bar{\Theta}(x,q(p)),$$

$$\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}_o(p), \quad \mu \longrightarrow \bar{\mu}_o(p), \quad \vartheta \longrightarrow \bar{\vartheta}_o(p); \quad p \longrightarrow q(p), \tag{4.9}$$

$$(\cdot) \longrightarrow (\Box)$$

Jest to analogia między problemem początkowo-brzegowym ośrodka termo-starzejącego się a termosprężystego. Zmiana zmiennych $p \longrightarrow q(p)$ odnosi się tylko do pola przemieszczeń i temperatur. Analogię tę wykorzystujemy do uzyskania rozwiązania termostarzejącego się, dokonując następujących operacji:

1) znając rozwiązanie zadania "początkowo"-brzegowego teorii naprężeń cieplnych ze zmodyfikowanym - wg wzoru (4.6) - pierwszym warunkiem brzegowym tj. znając funkcje

$$U_i(x,t) = F_i(x,t;\mu,\lambda,\vartheta,\Theta(x,t)), \tag{4.10}$$

dokonujemy jej transformacji i zmieniamy występujące w niej symbole zgodnie ze schematem (4.9). W wyniku końcowym otrzymujemy równanie

$$u_i(x,q(p)) = \bar{F}_i(x,\bar{q}(p);\ \bar{\mu}_0(p),\ \bar{\lambda}_0(p),\ \bar{\vartheta}_0(p),\ \Theta(x,q(p))) \equiv \bar{f}_i(x,p). \tag{4.11}$$

2) stosując do równania (4.11) twierdzenie Efrosa otrzymujemy następujące równanie całkowe

$$\int_0^\infty \mu(t,\tau)u_i(x,\tau)d\tau = \int_0^t f_i(x,\tau)\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\bar{\mu}_0(p)}{q(p)}\right]_{t-\tau} d\tau, \tag{4.12}$$

z którego po rozwiązaniu uzyskujemy ostatecznie poszukiwaną funkcję $u_i(x,t)$ dla ośrodka termostarzejącego się.

Z analogii $\mathfrak{A}_1$ jako szczególny przypadek wynika analogia $\mathfrak{A}_2$:

ANALOGIA $\mathfrak{A}_2$. Analogia ta występuje między rozwiązaniem zadań teorii sprężystości a rozwiązaniem problemów dla ośrodka starzejącego się. W tym celu wystarczy w analogii $\mathfrak{A}_1$ założyć, że $\Theta(x,t) \equiv 0$, co modyfikuje warunek (4.9) w sposób następujący

$$\begin{gathered}\bar{U}_i(x,p) \longrightarrow u_i(x,q(p));\quad \bar{X}_i(x,p) \longrightarrow \bar{X}_i(x,p),\\ \lambda \longrightarrow \bar{\lambda}_0(p),\quad \mu \longrightarrow \bar{\mu}_0(p);\ p \longrightarrow q(p);\ (\cdot) \longrightarrow (\square).\end{gathered} \tag{4.13}$$

ANALOGIA $\mathfrak{A}_3$. Kolejną analogię szczególną w stosunku do $\mathfrak{A}_1$ jest analogia Hiltona [64,23] pozwalająca wykorzystać rozwiązania sprężyste do poszukiwania rozwiązań w niesprzężonej termo- lepkosprężystości. W naszej klasyfikacji ograniczymy się przy omawianiu tej analogii do zagadnień quasistatycznych. Przyjmując kolejną modyfikację warunku (4.9) otrzymamy

$$\bar{U}_i(x,p) \longrightarrow \bar{u}_i(x,p); \qquad \bar{X}_i(x,p) \longrightarrow X_i(x,p) - \vartheta_0(p)\,\bar{\Theta}_{,i}(x,p),$$

(4.14)

$$\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}(p), \quad \mu \longrightarrow \bar{\mu}(p), \quad \vartheta \longrightarrow \bar{\vartheta}(p); \quad p \longrightarrow p; \quad (\cdot) \longrightarrow (*).$$

Przytoczona tutaj analogia może być uważana za połączenie analogii sprężysto-lepkosprężystej $\mathcal{K}_4$ oraz analogii sił masowych $\mathcal{K}_5$;

ANALOGIA $\mathcal{K}_4$. Rozwiązanie sprężyste i lepkosprężyste łączy analogia sformułowana przez E.H. Lee i T. Alfrey'a [1,31,64,67] . Analogia ta jest szczególnym przypadkiem analogii $\mathcal{K}_1$, którą uzyskujemy przez zmodyfikowanie warunków (4.9). Przyjmują one postać

$$U_i(x,p) \longrightarrow u_i(x,p); \qquad X_i(x,p) \longrightarrow X_i(x,p),$$

(4.15)

$$\lambda \longrightarrow \bar{\lambda}(p), \quad \mu \longrightarrow \bar{\mu}(p), \vartheta \longrightarrow \vartheta(p); \quad p \longrightarrow p; \quad (\cdot) \longrightarrow (*)$$

ANALOGIA $\mathcal{K}_5$. Ostatnią z rozpatrywanych w naszej pracy analogii będzie analogia między rozwiązaniami teorii sprężystości a teorią naprężeń cieplnych. Analogię tę zauważyli Duhamel i Neumann [6,17]; wynika ona ze zmodyfikowanych podobnie do (4.15) warunków (4,9)

$$\bar{U}_i(x,p) \longrightarrow \bar{u}_i(x,p); \qquad \underline{\bar{X}_i(x,p) \longrightarrow \bar{X}_i(x,p) - \vartheta\,\bar{\Theta}_{,i}(x,p)}$$

(4.16)

$$\lambda \longrightarrow \lambda \;, \quad \mu \longrightarrow \mu \;, \quad \vartheta \longrightarrow \vartheta \;; \quad p \longrightarrow p; \quad (\cdot) \longrightarrow (\cdot).$$

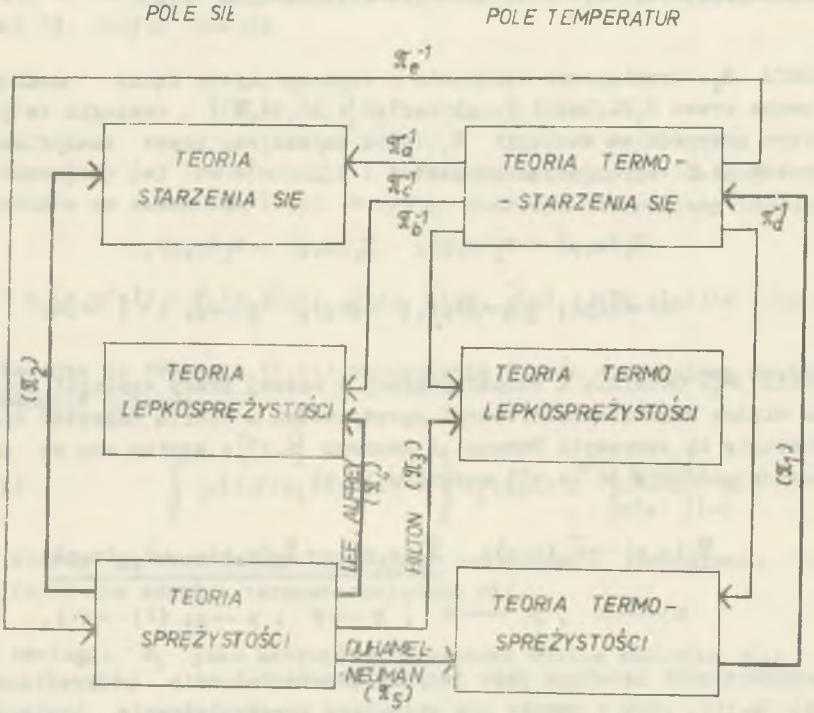
W rzeczywistości istotnym jest jedynie przekształcenie podkreślone w wyrażeniu (4.16), gdyż z reguły nie stosujemy przekształcenia Laplace'a przy tego rodzaju zadaniach quasistatycznych.

Przedstawione poprzednio analogie mają zastosowanie przy analizie ogólnych właściwości równań liniowej mechaniki ośrodka ciągłego oraz przy rozwiązywaniu problemów początkowo-brzegowych we wspomnianych dyscyplinach. Zauważmy, że znajomość analogii $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_5$ pozwala konstruować dalsze analogie, np. między rozwiązaniami teorii sprężystości a - termostarzenia się. Należy stwierdzić jednak, iż wykorzystanie rozwiązań termosprężystych w teorii termostarzenia się będzie bardziej dogodne niż posiłkowanie się rozwiązaniami sprężystymi. W naszej pracy tego typu analogiami nie zajmowaliśmy się z uwagi na ich charakter wtórny w stosunku do analogii $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_5$.

Zwróćmy jeszcze uwagę na trudności jakie wynikają z wykorzystania przedstawionych analogii przy konstruowaniu rozwiązań odpowiednich teorii. Najłatwiej stosować analogię Duhamela-Neumanna (uzyskanie rozwiązań w teorii naprężeń cieplnych), trudniej analogię sprężysto-lepkosprężystą, wreszcie

najtrudniej podaną tutaj, analogię między rozwiązaniami sprężystymi a rozwiązaniami teorii termo-starzenia się.

Omówione w niniejszym rozdziale analogie można w sposób przejrzysty przedstawić w następującym układzie.



Rys. 1. Analogie w liniowej mechanice ośrodka ciągłego

ROZDZIAŁ II

KLASYFIKACJA ROZWIĄZAŃ W LINIOWEJ TEORII OŚRODKA CIĄGŁEGO

5. Wprowadzenie

W poprzednim rozdziale dokonano podziału całej przestrzeni rozwiązań W na podprzestrzenie w których elementami były rozwiązania teorii szczególnych. Próbowano również, w możliwie wyczerpujący sposób, analizować przekształcenia zachodzące między tymi rozwiązaniami. Najbardziej użytecznymi przekształceniami wspomnianego typu były tzw. analogie w liniowych ośrodkach odkształcalnych; odnosiły się one do odpowiadających sobie rozwiązań w różnych teoriach szczególnych.

W niniejszym rozdziale skupimy naszą uwagę na przekształceniach przeprowadzających jedno rozwiązanie w drugie, lecz takich, które realizowane są w obrębie jednej teorii. Analiza przekształceń tego typu wynika z chęci poznania struktury wewnętrznej mechaniki ciała odkształcalnego a także - z możliwości skonstruowania klas rozwiązań podobnych; przy czym przez rozwiązania podobne rozumieć będziemy rozwiązania problemów początkowo-brzegowych o odpowiednio zmodyfikowanych polach: sił i temperatur oraz pierwszych i drugich warunkach brzegowych.

Aby realizować takie przekształcenia stosować będziemy aparat formalny teorii grup, gdyż występowanie wspomnianych wyżej rozwiązań podobnych związane jest z pewną grupą przekształceń. Konstrukcja poszczególnych grup, wprowadzanych w następnych punktach pracy, zapewnić musi niezmienniczość operatorów równań mechaniki względem tych przekształceń. Grupowe właściwości równań rozważanych tutaj teorii pozwoliły nam zbudować algebry liniowe. Elementy tych algebr umożliwiają uzyskanie rodziny rozwiązań podobnych, w takich dyscyplinach jak lepkosprężystość, termosprężystość itp. Każda teoria szczególna posiada inną algebrę, z którą związane są grupy przekształceń. Powołując algebry liniowe kierowano się koniecznością podania najpełniejszego narzędzia formalnego opisującego rozwiązania podobnie. Natomiast sam proces budowania algebr rozpoczynamy od powołania grupy przekształceń, której elementy czerpać będziemy z ciała dystrybucji. Działaniem grupowym będzie mnożenie splotowe. Pierwszą grupę, generującą rozwiązania podobne konstruujemy na podstawie analizy transformat Laplace'a

równania zagadnienia, drugą uzyskujemy z analizy przekształcenia Fouriera wspomnianych równań. Ponieważ interesują nas rozwiązania podobne w czasoprzestrzeni, przeto musimy przeprowadzić syntezę pierwszego i drugiego sposobu podejścia (grupy generujące rozwiązania podobne w czasie i przestrzeni), co w wyniku daje algebry liniowe (generujące rozwiązania w czaso-przestrzeni).

Porzucając formalny aspekt poruszanych tutaj problemów zastanowimy się nad jego sensem fizykalnym. Nasuwają się tutaj analogie do wyczerpująco analizowanej we współczesnej fizyce [25,36,40,41,59,60,65,66,67,71,72,92] niezmienniczości równań pól. W fizyce każda zaobserwowana symetria czasoprzestrzeni prowadzi w konsekwencji do pewnej zasady zachowania. Symetrię czaso-przestrzeni opisujemy językiem typowym dla teorii grup, a niezmiennikami przekształceń grupowych pozostają pewne wielkości fizyczne, np. energia. Analizowana w niniejszej pracy symetria dotyczy problematyki węższej, odnosi się ona mianowicie do konstrukcji rozwiązań podobnych w teoriach szczególnych.

6. Pole dystrybucji i grupy strukturalne

Przeanalizujemy w tym punkcie równania teorii szczególnych, opisane odpowiednimi problemami początkowo-brzegowymi, które zostały omówione w rozdziale pierwszym.

Wprowadzimy dalej jednoparametrową grupę przekształceń, która przeprowadzać będzie jedno rozwiązanie w drugie, przy zmieniającym się w sposób ciągły parametrze; parametrem takim będzie dystrybucja w sensie Schwartz'a [35]*. Z teorii dystrybucji wiadomo, że zbiór dystrybucji tworzy przestrzeń D, która z algebraicznego punktu widzenia jest przemiennym ciałem bez dzielników zera, czyli polem. W naszym przypadku elementy tego pola generować będą przekształcenia tworzące grupę; przeprowadzą one przestrzeń $\mathcal{W}$ w siebie. Ogólność takiego podejścia, pozwala odpowiedzieć np. na pytanie: jak zachowują się rozwiązania, poddane pewnym liniowym operacjom (różniczkowanie, całkowanie itp.). W dalszych częściach pracy elementy pola D są współczynnikami rozwinięć wielomianowych macierzy rozwiązań podobnych. Analizę zadania rozpoczynamy od równań termo-lepkosprężystych, które dalej będziemy porównywali z równaniami termo-starzenia się; porównanie takie przeprowadzimy poprzez pewien izomorfizm występujący między grupami przekształceń, które z kolei opisują rozwiązania podobne we wspomnianych dyscyplinach.

Przystępujemy do sformułowania podstawowego problemu będącego przedmiotem rozważań niniejszego punktu.

---

*dokładniej - dystrybucja temperowana.

PROBLEM I. Dla układu równań szczególnych teorii ośrodka odkształcalnego należy:

i) zbudować grupy przekształceń, uwzględniając właściwości transformacji Lapiace'a, z zachowaniem niezmienniczości operatorów równań względem przekształceń należących do tych grup;

ii) dla zbudowanej grupy przekształceń podać konstrukcję rodziny rozwiązań podobnych;

iii) przeprowadzić klasyfikację przestrzeni rozwiązań z uwagi na wprowadzone klasy rozwiązań podobnych.

Zadania początkowo-brzegowe termo-lepkosprężystości mają postać następującą [64]

$$\mu * u_{i,jj}(x,t) + (\lambda+\mu) * u_{j,ji}(x,t) + X_i(x,t) - \gamma * \Theta_{,i}(x,t) = \varrho\, \ddot{u}_i(x,t),$$

(6.1)
$$u_i(x,t)\Big|_{x=x_1} = \overset{1}{g}_i(x,t), \qquad x \in \partial\mathcal{B}_1,$$

$$\sigma_{ij}(x,t)n_j(x)\Big|_{x=x_2} = \mu * (u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda * u_{k,k} - \gamma * \Theta_{,i})\Big|_{x=x_2} =$$

$$= \overset{2}{p}_i(x,t), \qquad x \in \partial\mathcal{B}_2,$$

$$\partial\mathcal{B}_1 \cup \partial\mathcal{B}_2 = \partial\mathcal{B}, \quad \partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2 = \phi,$$

$$u_i(x,t)\Big|_{t=0} = \overset{0}{u}_i(x), \quad \dot{u}_i(x,t)\Big|_{t=0} = \overset{0}{\dot{u}}_i(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{B};$$

$$\Theta_{,kk}(x,t) - \frac{1}{\varkappa}\dot{\Theta}(x,t) = \frac{1}{\varkappa} Q(x,t),$$

$$\Theta(x,t)\Big|_{x=x_3} = \overset{3}{A}(x,t), \qquad x \in \partial\mathcal{B}_3$$

(6.2)
$$\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial n}\Big|_{x=x_4} = \overset{4}{B}(x,t), \qquad x \in \partial\mathcal{B}_4$$

$$\frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial n} + \alpha \Theta(x,t)\Big|_{x=\underset{5}{x}} = C(\underset{5}{x},t) \qquad \underset{5}{x} \in \partial\mathcal{B}_5$$

$$\Theta(x,0) = \underset{o}{\Theta}(x) \qquad \partial\mathcal{B}_3 \cup \partial\mathcal{B}_4 \cup \partial\mathcal{B}_5 = \partial\mathcal{B}$$

$$\partial\mathcal{B}_3 \cap \partial\mathcal{B}_4 \cap \partial\mathcal{B}_5 = \phi$$

Rozwiązywanie problemów (6.1) i (6.2) zaczynamy od wyznaczenia pola temperatur Θ , a następnie przechodzimy do określenia pola przemieszczeń $u_i(x,t)$ (zadanie niesprzężone). Po wykonaniu transformacji Laplace'a na równaniu $(6.1)_1$ i warunkach brzegowych $(6.1)_{2-3}$ uzyskujemy równania parametrycznie zależne od zmiennej zespolonej p

$$\bar{\mu}(p)\,\bar{u}_{i,jj}(x,p) + (\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p))\,\bar{u}_{j,ji}(x,p) + \bar{X}_i(x,p) - \bar{\gamma}(p)\,\bar{\Theta},i(x,p) = 0$$

$$\varrho(p^2\bar{u}_i(x,p) - p\,\underset{o}{u}_i - \dot{\underset{o}{u}}_i),$$

$$\bar{u}_i(x,p)\Big|_{x=\underset{1}{x}} = \bar{\underset{1}{u}}_i(\underset{1}{x},p), \qquad \underset{1}{x} \in \partial\mathcal{B}_1, \tag{6.3}$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(x,p)n_j(x)\Big|_{x=\underset{2}{x}} = \bar{\underset{2}{p}}_i(\underset{2}{x},p) \qquad \underset{2}{x} \in \partial\mathcal{B}_2.$$

Ponieważ interesować nas będą zmiany pola sił masowych, pola temperatur i funkcji określających pierwszy i drugi warunek brzegowy (przy niezmienniczości obszarów $\partial\mathcal{B}_1$, $\partial\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}$), przeto zachodzi potrzeba wprowadzenia przekształceń przeprowadzających jeden zbiór funkcji $\left\{X_i, \Theta,_i, \underset{o}{u}_i, p_i\right\}$ w inny, np. $\left\{\mathbf{X}_j, \vartheta,_i, \underset{o}{U}_i, \mathbf{P}_i\right\}$. Wspomniana operacja związana jest z przekształceniem $\varphi*$ pola przemieszczeń $u_i(x,t)$ na pole $U_i(x,t)$. Omówiony powyżej sposób przekształcania możemy ująć schematem

$$\varphi^* : \left\{u_i,\ X_i,\ \Theta,_i,\ \underset{o}{u}_i,\ p_i;\quad \partial\mathcal{B}_1,\ \partial\mathcal{B}_2,\ \mathcal{B}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left\{U_i,\ \mathbf{X}_i,\ \vartheta,_i,\ \underset{o}{U}_i,\ \mathbf{P}_i;\quad \partial\mathcal{B}_1,\ \partial\mathcal{B}_2,\ \mathcal{B}\right\}.$$

Będziemy żądali aby zbiór przekształceń $\left\{\varphi^*\right\}$ tworzył grupę. Uzyskane przy tym warunku pola przemieszczeń nazywać będziemy rozwiązaniami podobnymi problemu początkowo-brzegowego (6.1). W wielu przypadkach parametr prze-

kształcenia φ może być funkcją rozumianą w zwykłym sensie; tutaj mając na uwadze ogólność stosowanych przekształceń, za parametr taki uważać będziemy dystrybucję w sensie Schwartz'a. Na przekształcenie φ^* musi być nałożony warunek wynikający z interpretacji fizycznej problemu: przekształcenia φ^* nie powinny generować rozwiązań nie mieszczących się w klasie rozwiązań danej teorii szczególnej. Aby zrealizować takie przekształcenia, wystarczy przemnożyć równanie (6.3) przez transformatę dowolnej dystrybucji $\varphi(p) = \mathcal{L}\left[\varphi(t)\right]$ gdzie $(\varphi \in \mathcal{D}_+)$. Uzyskujemy wtedy zależności:

$$\bar{\mu}(p)\,\bar{\varphi}(p)\,\bar{u}_{i,jj}(x,p) + (\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p))\,\bar{\varphi}(p)\,\bar{u}_{j,ji}(x,p) + \bar{\varphi}(p)\,\bar{X}_i(x,p) - \bar{\vartheta}(p)\,\bar{\varphi}(p)\,\bar{\theta}_{,i}(x,p) = 0, \quad \varrho\,(\varphi(p)\,\left[p^2\bar{u}_i(x,p)\right]), \tag{6.4}$$

$$\bar{\varphi}(p)\,\bar{u}_i(x,p)\Big|_{x=x_1} = \bar{\varphi}(p)\,\overset{0}{\bar{u}}_{i\,1}(x,p) \qquad x_1 \in \partial\mathcal{B}_1,$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(x,p)n_j(x)\,\bar{\varphi}(p)\Big|_{x=x_2} = \bar{\varphi}(p)\,\bar{p}_i(x,p) \qquad x_2 \in \partial\mathcal{B}_2,$$

z których - po przyjęciu następujących oznaczeń

$$\bar{U}_i(x,p) = \bar{\varphi}(p)\bar{u}_i(x,p), \qquad \bar{X}_i(x,p) = \bar{\varphi}(p)X_i(x,p),$$

$$\bar{\vartheta}_{,i}(x,p) = \bar{\varphi}(p)\,\bar{\theta}_{,i}(x,p),$$

$$\overset{0}{\bar{U}}_{i\,1}(x,p) = \bar{\varphi}(p)\,\overset{0}{\bar{u}}_{i\,1}(x,p), \qquad \bar{P}_i(x,p) = \bar{\varphi}(p)\bar{p}_i(x,p) = \tag{6.5}$$

$$= \sum_{ij}(x,t)n_j(x),$$

i po retransformacji otrzymujemy układ równań termo-lepkosprężystości określający rozwiązania podobne $U_i(x,t)$

$$\mu * U_{i,jj}(x,t) + (\lambda+\mu) * U_{j,ji}(x,t) + X_i(x,t) - \vartheta * \vartheta_{,i}(x,t) = \varrho\ddot{U}_i(x,t),$$

$$U_j(x,t)\Big|_{x=x_1} = \overset{0}{U}_{j\,1}(x,t), \tag{6.6}$$

$$\sum_{ij}(x,t)n_j(x)\Big|_{x=x_2} = P_i(x,t).$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że istnieją przekształcenia $\varphi^*: \mathcal{W}_{T-L-S} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-L-S}$, przeprowadzające rozwiązanie jednego zadania początkowo-brzegowego termo-lepkosprężystości w - zadanie drugie. Zbiór takich przekształceń wyznacza grupę ciągłą, ponieważ określone jest w niej działanie grupowe (mnożenie splotowe), element jednostkowy ($\delta(t)$, element odwrotny $\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(p)^{-1}\right] = \varphi^{-1}(t)$. Działanie grupowe w $\mathcal{D}_t$ jest ciągłe - w sensie teorii dystrybucji, zatem wprowadzone przekształcenie spełnia wszystkie aksjomaty grupy ciągłej. Możemy więc stwierdzić, że występuje grupa:

GRUPA $\mathcal{G}_{T-L-S}$. W przestrzeni $\mathcal{W}_{T-L-S}$ istnieje przekształcenie

$$\varphi^*: \mathcal{W}_{T-L-S} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-L-S}, \tag{6.7}$$

określone następującą relacją podaną jawnie

$$\varphi^*\left[u_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau)\, u_i(x,\tau)\,d\tau = U_i(x,t), \tag{6.8}$$

Taka zmiana pola przemieszczeń wywołana jest następującymi zmianami pola sił - temperatur i warunków początkowo-brzegowych (por. (6.5))

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left[X_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\, X_i(x,\tau)\,d\tau = \mathbf{X}_i(x,t),\\
\varphi^*\left[\Theta_{,i}(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\, \Theta_{,i}(x,\tau)\,d\tau = \vartheta_{,i}(x,t),\\
\varphi^*\left[\overset{\circ}{u}_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\, \overset{\circ}{u}_i(x,\tau)\,d\tau = \overset{\circ}{\mathbf{U}}_i(x,t),\\
\varphi^*\left[p_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\, p_i(x,\tau)\,d\tau = P_i(x,t),
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\overset{\circ}{U}_i = \lim_{t\to 0^+} \int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)\,d\tau\,, \quad \overset{\circ}{\dot{U}}_i = \lim_{t\to 0^+} \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)\,d\tau\,,$$

$$(\quad) \equiv (\quad)_{T-L-S}$$

Grupa $\mathcal{G}_{T-L-S}$ jest również grupą przemienną. Fakt ten wynika z przemienności splotu

$$\varphi_1 * \varphi_2 * \left[\ldots\right] = \varphi_2 * \varphi_1 * \left[\ldots\right], \tag{6.10}$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{G}_{T-L-S}\ (*;\ \delta(t);\ \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots). \tag{6.11}$$

Wprowadzona grupa przekształceń jest tego rodzaju, iż zachowuje ona operatory problemów początkowo-brzegowych, co proponujemy uważać za fragment wewnętrznej struktury równań mechaniki ciała odkształcalnego. Pogłębioną analizę tej struktury przedstawimy w punkcie 10 niniejszej pracy, gdzie też omawiać będziemy geometryczny aspekt wprowadzonych grup. Fakt zbudowania przekształcenia φ^*, które pozwala wyznaczyć całą klasę rozwiązań podobnych, będziemy określali jako generowanie rozwiązań podobnych przez grupę $\mathcal{G}_{T-L-S}$.

Postępując podobnie jak w termo-lepkosprężystości wprowadzimy przekształcenia zachowujące operatory równań termosprężystości. Tworzyć one będą ciągłą grupę przekształceń, którą oznaczymy symbolicznie przez $\mathcal{G}_{T-S}$. Ponieważ sposób budowy takiej grupy - jak też grup, które wprowadzać będziemy dalej - został wyczerpująco omówiony poprzednio, ograniczymy się do podania wzorów analogicznych do (6.7) - (6.9).

GRUPA $\mathcal{G}_{T-S}$. W przestrzeni rozwiązań termosprężystości $\mathcal{W}_{T-S}$ istnieje przekształcenie

$$\varphi^* : \mathcal{W}_{T-S} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-S}, \tag{6.12}$$

określone następującą relacją

$$\varphi^*\left[u_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)\,d\tau = U_i(x,t), \tag{6.13}$$

z której wynikają dalsze związki

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left[X_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)X_i(x,\tau)\,d\tau = \mathbf{X}_i(x,t),\\
\varphi^*\left[\Theta_{,i}(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\,\Theta_{,i}(x,\tau)\,d\tau = \vartheta_{,i}(x,t),\\
\varphi^*\left[\overset{\circ}{u}_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\,u_i(x,\tau)\,d\tau = \overset{\circ}{U}_i(x,t),\\
\varphi^*\left[p_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau)\,p_i(x,\tau)\,d\tau = P_i(x,t),\\
\varphi^*\left[u_{\circ i}\right] &= \lim_{t\to 0^+} \int_0^t \varphi(t-\tau)\,u_i(x,\tau)\,d\tau = U_{\circ i}(x),\\
\varphi^*\left[\dot{u}_{\circ i}\right] &= \lim_{t\to 0^+} \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)\,d\tau = \dot{U}_{\circ i}(x),\quad (\ ) = (\ )_{T-S}
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Z wprowadzonymi tutaj grupami $\mathcal{G}_{T-L-S}$ i $\mathcal{G}_{T-S}$ związana jest

WŁASNOŚĆ 1. Grupy $\mathcal{G}_{T-L-S}$ i $\mathcal{G}_{T-S}$ generujące rozwiązania podobne w termo-lepkosprężystości i termosprężystości są grupami izomorficznymi ($\mathcal{G}_{T-L-S} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathcal{G}_{T-S}$).

Ostatnia własność wynika z analogii między tymi dwiema dyscyplinami (istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie rozwiązań podobnych w termo-lepkosprężystości i termosprężystości) oraz z zachowania działania grupowego (splotu); te warunki określają właśnie izomorfizm między grupami $\mathcal{G}_{T-L-S}$ i $\mathcal{G}_{T-S}$.

Kolejną, będzie grupa odpowiadająca izotermicznej lepkosprężystości

GRUPA $\mathcal{G}_{L-S}$. W przestrzeni rozwiązań lepkosprężystości $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}_{L-S}$ istnieje przekształcenie

$$\varphi * : \mathcal{W}^{\mathcal{D}}_{L-S} \longrightarrow \mathcal{W}^{\mathcal{D}}_{L-S} \tag{6.15}$$

określone dla każdej dystrybucji $\varphi \in \mathcal{D}_+$ relacją

$$\varphi * \left[u_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau) u_i(x,\tau)\,d\tau = U_i(x,t), \tag{6.16}$$

z której wynikają równania

$$\begin{aligned}
\varphi * \left[X_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau) X_i(x,\tau)\,d\tau = X_i(x,t),\\
\varphi * \left[\overset{\circ}{u}_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau) \overset{\circ}{u}_i(x,\tau)\,d\tau = \overset{\circ}{U}_i(x,t),\\
\varphi * \left[p_i(x,t)\right] &= \int_0^t \varphi(t-\tau) p_i(x,\tau)\,d\tau = P_i(x,t),\\
\varphi * \left[u_i\right] &= \lim_{t\to 0^+} \int_0^t \varphi(t-\tau) u_i(x,\tau)\,d\tau = U_i(x),\\
\varphi * \left[\dot{u}_i\right] &= \lim_{t\to 0^+} \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t-\tau) u_i(x,\tau)\,d\tau = \dot{U}_i(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}_+
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$(\ ) \equiv (\ )_{L-S}$$

Przytoczymy teraz następną grupę zbudowaną w przestrzeni rozwiązań sprężystych

GRUPA $\mathcal{G}_S$. W przestrzeni rozwiązań sprężystych $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}_S$ istnieje przekształcenie

$$\varphi * : \mathcal{W}^{\mathcal{D}}_S \longrightarrow \mathcal{W}^{\mathcal{D}}_S \tag{6.18}$$

określone dla każdej dystrybucji $\varphi \in \mathcal{D}_+$ relacją

$$(6.19) \qquad \varphi * \left[u_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)d\tau = U_i(x,t),$$

z której wynikają równania

$$\varphi * \left[X_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau)\, X_i(x,\tau)d\tau = \mathbf{X}_i(x,t),$$

$$\varphi * \left[\overset{\circ}{u}_{i_1}(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau)\overset{\circ}{u}_{i_1}(x,\tau)d\tau = \overset{\circ}{U}_{i_1}(x,t),$$

$$\varphi * \left[p_{i_2}(x,t)\right] = \int_0^t \varphi(t-\tau)p_{i_2}(x,\tau)d\tau = \mathbf{P}_{i_2}(x,t),$$

$$(6.20)$$

$$\varphi * \left[u_{i_o}\right] = \lim_{t\to 0^+} \int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)d\tau = \mathbf{U}_{i_o}(x),$$

$$\varphi * \left[\dot{u}_{i_o}\right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(t-\tau)u_i(x,\tau)d\tau = \dot{\mathbf{U}}_{i_o}(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}_+,$$

$$(\ ) \equiv (\ )_S.$$

Podobnie jak poprzednio zauważamy, że postać przekształceń $\varphi *$ w lepkosprężystości (6.16) i sprężystości (6.19) jest identyczna, a więc pozostaje słuszną

WŁASNOŚĆ 2. Grupy $\mathcal{G}_{L-S}$ i $\mathcal{G}_S$ generujące rozwiązania podobne w lepkosprężystości i sprężystości są grupami izomorficznymi ($\mathcal{G}_{L-S} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathcal{G}_S$).

Pozostają do przeanalizowania równania termo-starzenia. Z uwagi na skomplikowany charakter tych równań rozpatrywać będziemy jedynie przypadki statycznych obciążeń ośrodka. Funkcje materiałowe $\mu(t,\tau)$, $\lambda(t,\tau)$ i $\vartheta(t,\tau)$ dla tych ośrodków czynią zadość założeniom występującym w twierdzeniu Efrosa o splocie uogólnionym

$$(6.21) \qquad \int_\tau^\infty \mu(t,\tau)\, e^{-pt}dt = \overline{\mu}_b(p)\, e^{-\tau q(p)}, \qquad \int_\tau^\infty \lambda(t,\tau) e^{-pt}dt = \overline{\lambda}_o(p)\, e^{-\tau q(p)}$$

W dalszej kolejności będziemy starali się zbudować izomorfizmy między grupami przekształceń $\mathcal{G}_{T-L-S}$ i $\mathcal{G}_{T-ST}$ oraz $\mathcal{G}_{L-S}$ i $\mathcal{G}_{ST}$. Izomorfizm odpowiednich grup pozwoli nam również i w teoriach starzenia budować rodziny rozwiązań podobnych.

Przejdziemy obecnie do przetransformowania problemów początkowo-brzegowych termo-starzenia się. Po wykonaniu odpowiednich transformacji otrzymujemy

$$\overset{\circ}{\mu}(p)\bar{u}_{i,jj}(x,q(p))+(\overset{\circ}{\bar{\lambda}}(p)+\overset{\circ}{\bar{\mu}}(p))\bar{u}_{j,ji}(x,q(p))+\bar{X}_i(x,p)-\overset{\circ}{\bar{\vartheta}}(p)\,\Theta_{,i}(x,q(p))=0$$

$$\bar{u}_i(x,p)\Big|_{x=x_1}=\overset{\circ}{\bar{u}}_i(x,p), \tag{6.22}$$

$$\left\{2\,\overset{\circ}{\bar{\mu}}(p)\,\bar{e}_{ij}(x,q(p))+\delta_{ij}\bar{\lambda}(p)\left[\bar{e}(x,q(p))-3\,\alpha_T\bar{\Theta}(x,q(p))\right]\right\}n_j(x)\Big|_{x=x_2}=$$

$$=\bar{p}_i(x,p).$$

Porównując transformaty równań (6.22) oraz (6.3) zauważamy ich podobieństwo. Dla uzyskania pełnego podobieństwa problemu początkowo-brzegowego należy jedynie zmodyfikować warunek brzegowy $(6.22)_2$ $\bar{u}_i(x,p)\longrightarrow\overset{\circ}{\bar{u}}_i(x,q(p))$; modyfikację tę uzyskujemy poprzez wprowadzenie - (por. (4.5) - następującego związku całkowego

$$\bar{u}_i(x,q(p))\Big|_{x=x_1}=\frac{1}{\overset{\circ}{\mu}(p)}\mathcal{L}\left\{\int_0^t\mu(t,\tau)u_i(x,\tau)\Big|_{x=x_1}d\tau\right\}. \tag{6.23}$$

Podobnie jak to czyniliśmy poprzednio, możemy i tutaj, po uwzględnieniu związku $(6.22)_2$ wyznaczyć z równań (6.23) funkcję $\overset{\circ}{\bar{u}}_i(x,q(p))$

$$\overset{\circ}{\bar{u}}_i(x,q(p))=\frac{1}{\overset{\circ}{\mu}(p)}\mathcal{L}\left\{\int_0^t\mu(t,\tau)\,\overset{\circ}{u}_i(x,\tau)d\tau\right\}. \tag{6.24}$$

Jeżeli pomnożymy układ równań $(6.22)_{1,3}$ i (6.24) przez transformatę funkcji $\bar{\varphi}(p)$ spełniającą warunek

$$\int_\tau^\infty\tilde{\varphi}(t,\tau)\,e^{-pt}\,dt=\bar{\varphi}(p)e^{-\tau q(p)}, \tag{6.25}$$

to uzyskujemy zależności

$$\overset{\circ}{\mu}(p)\,\bar{\varphi}(p)\,\bar{u}_{i,jj}(x,q(p))+(\overset{\circ}{\bar{\lambda}}(p)+\overset{\circ}{\bar{\mu}}(p))\bar{\varphi}(p)\,\bar{u}_{j,ji}(x,q(p))+$$

$$+\bar{\varphi}(p)\,\bar{X}_i(x,p)-\overset{\circ}{\bar{\vartheta}}(p)\,\bar{\varphi}(p)\,\bar{\Theta}_{,i}(x,q(p))=0.$$

$$\bar{\varphi}(p)\bar{q}^{-1}(p)\bar{u}_i(x,p)\Big|_{x=x_1} = \bar{\varphi}(p)\bar{\bar{u}}_i(x,q(p)) = q^{-1}(p)\,\bar{E}_i(x,p),$$

(6.26)

$$\bar{\varphi}(p)\bar{p}_i(x,p)\Big|_{x=x_2} = \Big\{2\,\bar{\mu}(p)\,\bar{\varepsilon}_{ij}(x,q(p)) + \delta_{ij}\,\bar{\lambda}(p)\,\Big[\bar{\varepsilon}(x,q(p)) -$$

$$- 3\,\alpha_T\,\bar{\Theta}\,(x,q(p))\Big]\Big\}n_j(x)\,\bar{\varphi}(p) = \bar{\sigma}_{ij}\,(x,p)n_j(x)\,\bar{\varphi}(p).$$

Wprowadzając do (6.16) nowe funkcje:

$$\bar{\varphi}(p)\,\bar{u}_i(x,q(p)) = \bar{U}_i(x,p), \qquad \bar{\varphi}(p)\,\bar{\sigma}_{ij}(x,p) = \bar{\bar{\sum}}_{ij}(x,p),$$

(6.27)

$$\bar{\varphi}(p)\,\bar{X}_i(x,p) = \bar{X}_i(x,p), \qquad \bar{\varphi}(p)\,\bar{\omega}_{,i}(x,q(p)) = \bar{\vartheta}_{,i}(x,p).$$

$$\bar{\varphi}(p)\,\bar{\bar{u}}_i(x,q(p)) = \bar{\bar{U}}_i(x,p), \qquad \bar{\varphi}(p)\,\bar{p}_i(x,p) = \bar{P}_i(x,p),$$

a następnie wykonując ich retransformację możemy układ równań termo-starzenia się zapisać w postaci układu równań analogicznego jak w termo-lepkosprężystości

$$\mu_0 * U_{i,jj}(x,t) + (\lambda_0 + \mu_0) * U_{j,ji}(x,t) + X_i(x,t) - \gamma_0 * \vartheta_{,i}(x,t) = 0,$$

(6.28)

$$U_i(x,t)\Big|_{x=x_1} = E_i(x,t),$$

$$\sum_{ij}(x,t)n_j(x)\Big|_{x=x_2} = P_i(x,t).$$

Podkreślamy, że funkcja $\bar{\varphi}(p)$ może być utożsamiana z jedną z funkcji $\bar{\mu}_0(p)$, $\bar{\lambda}_0(p)$, $\bar{\gamma}_0(p)$. Przeprowadzone tutaj przekształcenia prowadzą do wniosku: między równaniami teorii termo-starzenia się a termo-lepkosprężystością istnieją - przy spełnieniu warunków (6.23), (6.26) i (6.27) - bardzo silne związki, które w konsekwencji umożliwią skonstruowanie izomorficznych grup strukturalnych w tych teoriach. Związki te w postaci jawnej są następujące:

$$\int_0^t \tilde{\varphi}(t,\tau)u_i(x,\tau)\,d\tau = U_i(x,t),$$

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)\,X_i(x,\tau)\,d\tau = \bar{X}_i(x,t),$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(t,\tau)\ \Theta_{,i}(x,\tau)\,d\tau = \vartheta_{,i}(x,t),\\
&\int_0^{t} \varphi(t-\tau)\ p_i(\underset{2}{x},\tau)\,d\tau = P_i(\underset{2}{x},t),\\
&\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(t,\tau)\ \overset{\circ}{u}_i(\underset{1}{x},\tau)\,d\tau = \overset{\circ}{U}_i(\underset{1}{x},t).
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

Wykonanie operacji (6.29) na układzie funkcji zadania początkowo-brzegowego teorii termo-starzenia (małe litery) będziemy symbolicznie oznaczali przez φ, natomiast rozwiązanie układów równań całkowych (6,29) oznaczymy przez φ^{-1}. Przekształcenia φ i φ^{-1} są jednoznaczne i opisują wzajemną zależność między zadaniami początkowo-brzegowymi w teorii termo-starzenia i termo-lepkosprężystości.

Weźmy teraz pod uwagę inne rozwiązanie podobne, uzyskane z przemnożenia równań (6.28) przez $\varphi'(t)$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\mu}{\circ} * \varphi' * U_{i,jj}(x,t) + (\overset{\lambda}{\circ} + \overset{\mu}{\circ}) * \varphi' * U_{j,ji}(x,t) +\\
&+ \varphi' * X_i(x,t) - \overset{\gamma}{\circ} * \varphi' * \vartheta_{,i}(x,t) = 0,\\
&\varphi' * U_i(x,t)\Big|_{x=\underset{1}{x}} = \varphi' * E_i(\underset{1}{x},t),\\
&\varphi' * \textstyle\sum_{ij}(x,t)n_j(x)\Big|_{x=\underset{2}{x}} = \varphi' * P_i(\underset{2}{x},t).
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Przekształcenia postaci $\varphi' * [\ldots]$, wyznaczają grupę przekształceń $\mathcal{G}_{T-L-S}$ i tym samym całą rodzinę rozwiązań podobnych w termo-lepkosprężystości. W konsekwencji każdemu rozwiązaniu podobnemu $\varphi' * U_i$ w termo-lepkosprężystości przypisujemy pewne rozwiązanie w teorii termo-starzenia się. Aby uzyskać to rozwiązanie wystarczy w układzie równań całkowych (6.29) dokonać następujących podstawień

$$
\begin{aligned}
&U_i \longrightarrow \varphi' * U_i, \qquad P_i \longrightarrow \varphi' * P_i,\\
&X_i \longrightarrow \varphi' * X_i, \qquad \overset{\circ}{U}_i \longrightarrow \varphi' * \overset{\circ}{U}_i,\\
&\vartheta_{,i} \longrightarrow \varphi' * \vartheta_{,i},
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

po czym rozwiązać równania. Zbiór tych rozwiązań stanowi rodzinę rozwiązań podobnych w teorii termo-starzenia. Uzyskana tutaj wzajemna jednozna-

czość między rozwiązaniami w termo-lepkosprężystości i w teorii termo-starzenia pozwala wprowadzić grupę $\mathcal{G}_{T-ST}$ izomorficzną z grupą $\mathcal{G}_{T-L-S}$.

GRUPA $\mathcal{G}_{T-ST}$. W przestrzeni rozwiązań teorii termo-starzenia się $\mathcal{W}_{T-ST}$ istnieje przekształcenie

$$(6,32) \qquad \Phi : \mathcal{W}_{T-ST} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-ST}, \qquad \Phi = \mathcal{Q}^{-1} \circ \varphi' \circ \mathcal{Q},$$

z którym związane są przekształcenia $\mathcal{Q}$ i $(\mathcal{Q}^{-1})$

$$(6.33) \qquad \mathcal{Q} : \mathcal{W}_{T-ST} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-L-S}, \qquad (\mathcal{Q}^{-1} : \mathcal{W}_{T-L-S} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-ST}),$$

określone zależnościami (6.29), oraz przekształcenie

$$(6.34) \qquad \varphi' : \mathcal{W}_{T-L-S} \longrightarrow \mathcal{W}_{T-L-S},$$

określone zależnością (6.31)

$$(6.35) \qquad \varphi'_* \left[U_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi'(t-\tau) U_i(x,\tau)\,d\tau = U_i'(x,t),$$

z którą łączą się przekształcenia

$$\varphi'_* \left[X_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi'(t-\tau) X_i(x,\tau)\,d\tau = X_i'(x,t),$$

$$\varphi'_* \left[\vartheta_{,i}(x,t)\right] = \int_0^t \varphi'(t-\tau)\, \vartheta_{,i}(x,\tau)\,d\tau = \vartheta_{,i}'(x,t),$$

$$\varphi'_* \left[\overset{\circ}{U}_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi'(t-\tau) \overset{\circ}{U}_i(x,\tau)\,d\tau = \overset{\circ}{U}_i'(x,t),$$

$$\varphi'_* \left[P_i(x,t)\right] = \int_0^t \varphi'(t-\tau) P_i(x,\tau)\,d\tau = P_i'(x,t), \quad (\ ) \equiv (\ )_{T-L-S}$$

Złożenie $\mathcal{Q}^{-1} \circ \varphi' \circ \mathcal{Q}$ przekształceń (6.29), (6.35) i (6.36) wyznacza

i) wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zadań początkowo-brzegowych w teorii termo-starzenia się na podobne w termo-lepkosprężystości;

ii) przekształcenia $\Phi = \mathcal{Q}^{-1} \circ \varphi' \circ \mathcal{Q}$ wyznaczają grupę przekształceń $\mathcal{G}_{T-ST}$, która jest izomorficzna z grupą $\mathcal{G}_{T-L-S}$ $(\mathcal{G}_{T-ST} \overset{\text{izom.}}{\longrightarrow} \mathcal{G}_{T-L-S})$

Grupa $\mathcal{G}_{T-ST}$ generuje rozwiązania podobne do teorii termo-starzenia.

Analogiczną grupę możemy powołać w przestrzeni rozwiązań teorii starzenia, porównując wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie rozwiązań podobnych w lepkosprężystości i w teorii starzenia się.

GRUPA $\tilde{\gamma}_{ST}$. W przestrzeni rozwiązań teorii starzenia $\mathcal{W}_{ST}^{c}$ istnieje przekształcenie Φ

$$\Phi : \mathcal{W}_{ST}^{c} \longrightarrow \mathcal{W}_{ST}^{c}, \qquad \Phi = \mathcal{P}^{-1} \circ \varphi' \circ \mathcal{P}, \tag{6.37}$$

z którym związane jest:

a) przekształcenie $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} : \mathcal{W}_{ST}^{c} \longrightarrow \mathcal{W}_{L-S}^{c}, \tag{6.38}$$

określone zależnością

$$\mathcal{P}\left[u_i(x,t)\right] = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(t,\tau)u_i(x,\tau)d\tau = U_i(x,t), \tag{6.39}$$

z której wynikają dalsze związki

$$\mathcal{P}\left[X_i(x,t)\right] = \int_0^{t} \varphi(t-\tau)X_i(x,\tau)d\tau = \mathcal{X}_i(x,t),$$

$$\mathcal{P}\left[\overset{\circ}{u}_{i_1}(x,t)\right] = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(t,\tau)\overset{\circ}{u}_{i_1}(x,\tau)d\tau = \overset{\circ}{U}_{i_1}(x,t), \tag{6.40}$$

$$\mathcal{P}\left[P_i(x_2,t)\right] = \int_0^{t} \varphi(t-\tau)P_i(x_2,\tau)d\tau = \mathcal{P}_i(x_2,t),$$

oraz

b) przekształcenie (φ' : $\mathcal{W}_{L-S}^{c} \longrightarrow \mathcal{W}_{L-S}^{c}$) określone następująco:

$$\varphi'*\left[U_i(x,t)\right] = \int_0^{t} \varphi'(t-\tau)U_i(x,\tau)d\tau = U_i'(x,t) \tag{6.41}$$

skąd

$$\varphi'*\left[\overset{\circ}{U}_{i_1}(x,t)\right] = \int_0^{t} \varphi'(t-\tau)\ \overset{\circ}{U}_{i_1}(x,\tau)d\tau = \overset{\circ}{U}_{i_1}'(x,t),$$

$$\varphi'*\left[\mathcal{X}_i(x,t)\right] = \int_0^{t} \varphi'(t-\tau)\ \mathcal{X}_i(x,\tau)d\tau = \mathcal{X}_i'(x,t),$$

$$\varphi'*\left[\mathcal{P}_i(x_2,t)\right] = \int_0^{t} \varphi'(t-\tau)\ \mathcal{P}_i(x_2,\tau)d\tau = \mathcal{P}_i'(x_2,t).$$

Złożenie $\varphi^{-1} \circ \varphi' \circ \varphi$ przekształceń (6.39) i (6.41) wyznacza:

i) wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zadań początkowo-brzegowych w teorii starzenia na podobne do lepkosprężystości;

ii) przekształcenia $\Phi = \varphi^{-1} \circ \varphi' \circ \varphi$ wyznaczają grupę przekształceń $\mathcal{G}_{ST}$, która jest izomorficzna z grupą $\mathcal{G}_{I-S}$ ($\mathcal{G}_{ST} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathcal{G}_{L-S}$).

Należy podkreślić, że izomorfizm grup $\mathcal{G}_{T-ST} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathcal{G}_{T-L-S}$ i $\mathcal{G}_{ST} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathcal{G}_{L-S}$ wynika z jednoznaczności odwzorowań zadań początkowo-brzegowych w odpowiednich teoriach, oraz jednoznaczności ich rozwiązań (założenie).

Stwierdziliśmy tutaj występowanie właściwości łączących teorie starzenia się z lepkosprężystością, a przez tę ostatnią ze sprężystością. Fakt, że grupy $\mathcal{G}_{T-ST}$, $\mathcal{G}_{T-L-S}$, $\mathcal{G}_{T-S}$ i $\mathcal{G}_{ST}$, $\mathcal{G}_{L-S}$, $\mathcal{G}_{S}$ są grupami izomorficznymi wynikał z postaci samych równań odpowiednich teorii i świadczy on o wewnętrznej spoistości poszczególnych teorii ośrodka ciągłego. Natomiast powołane w tym punkcie grupy stanowią fragment struktury równań mechaniki ośrodka ciągłego, stąd też ich nazwa - grupy strukturalne.

Zwrócimy jeszcze raz uwagę na właściwości podobieństwa rozwiązań. Posiadając mianowicie dowolne rozwiązanie u_i należące do jednej z rozpatrywanych przestrzeni rozwiązań np. $u_i \in \mathcal{U}_{L-S}$ możemy na podstawie tegoż rozwiązania znaleźć całą rodzinę rozwiązań podobnych $\{u_i\} \subset \mathcal{U}_{L-S}$, w ten sposób, że każde takie rozwiązanie jest generowane przez pewne przekształcenia $\varphi^* \in \mathcal{G}_{L-S}$. Będziemy w tych przypadkach mówili o podobieństwie ze względu na grupę $\mathcal{G}_{L-S}$. W ten sposób każde dwa rozwiązania u_i, $u_i^* \in \mathcal{U}_{L-S}$ mogą być względem siebie niepodobne lub podobne i całą przestrzeń rozwiązań $\mathcal{U}_{L-S}$ możemy rozbić na klasy rozwiązań podobnych względem grup $\mathcal{G}_{L-S}$. Tak samo możemy postąpic w każdej innej z rozpatrywanych przestrzeni uzyskując w wyniku klasyfikację rozwiązań.

Uzyskane w tym punkcie wyniki będą miały istotne znaczenie w dalszych rozdziałach pracy. Podsumujmy je. Po pierwsze, udało się nam uzyskać grupy przekształceń, których elementy przeprowadzają jedno rozwiązanie w teorii szczególnej w inne rozwiązanie. Po wtóre, uzyskane grupy uwypukliły nieznane dotychczas prawidłowości, występujące w strukturze formalnej równań liniowych teorii ośrodka ciągłego (np. izomorfizm poszczególnych grup strukturalnych). Natomiast z punktu widzenia zastosowań, uzyskane grupy przekształceń mają co najmniej takie samo znaczenie jak grupy podobieństwa występujące w analizie wymiarowej. Na uwagę zasługuje tutaj również fakt, że wszystkie skonstruowane grupy są zbudowane na tym samym zbiorze elementów; polu dystrybucji lub w szczególnym przypadku przestrzeni funkcyjnej. Nadmieniamy jeszcze, że przykłady ilustrujące możliwości zastosowań, jakie związane są z wykorzystaniem grup $\mathcal{G}_{S}$, $\mathcal{G}_{L-S}$, $\mathcal{G}_{T-L-S}$, $\mathcal{G}_{ST}$, $\mathcal{G}_{T-ST}$, $\mathcal{G}_{T-S}$, podamy w dalszych rozdziałach pracy.

7. Grupy przekształceń $\mathcal{G}_p$ ("w przestrzeni")

W niniejszym punkcie zbudujemy kolejną grupę przekształceń w przestrzeni rozwiązań $\mathcal{W}$. Grupa ta będzie związana z przekształceniami funkcji zmiennych przestrzennych, jak np. funkcji przemieszczeń, - sił masowych i - temperatury; grupę tę zbudujemy stosując do równań zadania przekształcenie Fouriera [13].

Otrzymane w wyniku przekształceń grupowych funkcje spełniają również równania zagadnienia a niezmienniczość operatorów równań względem przekształceń grupowych - to wynik odpowiednio skonstruowanej grupy. Ponadto przekształcenia rozwiązań problemów początkowo-brzegowych winne być takie aby nie wpływały na postać operatorów tych problemów. Jeżeli przy tym przekształcenia te mieć będą własności grupowe, to mogą one być stosowane do konstrukcji rozwiązań podobnych. W rozdziale poprzednim postępowanie takie przeprowadzono stosując przekształcenie Laplace'a, w tym - postąpimy podobnie, lecz przy posiłkowaniu się przekształceniem Fouriera. Wykażemy dalej, że zbudowana w tym punkcie grupa posiada również i tę cenną własność, iż przekształcenia należące do niej są przemienne z przekształceniami należącymi do grup poprzednich. Własność ta wynika z przemienności operacji różniczkowania i mnożenia transformat przez dystrybucje.

Powołana tutaj grupa $\mathcal{G}_p$ stanowi dalszy etap w procesie budowy ogólnego opisu rozwiązań podobnych i to poprzez algebry liniowe. Przystępując do konstrukcji grupy, będziemy analizować nieograniczony ośrodek odkształcalny. Na ośrodek działać będą pola sił i temperatur, a własności fizykalne opisane będą równaniami konstytutywnymi teorii termo-starzenia się. Można rozpatrywać również problemy początkowo-brzegowe dla obszarów prostopadłościennych, w których są określone odpowiednie warunki brzegowe, tj. takiego typu, iż możliwe jest stosowanie skończonych transformacji Fouriera. W ogólności, grupę możemy zbudować zawsze, o ile tylko znana będzie forma algebraizacji problemu początkowo-brzegowego.

Przejdziemy do sformułowania drugiego problemu będącego przedmiotem rozważań pracy. Rozwiązania jego stanowić będzie treść punktu 7 i 8.

PROBLEM II. Dla układu równań szczególnych teorii ośrodka odkształcalnego należy:

i) zbudować grupy przekształceń uwzględniając właściwości transformacji Fouriera, tak jednak aby operatory równań teorii szczególnych były niezmiennicze względem przekształceń należących do tych grup;

ii) podać dla danej grupy przekształceń rodziny rozwiązań podobnych;

iii) przeprowadzić klasyfikację przestrzeni rozwiązań z uwagi na wprowadzone klasy rozwiązań podobnych.

Rozwiązanie pierwszych dwu zadań podamy w tym punkcie, natomiast ostatniego w punkcie 8.

Przejdziemy do wyznaczenia grupy przekształceń $\mathcal{G}_p$ w przestrzeni rozwiązań $\mathcal{N}_{T-ST}$. W tym celu wykonamy na równaniach przemieszczeniowych teorii termo-starzenia się

$$(7.1)\quad \mu \cdot \dot{u}_{i,jj}(x,t)+(\lambda+\mu)\cdot \dot{u}_{j,ji}(x,t) + X_i(x,t) - \vartheta \cdot \dot{\omega}_{,i}(x,t) = \varrho \ddot{U}_i(x,t),$$

transformację Fouriera (por. relację (2.3) i (2.4)); w wyniku uzyskujemy układ równań różniczkowych, parametrycznie zależny od zmiennych ξ_i por, [13],

$$(7.2)\quad \mu \cdot \left[|\xi|\ \delta_{ij}\ \hat{u}_j(\xi,t)\right] + (\mu+\lambda)\cdot\left[\xi_j \xi_i \hat{u}_j(\xi,t)\right] + \hat{X}_i(\xi,t) - i\,\vartheta\cdot\left[\xi_j\,\hat{\theta}(\xi,t)\right] = \varrho\ \hat{\ddot{u}}_i(\xi,t),$$

gdzie

$$\xi = \left[\xi_1, \xi_2, \xi_3\right],\quad |\xi| = \left(\xi_j\,\xi_j\right)^{1/2},\quad i = \sqrt{-1}$$

Przeprowadziliśmy więc transformację Fouriera tzw. problemu Cauchy'ego (równanie zagadnienia (7.1)), obszar nieskończony, warunek początkowy postaci $u_i(x,t)\big|_{t=0} = u_i(x)$, $x \in \mathcal{B}$). Uzyskany układ równań przetransformowanych jest układem algebraicznym, z uwagi na zmienną przestrzenną x. Mnożąc obustronnie równania (7.2) przez transformację Fouriera pewnej dystrybucji $\hat{\Psi}(\xi)$ ($\mathcal{F}\left[\Psi(x)\right] = \hat{\Psi}(\xi), \Psi \in \mathcal{D}_x$), a następnie retransformując uzyskujemy analogiczne do postaci wyjściowej równania (te same operatory). Mają one postać

$$(7.3)\quad \mu \cdot \dot{U}_{i,jj}(x,t) + (\lambda+\mu)\cdot \dot{U}_{j,ji}(x,t) + X_i(x,t) - \vartheta \cdot \vartheta_{,i}(x,t) = \varrho\, \ddot{U}_i(x,t).$$

W równaniach (7.3) przyjęto oznaczenia

$$(7.4)\quad \begin{aligned} U_i(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{U}_i(\xi,t)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{\Psi}(\xi)\ \hat{U}_i(\xi,t)\right\},\\ X_i(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{X}_i(\xi,t)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{\Psi}(\xi)\ \hat{X}_i(\xi,t)\right\},\\ \vartheta(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{\vartheta}(\xi,t)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{\Psi}(\xi)\ \hat{\omega}(\xi,t)\right\}. \end{aligned}$$

Zupełnie analogiczne przekształcenie Fouriera można wykonać na równaniach termo-lepkosprężystości i termosprężystości, czego szczegółowo nie będziemy

analizować, mówiąc ogólnie o przekształceniu typu. Zatem przekształcenie typu (7.4) pozwalają wprowadzić grupę oznaczoną tutaj symbolicznie przez $\mathcal{G}_P$.

GRUPA $\mathcal{G}_P$. W przestrzeniach rozwiązań $\mathcal{W}_{T-ST}$, $\mathcal{W}_{T-L-S}$, $\mathcal{W}_{T-S}$, ogólnie w przestrzeni $\mathcal{W}_{T\ldots}$, istnieje przekształcenie Ψ

$$\Psi : \mathcal{W}_{T\ldots} \longrightarrow \mathcal{W}_{T\ldots}, \tag{7.5}$$

określone zależnością

$$\Psi\left[u_i(x,t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x-x')u_i(x',t)dx' = U_i(x,t), \tag{7.6}$$

z której wynikają związki

$$\begin{aligned} \Psi\left[\Theta(x,t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x-x')\,\Theta(x',t)dx' = \vartheta(x,t), \\ \Psi\left[X_i(x,t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x-x')\,X_i(x',t)dx' = \mathfrak{X}_i(x,t). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Związki (7.6) i (7.7) wynikają z (7.4) oraz definicji transformacji odwrotnej. Przyporządkowana rozwiązaniu $U_i(x,t)$, funkcja $U_{oi}(x,0)$ może być wyznaczona z zależności $U_i(x,t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x-x')\,u_{oi}(\xi,0)d\xi$. Zbiór przekształceń (7.5) tworzy ciągłą grupę przekształceń $\mathcal{G}_P$.

Grupa ta jest parametrycznie zależna od dystrybucji $\Psi(x) \in \mathcal{D}'_x$, zmiennej rzeczywistej $x = (x_1, x_2, x_3)$, a przekształcenie Ψ związane jest ze splotem typu $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x-x')(\ldots\ldots)dx'$. Jednością grupy $\mathcal{G}_P$ jest $\delta(x)$.

Ponieważ występująca tutaj operacja splotu posiada własność łączności, a wyżej wykazano, że istnieje element jednostkowy, więc tym samym udowodniono, że zbiór przekształceń postaci (7.5) stanowi grupę.

W przypadku izotermicznym, a więc w teorii sprężystości, lepkosprężystości i teorii starzenia się (przestrzenie $\mathcal{W}_S$, $\mathcal{W}_{L-S}$, $\mathcal{W}_{ST}$ ogólnie - $\mathcal{W}_{\ldots}$) uzyskujemy grupę $\mathcal{G}_P'$, określoną następująco:

GRUPA $\mathcal{G}_P'$. W przestrzeni rozwiązań $\mathcal{W}_S$, $\mathcal{W}_{L-S}$, $\mathcal{W}_{ST}$ ególnie w przestrzeni $\mathcal{W}_{\ldots}$, istnieje przekształcenie Ψ'

$$\Psi' : \mathcal{W}_{\ldots} \longrightarrow \mathcal{W}_{\ldots} \tag{7,8}$$

określone zależnością

$$(7.9) \qquad \Psi' \left[u_i(x,t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x-x')u_i(x',t)dx' = U_i(x,t),$$

która pociąga za sobą związki

$$(7.10) \qquad \begin{aligned} \Psi' \left[x_i(x,t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x-x')X_i(x',t)dx' = X_i(x,t), \\ \Psi' \left[\underset{o}{u_i}(x,0)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x-x')\underset{o}{u_i}(x',0)dx' = \underset{o}{U_i}(x,t). \end{aligned}$$

Relacja (7.8) wyznacza ciągłą grupę przekształceń $\mathcal{G}_P$, określoną podobnie jak grupa $\mathcal{G}_P$.

Konstruując grupy $\mathcal{G}_P$ i $\mathcal{G}_P$' uzyskaliśmy tym samym rozwiazanie pierwszego zadania sformułowanego w problemie II, podanym w niniejszym punkcie Spróbujmy teraz rozwiązać drugie zadanie problemu drugiego. Rozpatrzmy w tym celu dowolne rozwiązanie u_i należące np. do jednej z teorii izotermicznych; $u_i \in \mathcal{K}_{3T}$ oraz określmy wszystkie rozwiązania podobne (definicja ich jest analogiczna jak w rozdziale poprzednim) względem grupy $\mathcal{G}_P$' tj. rozwiązanie postaci

$$(7.11) \qquad U_i(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'(x-x')u_i(x',t)dx', \quad \Psi' \in \mathcal{G}_P.$$

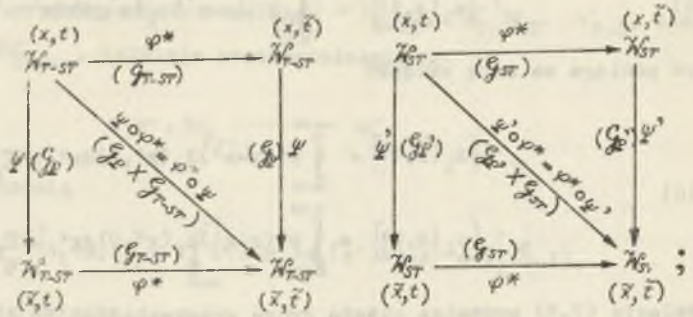
Uzyskamy w ten sposób zbiór rozwiązań podobnych, który oznaczymy przez $\{u_i(x,t)\}$.

Podobnie, jak to uczyniliśmy w stosunku do izotermicznej teorii starzenia, możemy postąpić z innymi, tutaj wymienionymi teoriami szczególnymi uzyskując nowe klasy rozwiązań wzajemnie podobnych.

Zwróćmy z kolei uwagę na inne zależności między grupami $\mathcal{G}\ldots$ (z punktu 6) a grupami $\mathcal{G}_P$ i $\mathcal{G}_P$'. Wiemy, że transformacje Fouriera i Laplace'a są - w występujących tutaj operatorach - względem siebie przemienne. Pociąga to za sobą przemienność przekształceń należących do grup $\mathcal{G}\ldots$ i $\mathcal{G}_P$, $\mathcal{G}_P$'. W rozpatrywanym zagadnieniu, grupy $\mathcal{G}\ldots$ odnosić się będą do przekształceń: pól przemieszczeń, - temperatur, sił masowych, które określone są problemem Cauchy'ego, a problemami początkowymi omawianymi w rozdziale poprzednim. Związki między przekształceniami tych przestrzeni najlepiej charakteryzują diagramy dla teorii:

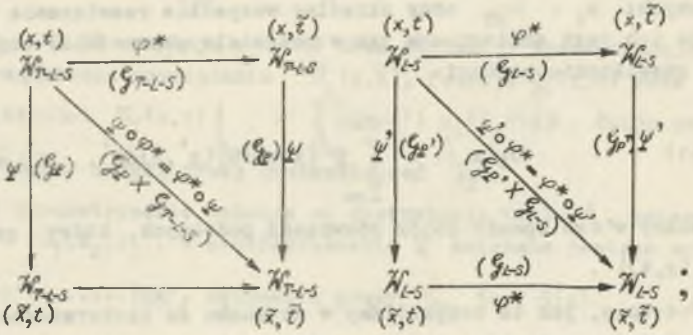
- starzenia się

(7.12)



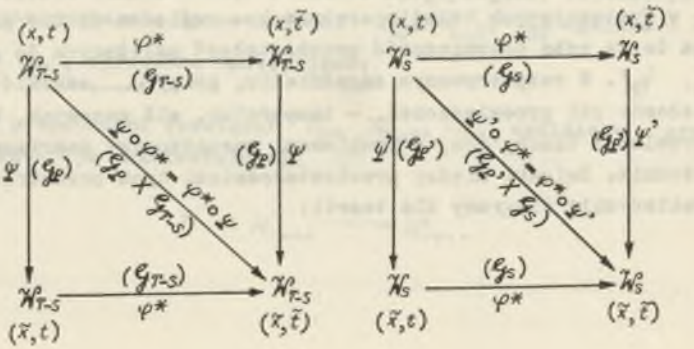
- lepkosprężystych

(7.13)



- sprężystych

(7.14)



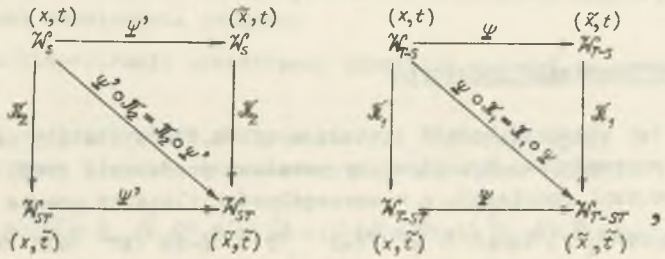
Przedstawiona diagramami przemienność grup $\mathcal{G}_{\dots\dots}$ względem grup $\mathcal{G}_{P'}$ i $\mathcal{G}_{P}$ posiada istotne znaczenie w dalszej części pracy. W szczególności wynika z niej sposób uzyskiwania wielomianowych rozwiązań, które podamy dalej.

Przeanalizujemy jak zachowują się grupy przekształceń $\mathcal{G}_{P}$ i $\mathcal{G}_{P'}$ wobec podanych w pierwszej części analogii (czasowych) w liniowych ośrodkach odkształcalnych. Zauważmy, że we wszystkich teoriach izotermicznych występuje ta sama grupa $\mathcal{G}_{P'}$; zachowuje się więc ona również przy przekształceniach związanych z analogiami między poszczególnymi równaniami teorii ośrodka odkształcalnego, gdyż są to analogie czasowe, przy których współrzędne przestrzenne są ustalone, skąd

WŁASNOŚĆ 3 - Słusznymi są następujące relacje między poszczególnymi analogiami:

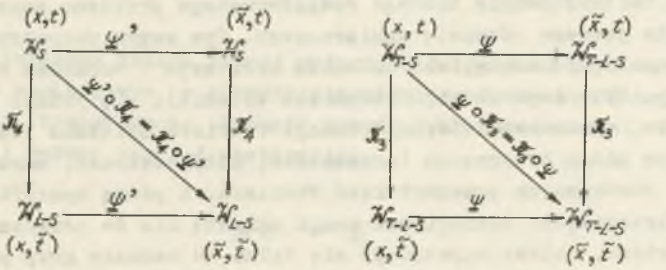
- sprężysto-starzejącymi się $\mathcal{T}_2$, termosprężysto - termostarzejącymi $\mathcal{T}_1$

(7.15)



- sprężysto-lepkosprężystymi $\mathcal{T}_4$ termosprężysto - termo-lepkosprężystymi $\mathcal{T}_3$

(7.16)



a przekształceniami Ψ i Ψ' należącymi do grup $\mathcal{G}_{P}$, $\mathcal{G}_{P'}$ ($\Psi \in \mathcal{G}_{P}$, $\Psi' \in \mathcal{G}_{P'}$).

Biorąc pod uwagę problemy początkowo-brzegowe poszczególnych teorii liniowych mechaniki ośrodka odkształcalnego stwierdzamy, że można mówić o pewnej strukturze mechaniki w sensie relacji między tymi teoriami. W skład tak pojmowanej struktury wchodzić będą analogie między poszczególnymi teoriami oraz właściwości postaci (7.15), (7.16).

Z przemienności przekształceń φ i Ψ należących kolejno do grup $\mathcal{G}_{\dots}$ i $\mathcal{G}_P$ wynika istnienie następujących iloczynów prostych grup,

$$\mathcal{G}_{T-ST} \times \mathcal{G}_{P'}\,, \quad \mathcal{G}_{T-L-S} \times \mathcal{G}_P\,, \quad \mathcal{G}_{T-S} \times \mathcal{G}_P\,;$$

(7.17)

$$\mathcal{G}_{ST} \times \mathcal{G}_{P'}\,, \quad \mathcal{G}_{L-S} \times \mathcal{G}_{P'}\,, \quad \mathcal{G}_S \times \mathcal{G}_{P'}\,,$$

do których będą należały pary przekształceń postaci $(\varphi^*\dots,\Psi)$, $(\varphi^*\dots,\Psi')$ generujące również rozwiązania podobne względem grup $G = \mathcal{G}_{\dots} \times \mathcal{G}_P$. Wprowadzone tutaj iloczyny proste grup mieć będą zastosowanie w punkcie 8, przy budowaniu kolejnych rodzin rozwiązań podobnych.

8. Algebry rozwiązań podobnych

Ustęp ten stanowić będzie syntezę wyników, które zostały uzyskane w punktach poprzednich. Wykorzystamy powołane poprzednio grupy przekształceń przestrzeni rozwiązań, a w szczególności iloczyny proste tych grup: $\mathcal{G}_P \times \mathcal{G}_{T-ST}$, $\mathcal{G}_P \times \mathcal{G}_{T-L-S}$, $\mathcal{G}_P \times \mathcal{G}_{T-S}$, $\mathcal{G}_P \times \mathcal{G}_{L-S}$, $\mathcal{G}_P \times \mathcal{G}_{ST}$, $\mathcal{G}_P \times \mathcal{G}_S$ do poszukiwania nowych rozwiązań podobnych posiłkując się w tym celu algebrą splotu. W odróżnieniu jednakże od poprzednio otrzymanych rozwiązań podobnych, tutaj uzyskujemy istotne rozszerzenie zbioru nowych rozwiązań podobnych "wyprodukowanych" z rozwiązania danego. W tym przypadku rozwiązania podobne generowane będą przez funkcję, których argumentami są macierze. Przekształcenia Laplace'a i Fouriera algebraizując problemy brzegowe pozwalają na traktowanie każdego rozpatrywanego problemu początkowo-brzegowego jako pewnego równania macierzowego. Tym samym rozpatrywanie tych problemów może być zastąpione zadaniem prostszym - badaniem równania macierzowego. Przy tego rodzaju zadaniach wyłaniają się jednak ograniczenia. Po pierwsze, zastosowanie transformacji Fouriera związane jest z ograniczoną grupą zadań brzegowych (przestrzeń, półprzestrzeń, warstwa), lub w przypadku skończonych przekształceń Fouriera, z pewną specyficzną grupą warunków brzegowych. Analogiczne uwagi odnoszą się do przekształceń Laplace'a. Po wtóre, należy ograniczyć się tylko do badania grup przekształceń związanych z poszczególnymi teoriami.

Cechą wspólną wszystkich badanych w pracy teorii ośrodka odkształcalnego jest możliwość opisu ich równaniami macierzowymi pod warunkiem przeprowadzenia algebraizacji problemów brzegowych w tych teoriach.

Finalnym efektem tego punktu jest powołanie rozwinięć wielomianowych rozwiązań podobnych, wyznaczających algebry liniowe. Współczynnikami w tych rozwinięciach są dystrybucje należące do pola $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_t$, które w poprzednich rozdziałach wyznaczały grupy $\mathcal{G}_p$, $\mathcal{G}_p'$, $\mathcal{G}_{...}$. Uzyskane wielomiany macierzowe mogą być traktowane jako elementy przestrzeni wektorowej, o wymiarze ograniczonym przez tożsamość Cayley'a - Hamiltona. Ponadto wykorzystanie tej tożsamości pozwala podać ogólną postać wielomianu generującego rozwiązania podobne.

Ogół zadań rozważanych w tym punkcie formułujemy jako

PROBLEM III. Dla zalgebraizowanych zadań początkowo-brzegowych liniowych ośrodków odkształcalnych należy:

i) zbudować grupę macierzy operatorowych (grupa cykliczna) której elementy generować będą rozwiązania podobne;

ii) przy wykorzystaniu podanych w poprzednich punktach grup $\mathcal{G}_{...}$, $\mathcal{G}_p$, $\mathcal{G}_p'$ oraz grupy macierzy operatorowych zbudować algebrę wyznaczającą rozwiązania podobne;

iii) podać klasyfikację przestrzeni rozwiązań z uwagi na powołaną algebrę.

Przystępujemy do konstrukcji grupy macierzy. Wykorzystujemy w tym celu przetransformowane równanie termo-sprężystości (por. (6.22), (7.2))

$$\bar{\mu}_0(p)\left[|\xi|\ \delta_{ij}\ \hat{u}_j(\xi,q(p))\right] + (\bar{\mu}_0(p)+\bar{\lambda}_0(p))\left[\xi_j\ \xi_i\ \hat{u}_j(\xi,q(p))\right] + \tag{8.1}$$

$$+\ \hat{\Sigma}_i(\xi,p)-i\,\bar{\gamma}_0(p)\left[\xi_i\ \hat{\Theta}(\xi,q(p))\right]=0,$$

gdzie

$$\xi=\left[\xi_1,\xi_2,\xi_3\right],\quad |\xi|=(\xi_j\,\xi_j)^{\frac{1}{2}},\qquad i=\sqrt{-1}$$

Analiza uzyskanego układu równań wykazuje, że mamy do czynienia z pewnym równaniem macierzowym, w którym elementami macierzy są funkcje zmiennej zespolonej((transformaty funkcji wchodzących do równania). Wobec tego układ (8.1) możemy zapisać następująco:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{U}=\mathbf{X} \tag{8.2}$$

gdzie macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$ mają postać (por. [13,28,87])

$$\left[a_{ij}\right]=\left[\delta_{ij}\ \bar{\mu}_0(p)|\xi|+(\bar{\mu}_0(p)+\bar{\lambda}_0(p))\,\xi_i\,\xi_j\right],$$

$$(8.3)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} |\xi|\bar{\mu}_0(p) + \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right](\xi_1)^2, & \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right]\xi_1\xi_2, & \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right]\xi_1\xi_3 \\ \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right]\xi_1\xi_2, & |\xi|\bar{\mu}_0(p) + \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right](\xi_2)^2, & \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right]\xi_2\xi_3 \\ \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right]\xi_3\xi_1, & \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right]\xi_3\xi_2, & |\xi|\bar{\mu}_0(p) + \left[\bar{\mu}_0(p) + \bar{\lambda}_0(p)\right](\xi_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}(\xi,p) = \begin{bmatrix} \hat{\bar{u}}_1(\xi,q(p)) \\ \hat{\bar{u}}_2(\xi,q(p)) \\ \hat{\bar{u}}_3(\xi,q(p)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(\xi p) = \begin{bmatrix} i\ \bar{\gamma}_0(p)\xi_1\hat{\bar{\varpi}}(\xi,q(p)) - \hat{\bar{X}}_1(\xi,p) \\ i\ \bar{\gamma}_0(p)\xi_2\hat{\bar{\varpi}}(\xi,q(p)) - \hat{\bar{X}}_2(\xi,p) \\ i\ \bar{\gamma}_0(p)\xi_3\hat{\bar{\varpi}}(\xi,q(p)) - \hat{\bar{X}}_3(\xi,p) \end{bmatrix}$$

Podane w (8.3) macierze związane są z równaniami teorii termo-starzenia (8,1), z których wynikają jako przypadki szczególne pozostałe równania. W dalszym ciągu nie będzie nas interesowała postać macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$, a jedynie równanie macierzowe (8.2).

Zbiór macierzy postaci

$$(8.4)\quad \mathbf{E},\ \mathbf{A},\ \mathbf{A}^2,\ \ldots,\ \mathbf{A}^k,\ \ldots,\ \mathbf{A}^N,$$

wyznacza grupę macierzy $\mathcal{G}_{\mathbf{A}}$, która jest podgrupą grupy macierzy kwadratowych. Wśród wszystkich macierzy, macierze postaci (8.4) charakteryzują się ciekawą własnością względem równania (8.2); działają one mianowicie tak samo na macierz funkcji poszukiwanych $\mathbf{U}$, jak i na macierz funkcji danych $\mathbf{X}$. Łatwo się o tym przekonać mnożąc obustronnie z lewej równanie (8.2) przez $\mathbf{A}^k$

$$(8.5)\quad \mathbf{A}\left[\mathbf{A}^k\ \mathbf{U}\right] = \left[\mathbf{A}^k\ \mathbf{X}\right].$$

Wynika stąd, że jeżeli $\mathbf{U}$ jest rozwiązaniem równania (8.2) dla macierzy $\mathbf{X}$, to $\mathbf{A}^k\mathbf{U}$ jest rozwiązaniem tegoż równania dla macierzy $\mathbf{A}^k\mathbf{X}$. Korzystaliśmy tutaj z przemienności macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^k$.

W przypadku ogólnym należy poszukiwać takich macierzy $\mathbf{K}$ aby zachodziła relacja

$$(8.6)\quad (\mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{X}) \Longrightarrow (\mathbf{A}\ [\mathbf{K}\ \mathbf{U}] = [\mathbf{K}\ \mathbf{X}])$$

Pomnóżmy w tym celu równanie macierzowe (8.2) przez macierz $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{K}\,\boldsymbol{X}, \tag{8.7}$$

i żądajmy, aby $\mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{A}$, skąd $\mathbf{A}\,[\mathbf{K}\,\mathbf{U}] = [\mathbf{K}\,\boldsymbol{X}]$ zgodnie z równaniem (8.6). Mnożąc prawostronnie zależność $\mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{A}$ przez $\mathbf{K}$ uzyskujemy $\mathbf{K}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{K}$, czyli warunek przemienności mnożenia macierzy $\mathbf{K}$ z macierzą $\mathbf{A}$. Należy zatem poszukiwać macierzy przemiennych z macierzą $\mathbf{A}$ (zadanie Frobeniusa). Macierzami takimi są m.in. potęgi macierzy $\mathbf{A}$.

Uzyskany rezultat ujmiemy jako

Twierdzenie I. Jeżeli równania zagadnienia początkowo-brzegowego w liniowych teoriach ośrodka odkształcalnego można podać w postaci równania macierzowego (8.2), którego rozwiązaniem jest wektor $\mathbf{U}$, to

($\mathcal{E}_1$) istnieje rodzina rozwiązań podobnych $\{\mathbf{U}\}$, postaci

$$\mathbf{U} = (\mathbf{A})^{J}\,\mathbf{U} \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{X} = (\mathbf{A})^{J}\,X \qquad J \in N$$

($\mathcal{E}_2$) rodzina $\{\mathbf{U}\}$ wyznaczona jest przez grupę macierzy $\mathcal{G}_{\mathbf{A}}$, której elementami są całkowite potęgi macierzy $\mathbf{A}$, a działaniem mnożenie macierzy.

Spróbujmy podać odpowiedź na kolejne dwa pytania zawarte w problemie III. Zauważmy w tym celu, że z macierzą $\mathbf{A}$ przemienne są również macierze postaci

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^k,$$

$$\mathbf{K}_2 = \hat{\Phi}_0\,\mathbf{E} + \hat{\Phi}_1\,\mathbf{A} + \hat{\Phi}_2\,\mathbf{A}^2 + \ldots + \hat{\Phi}_k\,\mathbf{A}^k, \qquad \hat{\Phi}_0, \ldots \hat{\Phi}_k \in \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}_x \times \bar{\mathcal{D}}_t. \tag{8.8}$$

Zbiór potęg macierzy $\mathbf{A}$, w którym wprowadzimy zwykłe dodawanie wyznacza moduł K, którego elementy generują również rozwiązania podobne. W konsekwencji w zbiorze (8.4) możemy zbudować pierścień, ponieważ zachodzi

$$(\mathbf{A}^J\,\mathbf{A}^I)\,\mathbf{A}^k = \mathbf{A}^J\,(\mathbf{A}^I\,\mathbf{A}^K),$$

$$(\mathbf{A}^I + \mathbf{A}^J)\,\mathbf{A}^K = \mathbf{A}^I\mathbf{A}^K + \mathbf{A}^J\mathbf{A}^K, \quad \mathbf{A}^K(\mathbf{A}^I + \mathbf{A}^J) = \mathbf{A}^K\,\mathbf{A}^I + \mathbf{A}^K\,\mathbf{A}^J \tag{8.9}$$

Natomiast analizując wielomian macierzowy $\mathbf{K}_2$ stwierdzamy, że jest on najogólniejszą postacią wyrażenia wyznaczającego rozwiązania podobne. Trzeba tylko zaznaczyć, że transformaty dystrybucji zmiennej czasowej i przestrzennej $\hat{\Phi}_{\ldots} \in \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}_x \times \bar{\mathcal{D}}_t$ muszą wyznaczać grupy zgodnie z rozpatrywaną teorią szczególną. Mamy więc do czynienia z trzema grupami: jedną z grup $\mathcal{G}_S$, $\mathcal{G}_{T-S}$, ..., $\mathcal{G}_{T-ST}$, grupę $\mathcal{G}_P$ lub $\mathcal{G}_P$' i $\mathcal{G}_A$, które pozostają z

sobą w najściślejszym związku (por. (8,8')). Elementami dwóch pierwszych grup są transformaty pewnych dystrybucji $\mathcal{D}$ wyznaczających pole, natomiast trzeciej - macierze. Najpełniejszy opis zależności zachodzących między rozpatrywanymi w pracy grupami uzyskamy wprowadzając algebry liniowe rozwiązań podobnych, posiłkując się dodatkowo wynikami zawartymi w pracach [8, 9,10,29,38,65,69,79,82,88,90,96].

Algebrę liniową $\mathcal{A}\hat{\mathcal{D}}$ nad polem transformat dystrybucji $\hat{\mathcal{D}}$ wyznaczać będzie pierścień zbudowany na zbiorze (8.4) ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem macierzy, który jest tym samym skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad polem $\hat{\mathcal{D}}$. W pierścieniu tym mnożenie jest dwuliniowe, czyli

$$\text{(8.10)}\qquad \begin{aligned} &A^I(\hat{\Phi}_1 A^J + \hat{\Phi}_2 A^K) = \hat{\Phi}_1 A^I A^J + \hat{\Phi}_2 A^I A^K \\ &(\hat{\Phi}_1 A^I + \hat{\Phi}_2 A^J)A^K = \hat{\Phi}_1 A^I A^K + \hat{\Phi}_2 A^J A^K \qquad \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2 \in \hat{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Zależności (8.10) zachodzą dla wszystkich elementów pola $\hat{\mathcal{D}}$ oraz pierścienia macierzy.

Pozostaje jeszcze wykazać, że pierścień macierzy jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Zbiór macierzy(8.4) przy zwykłym określeniu dodawania i mnożenia przez liczbę jest przestrzenią liniową. Przestrzeń ta posiada 6 wymiarów, tak, że każde 7 macierzy jest od siebie liniowo zależnych, czyli zachodzi

$$\text{(8.11)}\qquad \hat{\Phi}_0 E + \hat{\Phi}_1 A + \ldots\ldots + \hat{\Phi}_6 A^6 = O, \qquad \hat{\Phi}_0, \ldots \hat{\Phi}_6 \in \hat{\mathcal{D}}$$

Wynik ten nie jest ostateczny. Okazuje się, że każde trzy macierze zbioru (8.4) są liniowo zależne o czym przekonuje nas tożsamość Cayley'a-Hamiltona [84,96].

Twierdzenie II. (Cayley - Hamilton), Macierz kwadratowa A jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego, tzn. jeżeli

$$\text{(8.12)}\qquad \begin{aligned} &P(\lambda) = \det(\lambda E - A), \\ &P(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3, \end{aligned}$$

to

$$\text{(8.13)}\qquad P(A) = A^3 + p_1 A^2 + p_2 A + p_3 E = O, \qquad p_1, p_2, p_3 \in \hat{\mathcal{D}}$$

Z tożsamości Cayley'a - Hamiltona wynikają dwa pożyteczne wnioski. Pierwszy dotyczy wymiaru przestrzeni wektorowych związanych z algebrami roz-

wiązań podobnych. Natomiast drugi pozwala określić ogólną postać wielomianu generującego rozwiązania podobne. Oto ogólna postać tego wielomianu

$$P(A) = \hat{\Phi}_0 E + \hat{\Phi}_1 A + \hat{\Phi}_2 A^2, \qquad \hat{\Phi}_0, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2 \in \hat{\mathcal{D}}. \tag{8.14}$$

Zauważmy, że we wzorze (8.14) zawarte są jako przypadki szczególne funkcje wyznaczające rozwiązania podobne, które podaliśmy w dwóch poprzednich punktach.

Równanie macierzowe (8.2) związane jest jednoznacznie z równaniami przemieszczeniowymi teorii termo-starzenia się (7.1). W konsekwencji, macierzy A będzie jednoznacznie przyporządkowana macierz operatorów $\mathcal{A}$ a algebrze AP algebra operatorów AO nad polem dystrybucji D. Algebry AP i AO są izomorficzne względem siebie, co oznacza, że izomorficzne będą również odpowiednie pierścienie i pola wyznaczające obie algebry [9,38]. Dokładniej warunki izomorfizmu precyzuje

WŁASNOŚĆ 4.(Izomorfizm algebr AO i $\mathcal{A}\mathcal{P}$)

Algebra rozwiązań podobnych AP, której elementami są macierze zespolone, a działaniem zwykłe mnożenie i dodawanie tychże macierzy określone nad polem transformat dystrybucji $\hat{\mathcal{D}}_x$ x $\bar{\mathcal{D}}_t$ ($\bar{\varphi} \in \bar{\mathcal{D}}_t$, $\hat{\psi} \in \hat{\mathcal{D}}_x$) jest izomorficzna z algebrą operatorów rozwiązań podobnych AO. Algebrę AO wyznacza pierścień macierzy-operatorów o złożeniu i sumie jako działaniach. Pierścień ten określony jest nad polem dystrybucji $\mathcal{D}_x$ x $\mathcal{D}_t$.

Zachodzą przy tym zależności

$$\begin{aligned}
&AP \xrightarrow{\ I\ } AO \\
&A^N A^K \xleftrightarrow{\ I\ } \mathcal{A}^N \circ \mathcal{A}^K \qquad \mathcal{A}^K = \underbrace{\mathcal{A}\circ\mathcal{A}\circ\ldots\circ\mathcal{A}}_{k\text{-razy}} \\
&(A^N + A^M) \xleftrightarrow{\ I\ } (\mathcal{A}^N + \mathcal{A}^M) \\
&A^K(\varphi_1 + \bar{\varphi}_2) \xrightarrow{\ I\ } \mathcal{A}^K(\varphi_1+\varphi_2) = \mathcal{A}^K \varphi_1 + \mathcal{A}^K \varphi_2 \\
&A^K(\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2) \xleftarrow{\ I\ } \mathcal{A}^K(\psi_1+\psi_2) = \mathcal{A}^K \psi_1 + \mathcal{A}^K \psi_2 \\
&\mathcal{L}\circ\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{L}^{-1} = I \qquad \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \in \bar{\mathcal{D}}_t,\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_t,\ \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in \hat{\mathcal{D}}_x,\ \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}_x.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Na podstawie tożsamości Cayley'a - Hamiltona i izomorfizmu algebr AP i AO możemy podać ogólną postać operatora generującego rozwiązania podobne. Oto on

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = E\,\Phi_0 + \mathcal{A}\Phi_1 + \mathcal{A}^2\Phi_2, \qquad \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_t. \tag{8.16}$$

Operator wielomianowy $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ odpowiada wielomianowi macierzowemu (8.14).

Powrócimy jeszcze do algebry AP i rozpatrzymy w niej pewne funkcje $f(\mathbf{A})$ macierzy $\mathbf{A}$. Interesować nas będzie głównie odpowiedź na pytanie: jaki zbiór tych funkcji może generować rozwiązania podobne

Odpowiedź na postawione pytanie daje kolejne

Twierdzenie III. Jeżeli funkcję $f(z)$ zmiennej z można rozłożyć w szereg potęgowy w okręgu $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \alpha_s (z-z_0)^s \tag{8.17}$$

to rozkład ten pozostaje również prawdziwy przy zamianie argumentu z na macierz $\mathbf{A}$, której wartości własne λ_i leżą we wnętrzu okręgu o promieniu zbieżności $|z-z_0|<r$ (por. np. [84]).

Określony został tym samym zbiór funkcji macierzowych $\mathcal{M}$, które wyznaczać będą również rozwiązania podobne. Do funkcji tych należą np. macierze

$$\begin{aligned}
\sin \mathbf{A} &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathbf{A}^{2k+1}, \quad \cos \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \mathbf{A}^{2k}, \\
\operatorname{sh} \mathbf{A} &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \mathbf{A}^{2k+1}, \quad \operatorname{ch} \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(2k)!} \mathbf{A}^{2k}, \\
e^{\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Między funkcjami (8.18) zachodzą zależności podobne do powszechnie znanych np. $\cos^2 \mathbf{A} + \sin^2 \mathbf{A} = \mathbf{E}$, $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{E}$.
Szersze omówienie własności funkcji macierzowych można znaleźć w monografii [96].

Ostatnią z omawianych właściwości algebr AP będzie współzależność rozwiązań podobnych wyznaczanych przez nią w stosunku do rozwiązań generowanych przez grupy $\mathcal{G}_{...}$, $\mathcal{G}_P$ lub $\mathcal{G}_{P'}$.

Właściwość tę ujmuje

Twierdzenie IV. Klasa rozwiązań podobnych generowanych przez algebrę AP $\{\mathbf{U}\}_{AP}$, dla ustalonego $\mathbf{U}$ zawiera w sobie jako podzbiory rozwiązania podobne wyznaczone przez grupy $\mathcal{G}_{...}$, $\mathcal{G}_P$ lub $\mathcal{G}_{P'}$ -

$$\{\mathbf{U}\}_{\mathcal{G}_{...}}, \quad \{\mathbf{U}\}_{\mathcal{G}_P}, \quad \{\mathbf{U}\}_{\mathcal{G}_{P'}}, \quad \text{czyli}$$

$$\{\mathbf{U}\}_{\mathcal{G}_P} \subset \{\mathbf{U}\}_{AP}, \quad \{\mathbf{U}\}_{\mathcal{G}_{...}} \subseteq \{\mathbf{U}\}_{AP}. \tag{8.19}$$

Dowód twierdzenia IV wynika z określenia algebry AP oraz grup $\mathcal{G}_{.....}$, $\mathcal{G}_{p}$ lub $\mathcal{G}_{p'}$.

Udzielimy teraz odpowiedzi na ostatnie z pytań problemu III. Wprowadzimy w tym celu w przestrzeni rozwiązań $\mathcal{W}$ nową relację równoważności R w ten sposób, że będziemy utożsamiali ze sobą wszystkie rozwiązania podobne generowane przez algebrę AP.

Otrzymujemy:

$$(8.20) \qquad (U_1 \; R \; U_2) \Leftrightarrow (U_2 = \mathcal{N} U_1; \; X_2 = \mathcal{N} X_1, \; \mathcal{N} \in AO, \; U_1, U_2 \in \mathcal{W}).$$

Uzyskana w wyniku wprowadzenia relacji równoważności R przestrzeń ilorazowa $\mathcal{W}/R$ zawierać będzie jedynie różne rozwiązania podobne względem algebry AO.

$$(8.21) \qquad \mathcal{W}/R = \left\{U\right\}_{AO}, \qquad U_1, \; U_2 \in \left\{U\right\}_{AO}$$

Zauważmy jednak, że wektory $\hat{U}$ i $\hat{X}$ należą do trójwymiarowej przestrzeni liniowej, a wobec tego wektory $\hat{U}$, $A\hat{U}$, $A A \hat{U}$, $\hat{X}$, $A\hat{X}$, $A A \hat{X}$ są liniowo niezależne i mogą stanowić bazę w przestrzeni rozwiązań. Wynika stąd, że rozwiązania zadań brzegowych z przestrzeni $\mathcal{W}$ można uzyskać na podstawie znajomości jednego rozwiązania, pod warunkiem, że istnieje możliwość algebraizacji tych zadań[x].

Podobne rozważania można prowadzić również w stosunku do rozwiązań podobnych generowanych przez wprowadzone poprzednio grupy. W wyniku otrzymamy przestrzeń ilorazową zawierającą jedynie różne rozwiązania wzajemnie niepodobne. Tym samym problem znalezienia wszystkich rozwiązań w przestrzeni $\mathcal{W}$ można sprowadzić do zadania prostszego - poszukiwania rozwiązań wzajemnie niepodobnych.

Zakończony w tym momencie proces algebraizacji daje obraz korzyści jakie można uzyskać z wprowadzenia grup względnie algebr rozwiązań podobnych w przestrzeni $\mathcal{W}$. Podsumujmy je. Uzyskaliśmy z jednej strony nowe spojrzenie na wewnętrzną strukturę równań mechaniki ośrodka odkształcalnego. Dalsze jej badanie może przyczynić się do wykrycia nowych podobieństw między równaniami poszczególnych teorii. Z drugiej strony uzyskaliśmy metodę, która pozwala na pełniejsze wykorzystywanie każdego rozwiązania zadania początkowo-brzegowego do poszukiwania innych rozwiązań w tej samej teorii.

---

x) Pojęciem algebraizacji zadań brzegowych określamy w pracy sprowadzenie równań zadania brzegowego do pewnego równania macierzowego np. przez zastosowanie transformacji całkowych Fouriera.

9. Algebry rozwiązań podobnych w teoriach szczególnych

Ogólne ujęcie wprowadzonych w poprzednim punkcie algebr AP i AO pozwoliło na jednolite i zwarte potraktowanie zagadnienia. W tym punkcie natomiast zostaną skonkretyzowane elementy algebr przypisanych poszczególnym teoriom ośrodka odkształcalnego. W pierwszej kolejności pod ogólną postać grup: $\mathcal{G}_{...}$, $\mathcal{G}_P$, macierzy A i algebr AP i AO, podstawimy konkretne grupy, macierze i algebry, przyporządkowane odpowiednim teoriom. Proces ten będzie przebiegał podobnie jak w poprzednich punktach, gdzie powoływaliśmy najpierw grupy w termo-lepkosprężystości, a następnie w lepkosprężystości kończąc na teorii termo-starzenia. W efekcie otrzymujemy macierze A i $\mathcal{A}$ w poszczególnych teoriach ośrodka odkształcalnego.

9.1. Algebra rozwiązań podobnych w termo-lepkosprężystości

Algebrę tą określa układ trzech grup $\mathcal{G}_{T-L-S}$, $\mathcal{G}_P$, $\mathcal{G}_{A_{T-L-S}}$ oraz pól dystrybucji D_x i D_t. Ogólna postać funkcji macierzowej w tej algebrze $f(A_{T-L-S}) \in AP_{T-L-S}$ jest następująca (por. (8.14))

$$f(A_{T-L-S}) = \hat{\Phi}_0 E + \hat{\Phi}_1 A_{T-L-S} + \hat{\Phi}_2 A^2_{T-L-S}, \qquad \hat{\Phi}_0, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2 \in \hat{D} \tag{9.1}$$

Macierzy $f(A_{T-L-S})$ odpowiada izomorficznie ($AP_{T-L-S} \xrightarrow{\text{izom.}} AO_{T-L-S}$) macierz operatorów $\mathcal{N}(\mathcal{A}_{T-L-S}) \in AO_{T-L-S}$

$$\mathcal{N}_1(\mathcal{A}_{T-L-S}) = \left[\varphi_0 E + \varphi_1 \mathcal{A}_{T-L-S} + \varphi_2 \mathcal{A}^2_{T-L-S}\right]^*, \qquad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in D_t \tag{9.2}$$

$$\mathcal{N}_2(\mathcal{A}_{T-L-S}) = \left[\psi_0 E + \psi_1 \mathcal{A}_{T-L-S} + \psi_2 \mathcal{A}^2_{T-L-S}\right]^{\hat{*}}, \qquad \psi_0, \psi_1, \psi_2 \in D_x$$

Operatory $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ są w rzeczywistości macierzami uzyskanymi przez różniczkowanie dystrybucji φ_0, φ_1, φ_2 lub ψ_0, ψ_1, ψ_2, natomiast macierze A_{T-L-S} i $\mathcal{A}_{T-L-S}$ mają postać

$$A_{T-L-S} = \left[(\mu(p)|\xi|^2 + \varrho p^2)\,\delta_{ij} + (\lambda(p) + \mu(p))\,\xi_i \xi_j\right], \tag{9.3}$$

$$\mathcal{A}_{T-L-S} = \left[(-\mu * \Delta + \varrho \partial_{tt})\,\delta_{ij} - (\lambda + \mu) * \partial_{ij}\right], \tag{9.4}$$

tutaj przyjęto oznaczenia $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\Delta \equiv \partial_{jj}$.

W lepkosprężystości należy dokonać zamiany grup: $\mathcal{G}_{T-L-S}$ na $\mathcal{G}_{L-S}$ i $\mathcal{G}_P$ na $\mathcal{G}_{P'}$ oraz w wektorze uogólnionych sił masowych $\overline{X}_i = \left[X_i(x,t) - \right.$ $\left. - \vartheta(t) * \Theta_{,i}(x,t)\right]$ przyjąć $\Theta = 0$.

Następna algebra związana jest z teorią naprężeń cieplnych w ośrodku sprężystym oraz teorią sprężystości.

9.2. Algebra rozwiązań podobnych w termosprężystości

Układ trzech grup $\mathcal{G}_{T-S}$, $\mathcal{G}_P$, $\mathcal{G}_{A_{T-S}}$ oraz pól D_x i D_t określa algebrę AP_{T-S}, w której ogólna postać funkcji macierzowej $f(A_{T-S})$ jest następująca:

$$f(A_{T-S}) = \hat{\Phi}_0 E + \hat{\Phi}_1 A_{T-S} + \hat{\Phi}_2 A^2_{T-S} \tag{9.5}$$

Z algebrą AP_{T-S} związana jest izomorficznie algebra AO_{T-S}, a z wielomianem $f(A_{T-S})$ wielomiany operatorowe $\mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4 \in AO_{T-S}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3(\mathcal{A}_{T-S}) &= \left[\varphi_0 E + \varphi_1 \mathcal{A}_{T-S} + \varphi_2 \mathcal{A}^2_{T-S}\right] * \\ \mathcal{N}_4(\mathcal{A}_{T-S}) &= \left[\psi_0 E + \psi_1 \mathcal{A}_{T-S} + \psi_2 \mathcal{A}^2_{T-S}\right] \hat{*} \end{aligned} \tag{9.6}$$

Występujące w rozwinięciach (9.5) i (9.6) macierze A_{T-S} i $\mathcal{A}_{T-S}$ mają postać (por. [13,28])

$$A_{T-S} = \left[(\mu |\xi|^2 + \varrho p^2)\delta_{ij} + (\lambda+\mu)\xi_i \xi_j\right] \tag{9.7}$$

$$\mathcal{A}_{T-S} = \left[(-\mu\Delta + \varrho\partial_{tt})\delta_{ij} - (\lambda+\mu)\partial_{ij}\right] \tag{9.8}$$

W teorii sprężystości macierze A_{T-S} i $\mathcal{A}_{T-S}$ pozostają bez zmian, natomiast należy zastąpić grupy $\mathcal{G}_{T-S}$ i $\mathcal{G}_P$ grupami $\mathcal{G}_S$ i $\mathcal{G}_P$, oraz wektor uogólnionych sił masowych $\overline{X}_i = \left[X_i(x,t) - \vartheta\,\Theta_{,i}(x,t)\right]$ wektorem $\overline{X}'_i = \left[X_i(x,t)\right]$.

Ostatnia para algebr związana jest z teoriami starzenia.

9.3. Algebra rozwiązań podobnych w teorii termo-starzenia

Algebrę tę określa układ grup $\mathcal{G}_{T-ST} \xrightarrow{\text{izom.}} \mathcal{G}_{T-L-S}$, $\mathcal{G}_P$ i $\mathcal{G}_{A_{T-ST}}$ oraz pól dystrybucji D_x i D_t.

Ogólna postać funkcji macierzowej $f(A_{T-ST}) \in AP_{T-ST}$ jest następująca:

$$f(A_{T-ST}) = \hat{\Phi}_0 E + \hat{\Phi}_1 A_{T-ST} + \hat{\Phi}_2 A^2_{T-ST}, \qquad \hat{\Phi}_0\, \hat{\Phi}_1\, \hat{\Phi}_2 \in \hat{D} \tag{9.9}$$

Algebrze AP_{T-ST} przypisana jest przez izomorfizm algebra AO_{T-ST}, a wielomianowi $f(A_{T-ST})$ operatory $\mathcal{N}_5, \mathcal{N}_6 \in AO_{T-ST}$

$$\mathcal{N}_5(\mathcal{A}_{T-ST}) = \left[\varphi_0 E + \varphi_1 \mathcal{A}_{T-ST} + \varphi_2 \mathcal{A}^2_{T-ST}\right]^*$$

(9.10)

$$\mathcal{N}_6(\mathcal{A}_{T-ST}) = \left[\psi_0 E + \psi_1 \mathcal{A}_{T-ST} + \psi_2 \mathcal{A}^2_{T-ST}\right]^{\hat{*}}$$

Występujące w tej algebrze macierze A_{T-ST} i $\mathcal{A}_{T-ST}$ mają postać

$$A_{T-ST} = \left[(\bar{\mu}_0(p) |\xi|\delta_{ij} + (\bar{\lambda}_0(p) + \bar{\mu}_0(p))\xi_i\xi_j\right] \tag{9.11}$$

$$\mathcal{A}_{T-ST} = \left[(\mu(t,\tau)\square\Delta)\delta_{ij} + (\lambda(t,\tau)+\mu(t,\tau)\square\partial_{ij}\right] \tag{9.12}$$

W teorii starzenia należy wymienić grupy $\mathcal{G}_{T-ST}$ na $\mathcal{G}_S$ i $\mathcal{G}_P$ na $\mathcal{G}_P$, a w wektorze uogólnionych sił masowych $X_i = \left[X_i(x,t) - \vartheta(t,\tau)\square\Theta_{,i}(x,t)\right]$ przyjąć $\Theta \equiv 0$.

Podane w tym rozdziale algebry rozwiązań podobnych uwypuklają podobieństwo i różnice w budowie równań poszczególnych teorii liniowej mechaniki. W szczególności dostrzegamy różnice między macierzami A_{T-S}, A_{T-L-S} i A_{T-ST} oraz między operatorami $\mathcal{A}_{T-S}$, $\mathcal{A}_{T-L-S}$ i $\mathcal{A}_{T-ST}$. Zauważmy przy tym, że jeżeli ograniczymy się do pierwszego wyrazu rozwinięcia wyrażeń wielomianowych, to otrzymujemy przypadek szczególny - przekształcenie generowane przez grupy $\mathcal{G}_{...}$ i $\mathcal{G}_P$.

10. Symetrie w liniowych teoriach ośrodka odkształcalnego

W tym punkcie będziemy badali symetrie występujące w rozwiązaniach równań liniowej mechaniki ośrodka odkształcalnego. Przeanalizujemy w tym celu ponownie grupę $\mathcal{G}_{T-L-S}$ oraz jeszcze dwie inne grupy, skupiając się głównie na analizie niezmienniczych właściwości rozwiązań związanych z wymienionymi grupami. Sytuacja jest tutaj następująca: dana jest przestrzeń rozwiązań oraz zbiór przekształceń wyznaczających nieskończone grupy, które zachowują operatory zadań początkowo-brzegowych mechaniki. Zbiór niezmienników analizowanych grup wyznacza symetrię odpowiedniej przestrzeni. W punkcie niniejszym omówimy te symetrie na przykładzie termo-lepkosprężystości oraz sformułujemy dwa zadania dotyczące wyboru optymalnych funkcji materiałowych w ośrodku termo-lepkosprężystym. Zadania te wynikają bezpośrednie z niezmienniczych właściwości równań mechaniki.

Z drugiej strony zbiór niezmienniczych własności przekształceń wyznacza geometrię (w sensie Kleina) badanej przestrzeni. Określając właściwości geometryczne możemy ponadto udzielić odpowiedzi na pytanie: kiedy o dowolnych dwóch rozwiązaniach możemy powiedzieć, że należą do tej samej rodziny rozwiązań podobnych.

Oczywiście rozwiązania należące do tej samej rodziny są generowane tylko przez elementy grupy $\mathcal{G}_{T-L-S}$.

W niniejszym punkcie dla zwięzłości rozważań ograniczymy się do teorii naprężeń cieplnych w ośrodku lepkosprężystym, z których wynikają w dalszej kolejności symetrie w pozostałych ośrodkach.

Równania teorii naprężeń cieplnych w ośrodku lepkosprężystym (3.2) oraz warunki brzegowe w przemieszczeniach (2.19), naprężeniach (2.19') i zerowe warunki początkowe $u_i(x,0) = \dot{u}_i(x,0) = 0$ dopuszczają przekształcenia wyznaczone przez grupy: $\mathcal{G}^1_{T-L-S}$, $\mathcal{G}^2_{T-L-S}$ i $\mathcal{G}^3_{T-L-S}$, które krótko będziemy oznaczali $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \mathcal{G}^3$. Grupy te wyznaczone są przez następujące transformacje

$$
\begin{array}{lll}
u_i \longrightarrow \varphi_1 * u_i & u_i \longrightarrow \varphi_2^{-1} * u_i & u_i \longrightarrow u_i \\
\overset{\circ}{u}_i \longrightarrow \varphi_1 * \overset{\circ}{u}_i & \overset{\circ}{u}_i \longrightarrow \varphi_2^{-1} * \overset{\circ}{u}_i & \overset{\circ}{u}_i \longrightarrow \overset{\circ}{u}_i \\
\Theta \longrightarrow \varphi_1 * \Theta & \Theta \longrightarrow \varphi_2^{-1} * \Theta & \Theta \longrightarrow \Theta \ ,
\end{array} \tag{10.1}
$$

$$
\begin{array}{lll}
X_i \longrightarrow \varphi_1 * X_i & X_i \longrightarrow X_i & X_i \longrightarrow \varphi_3 * X_i \\
P_i \longrightarrow \varphi_1 * P_i & P_i \longrightarrow P_i & P_i \longrightarrow \varphi_3 * P_i \\
(\sigma_{ij} \longrightarrow \varphi_1 * \sigma_{ij}) & (\sigma_{ij} \longrightarrow \sigma_{ij}) & (\sigma_{ij} \longrightarrow \varphi_3 * \sigma_{ij}),
\end{array} \tag{10.2}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\lambda \longrightarrow \lambda & \lambda \longrightarrow \varphi_2 * \lambda & \lambda \longrightarrow \varphi_3 * \lambda \\
\mu \longrightarrow \mu & \mu \longrightarrow \varphi_2 * \mu & \mu \longrightarrow \varphi_3 * \mu \\
\vartheta \longrightarrow \vartheta & \vartheta \longrightarrow \varphi_2 * \vartheta & \vartheta \longrightarrow \varphi_3 * \vartheta, \\
\varphi_1 \in \mathcal{G}^1 & \varphi_2 \in \mathcal{G}^2 & \varphi_3 \in \mathcal{G}^3
\end{array} \tag{10.3}
$$

gdzie φ_1, φ_2 i φ_3 są dystrybucjami zmiennej czasowej t, przy czym $\varphi * \varphi^{-1} = \delta$, gdzie δ - jest dystrybucją Dirac'a. Należy podkreślić, że grupy $\mathcal{G}^2$ i $\mathcal{G}^3$ są dodatkowo ograniczone, ponieważ nie wszystkie funkcje postaci $\varphi \ldots * \lambda$ mogą być nowymi funkcjami materiałowymi, ponadto dla grupy $\mathcal{G}^2$ musi zachodzić $\dot{u}_i = 0$. Zauważmy, że iloczyn prosty grup $\overset{\circ}{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}^2 \times \mathcal{G}^3$ również zachowuje operatory równań mechaniki ośrodka odkształcalnego. Mamy w tym przypadku do czynienia z grupą $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$, której dzielnikami, są grupy $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$ i $\mathcal{G}^3$.

Grupę tę wyznacza trójka parametrów p_1, p_2 i p_3, spełniająca relacje

$$u_i \longrightarrow p_1 * u_i = u_i' \qquad \lambda \longrightarrow p_2 * \lambda = \lambda' \qquad X_i \longrightarrow p_3 * X_i = X_i'$$

$$\overset{\circ}{u}_i \longrightarrow p_1 * \overset{\circ}{u}_i = \overset{\circ}{u}_i' \qquad \mu \longrightarrow p_2 * \mu = \mu' \qquad P_i \longrightarrow p_3 * P_i = P_i' \tag{10.4}$$

$$\Theta \longrightarrow p_1 * \Theta = \Theta' \qquad \vartheta \longrightarrow p_3 * \vartheta = \vartheta' \qquad (\sigma_{ij} \longrightarrow p_3 * \sigma_{ij} = \sigma_{ij}').$$

Parametry p_1, p_2 i p_3 związane są z parametrami grup $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$ i $\mathcal{G}^3$ oczywistymi zależnościami

$$p_1 = \varphi_1 + \varphi_2^{-1} + \delta, \qquad p_2 = \delta + \varphi_2 + \varphi_3, \qquad p_3 = \varphi_1 + \delta + \varphi_3. \tag{10.5}$$

Zwrócimy teraz uwagę na funkcje, które pozostają niezmiennicze przy transformacjach generowanych przez grupy $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$ i $\mathcal{G}^3$. Zauważmy przy tym, że grupy $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$ i $\mathcal{G}^3$ oraz ich iloczyn transformują zadania początkowo-brzegowe w ten sposób, że istnieją trzy grupy funkcji $\left\{u_i, \overset{\circ}{u}_i, \Theta, i\right\}$, $\left\{X_i, P_i\right\}$, $\left\{\lambda, \mu, \vartheta\right\}$, których elementy transformują się tak samo. Spostrzeżenie to stanowi jedną ze strukturalnych właściwości równań liniowej mechaniki ciała odkształcalnego.

WŁASNOŚĆ 5. Funkcje występujące w równaniach zadania początkowo-brzegowego liniowej mechaniki ośrodka odkształcalnego można podzielić na trzy grupy:

$$\begin{gathered} \left\{u_i, \overset{\circ}{u}_i, \Theta\right\}, \\ \left\{X_i, P_i, (\sigma_{ij})\right\}, \\ \left\{\lambda, \mu, \vartheta\right\}, \end{gathered} \tag{10.6}$$

które transformują się identycznie pod wpływem przekształceń generowanych przez grupy $\mathcal{G}^1$, $\mathcal{G}^2$, $\mathcal{G}^3$ i $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$ ($\overset{\circ}{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}^2 \times \mathcal{G}^3$). Na podstawie przytoczonej własności można uzyskać układ niezmienników grupy $\overset{\circ}{\mathcal{G}} = \mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}^2 \times \mathcal{G}^3$

10.1. Układ niezmienników grupy $\overset{\circ}{\mathcal{G}}$

Jeżeli para rozwiązań zadania początkowo-brzegowego w termo-lepkosprężystości

$$u_i(x,t;\ X_i, P_i, \Theta, \overset{\circ}{u}_i, \lambda, \mu, \vartheta), \qquad u_i'(x,t;\ X_i', P_i', \Theta', \overset{\circ}{u}_i', \lambda', \mu', \vartheta') \in \mathcal{W}_{T\text{-}L\text{-}S}$$

związana jest przekształceniem (10.4) co zapiszemy symbolicznie

$$(10.7) \qquad \langle P_1, P_2, P_3 \rangle * u_i = u_i'$$

to dowolne ilorazy splotowe, tzn. wyrażenia postaci $u_i * \overset{\circ}{u}_i^{-1}$ w obrębie każdego z układów funkcji

$$\left\{ u_i, \overset{\circ}{u}_i, \Theta_{,i} \right\} \qquad \left\{ X_i, P_i, (\sigma_{ij}) \right\}, \qquad \left\{ \lambda, \mu, \vartheta \right\},$$

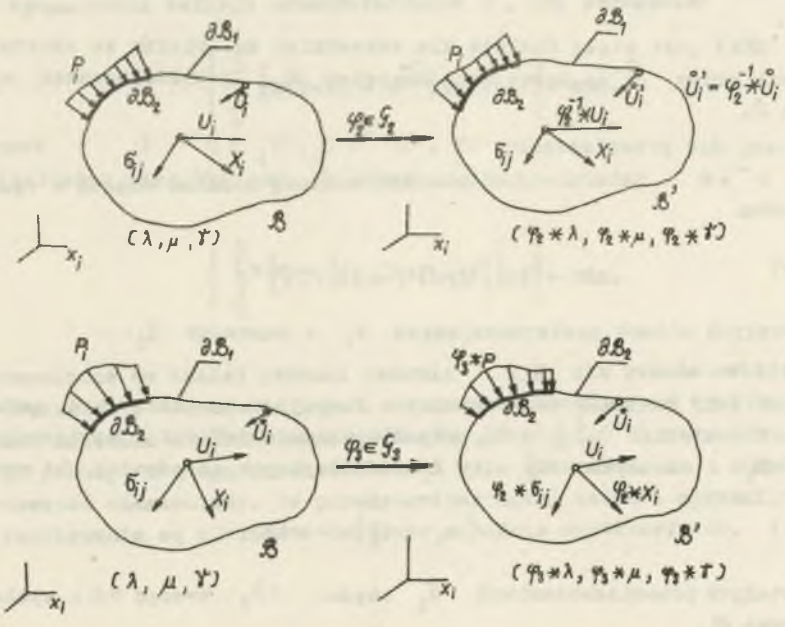
są niezmiennicze względem przekształceń (10.7).

Niezmiennikami grupy $\mathcal{G}$ będą m.in. funkcje

$$(10.8) \qquad \begin{aligned} &\lambda * \mu^{-1}, \qquad \lambda * \vartheta^{-1}, \qquad \mu * \vartheta^{-1}, \\ &u_i * \overset{\circ}{u}_i^{-1}, \qquad u_i * \Theta_{,i}^{-1}, \\ &X_i * P_i^{-1}, \end{aligned}$$

które określają tym samym również geometrię przestrzeni $\mathcal{V}_{T-L-S}^{\circ}$ względem grupy $\mathcal{G}$.

Oczywiście w grupach $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ i $\mathcal{G}_3$ niezmiennikami będą także inne układy funkcji występujących w równaniach zagadnienia początkowo-brzegowego termo-lepkosprężystości.



Rys. 2. Zadania optymalizacyjne

Dalszych badań geometrycznych własności przestrzeni rozwiązań nie będziemy w pracy prowadzili, skupiając uwagę jedynie na pewnych szczególnych cechach grup $\mathcal{G}_2$ i $\mathcal{G}_3$.

Zauważmy, że w przypadku grupy $\mathcal{G}_2$ mimo zmian przemieszczeń i temperatury ośrodka stan naprężeń pozostał niezmieniony. Podobnie grupa $\mathcal{G}_3$ wyznacza przekształcenia, w których niezmieniony stan przemieszczeń występuje obok zmian stanu naprężenia w ośrodku.

Przytoczone uwagi wskazują na możliwość wykorzystania grup $\mathcal{G}^2$ i $\mathcal{G}^3$ do modelowania pewnych własności ośrodków lepkosprężystych.

10.2. Zadania optymalizacyjne

Będziemy rozpatrywali dwa ośrodki lepkosprężyste $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}^*$ poddane działaniu pól temperatur, sił masowych, powierzchniowych i przemieszczeń. Konfiguracje obu ośrodków są identyczne, różnią się one natomiast materiałem z którego są wykonane oraz wpływami zewnętrznymi (pola temperatur, sił masowych i powierzchniowych).

Możemy sformułować teraz dwa zadania optymalizacyjne:

ZADANIE 1. Znamy klasę dopuszczalnych funkcji materiałowych $\mathcal{M}$ $(\mu,\lambda)\in\mathcal{M}$ ograniczoną zależnościami

$$\mu * \lambda^{-1} = \mathcal{O}(t) \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{\mu} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \dot{\lambda} = 0 \tag{10.9}$$

gdzie $\mathcal{O}(t)$ jest stałą funkcją dla wszystkich materiałów ze zbioru $\mathcal{M}$ (niezmiennik grupy $\overset{0}{\mathcal{G}}$); znamy stan naprężeń σ_{ij} i przemieszczeń u_i w ośrodku $\mathcal{B}$.

Należy dla przemieszczeń $u_i' = \varphi^{-1} * u_i$, $\overset{0}{u}{}_i' = \varphi^{-1} * \overset{0}{u}_i$ i temperatury $\Theta' = \varphi^{-1} * \Theta$ działających na ośrodek $\mathcal{B}$, znaleźć taki materiał $(\overset{0}{\mu}, \overset{0}{\lambda}) \in \mathcal{M}$ aby norma

$$\| \sigma_{ij} - \sigma_{ij}' \| = \min. \tag{10.10}$$

przy stałych siłach powierzchniowych P_i i masowych X_i.

ZADANIE 2. W klasie dopuszczalnych funkcji materiałowych $\mathcal{M}$, należy znaleźć taki materiał $(\overset{0}{\mu}, \overset{0}{\lambda}) \in \mathcal{M}$, aby dla zmienionych sił powierzchniowych $P_i' = \varphi * P_i$ i masowych $X_i' = \varphi * X_i$ działających na ośrodek $\mathcal{B}'$ norma

$$\| u_i - u_i' \| = \min \tag{10.11}$$

przy stałych przemieszczeniach $\overset{0}{u}_i$ części $\partial\mathcal{B}_2$ brzegu $\partial\mathcal{B}$ i stałej temperaturze Θ.

Norma $\| \ \|$ w obu zadaniach określona jest na całym ośrodku $\mathcal{B}$ i w czasie $t \in [0, \infty)$.

Rozwiązanie pierwszego zadania jest równoważne z określeniem takiego przekształcenia $\Phi : (\mu, \lambda) \longrightarrow (\mu_0, \lambda_0)$, $\mu_0 = \Phi * \mu$, $\lambda_0 = \Phi * \lambda$, aby różnica między $\Phi * u_i$, $\Phi * \Theta$ a $\varphi^{-1} * u_i$ i $\varphi^{-1} * \Theta$ była jak najmniejsza, czyli normy $\| \Phi * u_i - \varphi^{-1} * u_i \|$ i $\| \Phi * \Theta - \varphi^{-1} * \Theta \|$ powinne przyjmować wartość minimalną. Podobne rozważania przeprowadzone w zadaniu 2 prowadzą również do wyznaczenia takiego przekształcenia Ψ: $(\mu, \lambda) \to (\mu_0', \lambda_0')$ $\mu_0' = \Psi * \mu$, $\lambda_0' = \Psi * \lambda$, które doprowadza do minimalizacji normy $\| \Psi * \sigma_{ij} - \varphi * \sigma_{ij} \|$.

W obu zadaniach należy minimalizować wyrażenie postaci $\| f * Lu_i - f' * Lu_i \| = \| (f - f') * Lu_i \| = \| \Delta * Lu_i \|$ gdzie L jest pewnym jedno-jednoznacznym liniowym operatorem zmiennych przestrzennych. Analizując równość $\| \Delta * Lu_i \| = \| \Delta' \ Lu_i \|$ zauważamy, że warunek: $\min \| (f - f') * Lu_i \|$ sprowadza się do poszukiwania $\min \| \Delta' \|$. Funkcję Δ' obliczymy z równości

$$\int_0^t \Delta(t-\tau) \ L \ u_i(\tau) d\tau = \int_0^t \delta(t-\tau) \Delta'(\tau) L \ u_i(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^t \left[\Delta(t-\tau) - \delta(t-\tau) \Delta'(\tau) \right] L \ u_i(\tau) d\tau = 0 \implies \int_0^t \Delta(t-\tau) d\tau = \Delta'(t).$$

Ostatecznie rozwiązanie pierwszego zadania optymalizacyjnego sprowadza się do wyznaczenia takiego przekształcenia Φ, aby zachodziło

$$\left| \int_0^t \left[\Phi(t-\tau) - \varphi^{-1}(t-\tau) \right] d\tau \right| = \min.$$

Natomiast w drugim zadaniu powinno zachodzić

$$\left| \int_0^t \left[\psi(t-\tau) - \varphi(t-\tau) \right] d\tau \right| = \min.$$

Doprowadzone do takiej postaci zadania 1 i 2 nie przedstawiają większych trudności w trakcie dalszych obliczeń. Zauważmy przy tym, że w obu zadaniach należało znaleźć takie parametry grup ς^3 i ς^2, aby ich odległość od pewnego znanego przekształcenia była minimalna. W zakończeniu tych rozważań nadmieniamy, że przedstawione tutaj zadania optymalizacyjne i ich rozwiązania są słuszne w dowolnym układzie współrzędnych.

ROZDZIAŁ III

ZASTOSOWANIA

11. Przestrzeń i półprzestrzeń lepkosprężysta

Wyniki ogólne uzyskane w poprzednich rozdziałach będą służyły do wyznaczenia rodzin rozwiązań podobnych. Sposób uzyskiwania tych rodzin był ogólnie omówiony w punktach 6,7 i 8. Tutaj przedstawimy przykłady zastosowań związane z wyznaczeniem przemieszczeń w przestrzeni względnie półprzestrzeni sprężystej i lepkosprężystej. W pierwszej kolejności podamy szczególne postacie macierzy, generujących rozwiązania podobne, które uzyskamy z pewnej dystrybucji zmiennych x i t. Następnie wykorzystamy rozwiązanie Kelvina i analogię $\mathcal{K}_2$ do konstrukcji rozwiązań podobnych w przestrzennym zadaniu teorii termo-starzenia. Ostatnie przykłady dotyczą półprzestrzeni lepkosprężystej, a szczególnie wykorzystania rozwiązania Boussinesqua do konstrukcji innych rozwiązań zamkniętych w tym przypadku.

11.1. Macierze B algebr rozwiązań podobnych

Rozpatrywane dalej macierze są drugim wyrazem rozwinięcia wielomianowego algebry AO ...., czyli mają postać

$$\mathcal{A}\Phi = \mathbf{B}; \qquad \Phi \in D \qquad \mathcal{A} \in A\mathcal{O}, \tag{11.1}$$

$$\Phi(\mathbf{x},t=0) = \dot{\Phi}(\mathbf{x},t=0) = 0,$$

Macierz B w izotermicznej teorii starzenia się i w teorii termo-starzenia jest określona następująco:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu\Box\Phi_{,ii} + (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,11}, & (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,12}, & (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,13} \\ (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,21}, & \mu\Box\Phi_{,ii} + (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,22}, & (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,23} \\ (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,31}, & (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,32}, & \mu\Box\Phi_{,ii} + (\lambda+\mu)\Box\Phi_{,33} \end{bmatrix}^{\wedge\wedge} \tag{11.2}$$

Równania termo-lepkosprężystości i lepkosprężystości dopuszczają przekształcenia generowane przez macierze

$$(11.3)\quad B^{*} = \begin{bmatrix} \mu * \Phi_{,ii} + (\lambda+\mu) * \Phi_{,11} - \varrho \ddot{\Phi}, & (\lambda+\mu) * \Phi_{,12}, & (\lambda+\mu) * \Phi_{,13}, \\ (\lambda+\mu) * \Phi_{,21}, & \mu * \Phi_{,ii} + (\lambda+\mu) * \Phi_{,22} - \varrho \ddot{\Phi}, & (\lambda+\mu) * \Phi_{,23}, \\ (\lambda+\mu) * \Phi_{,31}, & (\lambda+\mu) * \Phi_{,32}, & \mu * \Phi_{,ii} + (\lambda+\mu) * \Phi_{,33} - \varrho \ddot{\Phi} \end{bmatrix} * \hat{*}$$

W teorii naprężeń cieplnych i teorii sprężystości należy mnożenie splotowe w (11.3) zastąpić zwykłym mnożeniem, a funkcje materiałowe μ, λ, stałymi Lame'go.

Macierze B_{ij} i B^{*}_{ij} generują rodzinę rozwiązań podobnych w nieograniczonej przestrzeni sprężystej, lepkosprężystej i starzejącej się zgodnie z następującymi relacjami:

$$(11.4)\quad u'_i = (\Phi_o \delta_{ij} + \Phi_1 \circ B'_{ij} + \Phi_2 \circ B'_{ik} \circ B'_{kj}) \circ U_j \quad \circ \equiv * \hat{*}$$

dla wektorów sił masowych $X'_i = (\Phi_o \delta_{ij} + \Phi_1 \circ B'_{ij} + \Phi_2 \circ B'_{ik} \circ B'_{kj}) \circ X_j \circ \Phi$ w teorii izotermicznej oraz dla wektora $X'_i - \vartheta * \Theta'_{,i} = (\Phi_o \delta_{ij} + \Phi_1 \circ B'_{ij} + \Phi_2 \circ B'_{ik} \circ B'_{kj}) \circ (X_j - \vartheta * \Theta_{,i}) \circ \Phi$ w teoriach naprężeń cieplnych.

Zwróćmy tutaj uwagę również na fakt, że pola przemieszczeń wyznaczają trójwymiarową przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$.... (por. (3.6)), w której dowolny wektor może być przedstawiony następująco:

$$(11.5)\quad u_i = \alpha_o \, e_{io} + \alpha_1 \circ e_{i1} + \alpha_2 \circ e_{i2} \quad \circ \equiv * \hat{*}$$

gdzie e_{io}, e_{i1}, e_{i2} są liniowo niezależnymi wektorami bazy. Jeżeli przyjmiemy za wektory bazy układ rozwiązań:

$$(11.6)\quad e_{io} \equiv u_i, \qquad e_{i1} \equiv B_{ij} \circ u_j, \qquad e_{i2} \equiv B_{ik} \circ B_{kj} \circ u_j$$

to możemy stwierdzić, że algebra A0 oraz dowolne rozwiązanie zadania początkowo-brzegowego pozwalają wyznaczyć wszystkie pozostałe wektory - przemieszczenia z przestrzeni rozwiązań (por. punkt 3).

11.2. Rozwiązania podobne zadań brzegowych półprzestrzeni

Skonstruujemy obecnie rodzinę rozwiązań podobnych dla półprzestrzeni termo-lepkosprężystej. Wykonamy w tym celu na równaniach zagadnienia potrójną transformację Fouriera

$$\hat{u}_i(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(x_1x_2x_3t)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)}\,dx_1dx_2dx_3,$$

(11.7)

$$u_i(x_1x_2x_3t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_i(\alpha_1\alpha_2\alpha_3t)e^{+i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3,$$

oraz transformację Laplace'a na zmiennej czasowej.

W wyniku tych przekształceń z równań termo-lepkosprężystości

(11.8) $$\mu * u_{i,jj} + (\lambda+\mu) * u_{j,ji} + X_i - \vartheta * \Theta_{,i} = 0$$

otrzymujemy równanie macierzowe

(11.9) $$\mathbf{C}\,\overline{\overline{\mathbf{U}}} = \overline{\overline{\mathbf{Y}}} \qquad \left(\overline{\overline{\mathbf{Y}}} = \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_2 + \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_3 + \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_4 + \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_5\right),$$

w którym macierze $\mathbf{C}$, $\overline{\overline{\mathbf{Y}}}$ i $\overline{\overline{\mathbf{U}}}$ określone są następująco:

(11.10)
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mu\alpha_j\alpha_j-(\lambda+\mu)\alpha_1^2, & -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2, & -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_3 \\ -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2, & -\mu\alpha_j\alpha_j-(\lambda+\mu)\alpha_2^2, & -(\lambda+\mu)\alpha_2\alpha_3 \\ -(\lambda+\mu)\alpha_3\alpha_1, & -(\lambda+\mu)\alpha_3\alpha_2, & -\mu\alpha_j\alpha_j-(\lambda+\mu)\alpha_3^2 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{u}}_1 \\ \overline{\overline{u}}_2 \\ \overline{\overline{u}}_3 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_1 = \begin{bmatrix} \overline{\overline{X}}_1(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,p) \\ \overline{\overline{X}}_2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,p) \\ \overline{\overline{X}}_3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,p) \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_2 = -i\alpha_3 \begin{bmatrix} \bar{\mu}\,u_1(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \\ \bar{\mu}\,u_2(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \\ (\bar{\lambda}+2\bar{\mu})\,u_3(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_3 = \begin{bmatrix} p_1(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \\ p_2(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \\ p_3(\alpha_1\alpha_2\,0^+,p) \end{bmatrix},$$

(11.11)
$$\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_4 = \begin{bmatrix} i\alpha_1\,u_3(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \\ i\alpha_2\,u_3(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \\ \varepsilon_{kk}(\alpha_1\alpha_2 0^+,p) \end{bmatrix} \bar{\lambda}, \qquad \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_5 \begin{bmatrix} i\alpha_1\,\overline{\overline{\Theta}}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\;p) \\ i\alpha_2\,\overline{\overline{\Theta}}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\;p) \\ i\alpha_3\,\overline{\overline{\Theta}}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\;p)-\overline{\overline{\Theta}}(\alpha_1\alpha_2,0^+,p) \end{bmatrix} \bar{\vartheta}.$$

$\varepsilon_{kk}=u_{1,1}+u_{2,2}$

W zależnościach (11.11) wykorzystano związki fizyczne do określenia składowych wektora $\underline{\underline{Y}}$.

Pomnóżmy równanie (11.9) przez $(i\alpha_3)^{-2}$ oraz transformację pewnej dystrybucji $\hat{\Phi}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,p)$, $((i\alpha_3)^{-2}\,\underline{\underline{\Phi}}\;\mathbf{C}\;\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{\Phi}}\,(i\alpha_3)^{-2}\,\hat{\underline{\underline{Y}}})$

Otrzymujemy zależność

$$\mathbf{B}\circ\Phi\circ U = \Phi\circ \underline{\underline{Y}} \tag{11,12}$$

gdzie

$$\mathbf{B}\circ\Phi = \begin{bmatrix} \mu * \underline{\underline{\Phi}}_0 + (\lambda+\mu) * \underline{\underline{\Phi}}_{,11} & (\lambda+\mu) * \underline{\underline{\Phi}}_{,21} & (\lambda+\mu)*\underline{\underline{\Phi}}_{,1} \\ (\lambda+\mu)* \underline{\underline{\Phi}}_{,12} & \mu * \underline{\underline{\Phi}}_0 +(\lambda+\mu)* \underline{\underline{\Phi}}_{,22} & (\lambda+\mu)*\underline{\underline{\Phi}}_{,2} \\ (\lambda+\mu)* \underline{\underline{\Phi}}_{,1} & (\lambda+\mu)*\underline{\underline{\Phi}}_{,2} & \mu * \underline{\underline{\Phi}}_0 +(\lambda+\mu)*\Phi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{f}} = \int_0^{x_3}\int_0^{x_3'} f(x_1\ x_2\ x_3'')\,dx_3''\,dx_3', \qquad f = \int_0^{x_3} f(x_1\ x_2\ x_3')\,dx_3', \tag{11.13}$$

$$\Phi_0 = \Phi_{,11} + \Phi_{,22} + \Phi \qquad \varepsilon_{kk} = u_{1,1} + u_{2,2}$$

(11.14)

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{X}}_1(x,t) \\ \underline{\underline{X}}_2(x,t) \\ \underline{\underline{X}}_3(x,t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu * u_1(x_1x_20^+,t) \\ \mu * u_2(x_1x_20^+,t) \\ (\lambda+2\mu)*u_3(x_1x_20^+,t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1(x_1x_2,0^+,t) \\ p_2(x_1x_2,0^+,t) \\ p_3(x_1x_2,0^+,t) \end{bmatrix} x_3 - \lambda * \begin{bmatrix} u_{3,1}(x_1x_20^+,t) \\ u_{3,2}(x_1x_20^+,t) \\ \varepsilon_{kk}(x_1x_20^+,t) \end{bmatrix} x_3 - \sigma * \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}}_{,1}(x,t) \\ \underline{\underline{\Theta}}_{,2}(x,t) \\ \underline{\underline{\Theta}}_{,3}(x,) \end{bmatrix}$$

Macierz $D = B\circ\Phi$ jest odpowiednikiem macierzy B' (relacje 11.3) dla zadań brzegowych półprzestrzeni lepkosprężystej. Natomiast rodzinę rozwiązań podobnych generują przekształcenia:

$$u_i^* = (\Phi_0\,\delta_{ij} + \Phi_1 \circ D_{ij} + \Phi_2 \circ D_{ik} \circ D_{kj}) \circ u_j \qquad (\circ \equiv * \hat{*}) \tag{11.15}$$

$$\underline{\underline{Y}}_i^* = (\Phi_0\,\delta_{ij} + \Phi_1 \circ D_{ij} + \Phi_2 \circ D_{ik} \circ D_{kj}) \circ \Phi \circ \underline{\underline{Y}}_j \tag{11,16}$$

w których wektor Y_1 określają zależności:

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} X_1(x,t) \\ X_2(x\ t) \\ X_3(x\ t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu * u_1(x_1x_20^+t) \\ \mu * u_2(x_1x_20^+t) \\ (\lambda+2\mu)*u_3(x_1x_20^+t) \end{bmatrix} \delta'(x_3) - \begin{bmatrix} p_1(x_1x_20^+t) \\ p_2(x_1x_20^+t) \\ p_3(x_1x_20^+t) \end{bmatrix} \delta(x_3) - \lambda * \begin{bmatrix} u_{3,1}(x_1x_20^+t) \\ u_{3,2}(x_1x_20^+t) \\ \varepsilon_{kk}(x_1x_20^+t) \end{bmatrix} \delta(x_3) - \sigma * \begin{bmatrix} \Theta_{,1}(x,t) \\ \Theta_{,2}(x\ t) \\ \Theta_{,3}(x\ t) \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

Podobnie jak w zadaniu poprzednim trójka wektorów $(u_j, D_{ij} \circ u_j, D_{ik} \circ D_{kj} \circ u_j)$ wyznacza bazę w przestrzeni rozwiązań.

Zauważmy także, że znajomość rozwiązania odpowiadającego jednemu z wektorów $\underset{(I)}{Y}$ $I = 1,2,\ldots,5$ z (11.17) pozwala na skonstruowanie innych rozwiązań zadań brzegowych. Własność tę wykorzystamy w następnym ustępie pracy.

11.3. Analogie między rozwiązaniami zadań brzegowych półprzestrzeni

Między poszczególnymi wektorami składowymi uogólnionej siły masowej Y mogą zachodzić równości, np. $\underset{(1)}{Y} = \underset{12}{\Phi} \circ \underset{(2)}{Y}$, które oznaczają, że przemieszczenia $\underset{(1)}{U}$ odpowiadające wektorowi $\underset{(1)}{Y}$ są identyczne jak przemieszczenia $\underset{12}{\Phi} \circ \underset{(2)}{U}$ przypisane wektorowi $\underset{12}{\Phi} \circ \underset{(2)}{Y}$. Przytoczona własność pozwala na konstruowanie analogii podobnych do analogii zachodzącej między temperaturą a siłami masowymi.

Z odpowiednich przekształceń wynika, że zachodzą m.in. następujące zależności między siłą masową $\underset{(1)}{Y}$ a

- polem temperatur $\underset{(5)}{Y}$ $\quad \underset{(1)}{Y} = \delta \circ \underset{(5)}{Y}$,
- przemieszczeniami brzegu $\underset{(2)}{Y}$ $\quad \underset{(1)}{Y} = \underset{12}{\Phi} \circ \underset{(2)}{Y}$,
- obciążeniami brzegu $\underset{(3)}{Y}$ $\quad \underset{(1)}{Y} = \underset{13}{\Phi} \circ \underset{(3)}{Y}$,
- działaniem centrum ściskania $\underset{(4)}{Y}$ $\quad \underset{(1)}{Y} = \underset{14}{\Phi} \circ \underset{(4)}{Y}$, $\quad \delta \circ = (\delta(x)\ \delta(x))^{**}$

Podobne odpowiedniości występują między rozwiązaniami innych zadań brzegowych, przy czym dystrybucje Φ_{12}, Φ_{13} i Φ_{14} należy tak dobrać, aby zachodziły równości między analizowanymi wektorami.

W przypadku ogólnym omawiane analogie można przedstawić najprościej w zapisie macierzowym, przypisując każdemu wektorowi $\underset{(I)}{Y}$ z (11.11) i przyporządkowanemu rozwiązaniu $\underset{(I)}{U}$ jedną współrzędną pewnych izomorficznych przestrzeni wektorowych. Słuszne są następujące przekształcenia:

$$\begin{bmatrix} Y'_{(1)} \\ Y'_{(2)} \\ Y'_{(3)} \\ Y'_{(4)} \\ Y'_{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ \Phi_{21} & \delta & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \delta & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \delta & \Phi_{45} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \delta \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} Y_{(1)} \\ Y_{(2)} \\ Y_{(3)} \\ Y_{(4)} \\ Y_{(5)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U'_{(1)} \\ U'_{(2)} \\ U'_{(3)} \\ U'_{(4)} \\ U'_{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ \Phi_{21} & \delta & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \delta & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \delta & \Phi_{45} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \delta \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} U_{(1)} \\ U_{(2)} \\ U_{(3)} \\ U_{(4)} \\ U_{(5)} \end{bmatrix} \tag{11.18}$$

Dokładniej omawiać będziemy przekształcenia generowane tylko przez trzecią kolumnę macierzy (11.18), ponieważ pozwalają one na konstrukcję rozwiązań zadań brzegowych na podstawie rozwiązania zagadnienia Boussinesqa.

Przemieszczenie półprzestrzeni wywołane działaniem obciążenia normalnego występującego na zamkniętym obszarze Γ swobodnego brzegu są określone równościami:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \left[\mu^{-1}\frac{(x_1-y_1)x_3}{r^3} - (\lambda+\mu)^{-1}\frac{(x_1-y_1)}{(x_3+r)}\right] * p_3(y_1y_2,t)d\Gamma$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \left[\mu^{-1}\frac{(x_2-y_2)x_3}{r^3} - (\lambda+\mu)^{-1}\frac{(x_2-y_2)}{(x_3+r)}\right] * p_3(y_1y_2t)d\Gamma \qquad (11.19)$$

$$U_3 = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \left[\mu^{-1}\frac{x_3x_3}{r^3} - (\lambda+2\mu)*(\lambda+\mu)^{-1}\frac{1}{r}\right] * p_3(y_1y_2t)d\Gamma,$$

gdzie

$$\mu*\mu^{-1} = \delta, \qquad (\lambda+\mu)*(\lambda+\mu)^{-1} = \delta, \qquad r^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2, \qquad d\Gamma = dy_1dy_2$$

Dalej wykorzystamy również rozwiązanie szczególne wywołane działaniem siły $1\,\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)\,\delta(t)$, które oznaczymy symbolem $\overset{\vee}{U}_i$.

Znajomość rozwiązania (11.19) oraz funkcji z trzeciej kolumny macierzy (11.18) pozwala wyznaczyć rozwiązania kilku zadań brzegowych.

Dokładniej, rozwiązanie (11.19) odpowiada wektorowi $\underset{(3)}{\mathbf{Y}} = \left[0\ ,\ 0\ ,\ p_3(x_1\ x_2\ 0^+t)\right]^T$ i zostanie dalej użyte do wyliczenia przemieszczeń w pozostałych czterech zadaniach brzegowych.

11.4. Działanie siły masowej w półprzestrzeni

Jeżeli wektor siły masowej $\underset{(1)}{\mathbf{Y}}$ ma postać $\underset{(1)}{\mathbf{Y}} = \left[0,\ 0,\ X_3(x_1x_2t)\varphi(x_3)\right]^T$ a obciążeniu brzegu siłę normalną $p_3(x_1x_20^+t) = X_3(x_1x_2t)$ na Γ odpowiada rozwiązanie U_i, to stan przemieszczeń w ważkiej półprzestrzeni określa wektor (por. (11.19))

$$u_i(x,t) = \int_0^{x_3} U_i(x_1,x_2,x_3-y_3)\,\varphi(y_3)dy_3. \qquad (11.20)$$

Podobnie, jeżeli istnieje transformata Fouriera funkcji $X_3(x_1x_2t)\varphi(x_3)$ to przemieszczenia w ważkiej półprzestrzeni określone są relacją

$$u_i(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t\int_0^{x_3} \overset{\vee}{U}_i(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_1,t-\tau)X_3(y_1y_2,\tau)\varphi(y_3)dy_1dy_2dy_3d\tau.$$

11.5. Przemieszczenia normalne brzegu półprzestrzeni

W tym przypadku porównujemy wektory $Y_{(2)}$ i $Y_{(3)}$

$$\left[0,\quad 0,\quad -(\lambda+2\mu)*u_3(x_1x_2\,0^+t)\right]^T = \left[0\ ,\ 0\ ,\ -p_3(x_1x_2\,0^+t)\right]^T$$

Słuszne jest następujące stwierdzenie:

Jeżeli zachodzi równość $(\lambda+2\mu)*u_3(x_1x_2\,0^+t) = p_3(x_1x_2\,0^+,t)$ na całym obszarze Γ, a wektorowi p_3 odpowiada stan przemieszczeń U_i to przemieszczeniu brzegu $u_3(x_1x_2\,0^+t)$ przyporządkowane jest rozwiązanie

(11.21) $$u_i(x_1x_2x_3t) = U_i(x_1x_2x_3t),_3 + U_i(x_1x_2\,0^+t).$$

11.6. Działanie centrum ściskania

Rozpatrzymy z kolei stan naprężeń i przemieszczeń w półprzestrzeni wywołany działaniem centrum ściskania $\dot{c}_{kk} = u_{1,1} + u_{2,2}$ które określono na obszarze zamkniętym Γ. Zagadnienie to ujmuje kolejne stwierdzenie:

Jeżeli zachodzi równość wektorów $\left[0\ ,\ 0\ ,\lambda*\dot{c}_{kk}\right]^T = \left[0\ ,\ 0\ ,\ p_3\right]^T$ to stan przemieszczeń u_i wywołany występowaniem centrum ściskania na obszarze Γ brzegu półprzestrzeni wyznaczymy z równań:

(11.22) $$u_i = \int_{\Gamma} \breve{U}_i(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ x_3,t-\tau)$$

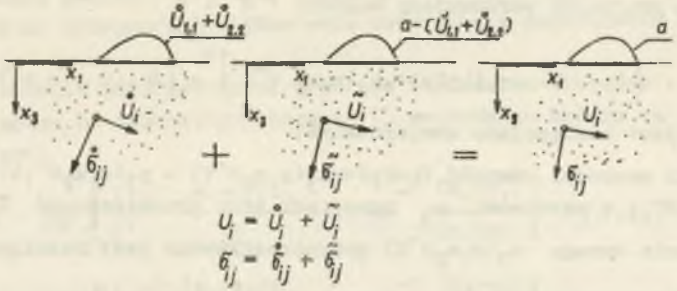
lub $$\int_0^{\tau} \lambda(\tau-\tau')\, \dot{c}_{kk}(y_1y_2\tau')\,d\tau'\,d\tau\,dy_1\,dy_2$$

lub

(11.22') $$u_i = \breve{U}_i$$

Uzyskany wynik posiada podstawowe znaczenie przy wyznaczeniu zaburzeń wywołanych przez ruchy górotworu (rozpełzanie i spełzanie terenu) pod stopami fundamentów konstrukcji na terenach szkód górniczych. Odpowiednie zadanie mechaniki sformułujemy następująco:

Górotwór traktujemy jako półprzestrzeń lepkosprężystą w której określone jest pole przemieszczeń $\overset{0}{u}_i$, wywołane eksploatacją górniczą. Na zamkniętym obszarze Γ półprzestrzeni (pod stopami fundamentów) występować będą ograniczenia kinematyczne $a = (u_{1,1} + u_{2,2})$ zakłócające swobodne odkształcanie się tej części półprzestrzeni. W wyniku łącznego działania pierwotnego pola przemieszczeń i ograniczeń kinematycznych w półprzestrzeni ustali się poszukiwany, wypadkowy stan przemieszczeń.



Rys. 3. Kontakt konstrukcji z deformującym się górotworem

Wypadkowe pole przemieszczeń określimy na podstawie relacji (11.22), przyjmując, że $\varepsilon_{kk} = (u_{1,1} + u_{2,2})$. Uzyskujemy w tym przypadku równości

$$u_i = \overset{\circ}{U}_i + \int_0^t \int_\Gamma \overset{\vee}{U}_i(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ x_3,\ t-\tau)\ \cdot$$

$$\cdot \int_0^\tau \lambda(\tau-\tau') \left[a(y_1 y_2 \tau') - \overset{\circ}{u}_{1,1}(y_1 y_2 \tau') - \overset{\circ}{u}_{2,2}(y_1 y_2 \tau') \right] d\tau' d\tau dy_1\ dy_2 \tag{11.23}$$

które mogą być wykorzystane do prognozowania stanu zabezpieczeń konstrukcji przed skutkami ruchów górotworu. Można stwierdzić na podstawie równań (11.22) i (11.23), że w przypadku szczególnego obciążenia $\lambda * p_3^*(x_1 x_2 0^+ t)$ brzegu półprzestrzeni stany przemieszczeń wywołane siłą $p_3^2(x_1 x_2 0^+, t)$ i centrum ściskania $a(x_1 x_2 0^+ t) = \overset{\circ}{u}_{1,1}(x_1 x_2 0^+ t) - \overset{\circ}{u}_{2,2}(x_1 x_2 0^+ t)$ są identyczne.

11.7. Działanie pola temperatur

Uzyskany w tym przypadku wynik jest mniej ciekawy poznawczo gdyż równość wektorów $\left[0\ ,\ 0\ ,\ p_3(x_1 x_2\ 0^+ t)\ \varphi(x_3)\right]^T = \left[0, 0, \vartheta * \Theta(x_1 x_2 t)\varphi(x_3), \right]^T$ ogranicza zagadnienie do analizy pól temperatur postaci $\Theta(x,t) = \Theta(x_3,t)$ ($\Theta_{,1} = \Theta_{,2} = 0$). Nadmieniamy, że pełną analizę wpływu pola temperatur (Θ) na stan przemieszczeń w półprzestrzeni można uzyskać wykorzystując dodatkowo rozwiązanie Cerrutiego.

W ustępach 11.4-11.7 przedstawiliśmy jedynie konstrukcję zadań brzegowych na podstawie rozwiązania Boussinesqua, nie wyczerpując nawet w tym przypadku wszystkich możliwości. Podobnie możemy postąpić z rozwiązaniem Cerrutiego oraz innymi rozwiązaniami zamkniętymi zadań brzegowych półprzestrzeni lub warstwy sprężystej. Ogólnie, sposób postępowania tutaj przed-

stawiony jest słuszny dla każdego zamkniętego rozwiązania liniowego problemu mechaniki ciała odkształcalnego i może być rozszerzony nawet na nieliniowe fizycznie zadania brzegowe.

11.8. Zastosowanie analogii między rozwiązaniami sprężystymi a starzejącymi się

Podaną w niniejszej pracy (punkt 4) analogię między rozwiązaniami sprężystymi a rozwiązaniami w teorii starzenia się wykorzystamy do wyznaczenia stanu przemieszczeń w nieograniczonym ośrodku starzejącym się. Załóżymy, że w początku układu współrzędnych umieszczono stałą w czasie siłę skupioną skierowaną wzdłuż osi x_1

$$p(x,t) = p_1 H(t) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$$

Rozwiązanie sprężyste w tym przypadku ma postać por. np. [16,47,55,61].

$$u_i(x,t) = \frac{p_1 H(t)}{24\pi\mu_0} \left[\frac{4}{r} \delta_{ij} - r^2 \left(\frac{x_3}{r^3}\right)_{,i} \right] \tag{11.24}$$

gdzie μ_0 jest stałą Lame'go, p_1 wartością siły skupionej, działającej w kierunku x_1, natomiast $r^2 = x_i x_i$ ($r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$) jest kwadratem odległości punktu, w którym wyznaczamy przemieszczenia od siły p_1 (początku układu współrzędnych).

Będziemy teraz rozpatrywali analogiczne zadanie w teorii starzenia, w której równania stanu mają postać

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_0^t 2\mu(t,\tau)\, \dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau)d\tau + \delta_{ij} \int_0^t \lambda(t,\tau)\dot{e}(x,\tau)d\tau \tag{11.25}$$

gdzie

$$2\mu(t,\tau) = \psi_1(t,\tau), \quad \lambda(t,\tau) = \frac{1}{3}\left[\psi_2(t,\tau) - \psi_1(t,\tau)\right].$$

Natomiast funkcje materiałowe $\psi_1(t,\tau)$ i $\psi_2(t,\tau)$ występujące w związkach między dewiatorami

$$s_{ij}(x,t) = \int_0^t \psi_1(t,\tau) \frac{\partial e_{ij}}{\partial \tau}\, d\tau, \tag{11.26}$$

i składowymi symetrycznymi tensorów naprężenia i odkształcenia

$$s(x,t) = \int_0^t \psi_2(t,\tau)\ \frac{\partial e}{\partial \tau}\, d\tau, \tag{11.27}$$

należy wyznaczyć doświadczalnie. W niniejszym przykładzie przyjmiemy, że funkcje te mają postać

$$\psi_1(t,\tau) = E_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{B\tau}{2\sqrt{t-\tau}}\right), \quad \psi_2(t,\tau) = E_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{B\tau}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \tag{11.28}$$

Występujące w związkach (11.28) stałe E_1, E_2 i B należy uzyskać z doświadczeń. Podstawiając funkcje (11.28) do (11.5) otrzymujemy (11.29).

$$(11.29)\quad \sigma_{ij} = \int_0^t E_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{B\tau}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau}\, d\tau + \delta_{ij} \int_0^t \frac{1}{3} \operatorname{erfc}\left(\frac{B\tau}{2\sqrt{t-\tau}}\right)(E_2-E_1)\frac{\partial e}{\partial \tau}\, d\tau$$

Dokonując na równaniu (11.29) transformacji Laplace'a, z wykorzystaniem tw. Efrosa, uzyskujemy po szeregu przekształceniach zależności

$$(11.30)\quad \bar{\sigma}_{ij}(x,p) = (p+B\sqrt{p})\frac{E_1}{p}\,\bar{\varepsilon}_{ij}(x,p+B\sqrt{p}) + \delta_{ij}\left[(p+B\sqrt{p})\left(\frac{E_2}{3p} - \frac{E_1}{3p}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\, \bar{e}(x,p+B\sqrt{p}).$$

Zauważmy, że równość (11.30) możemy zapisać w postaci

$$(11.31)\quad \bar{\sigma}_{ij}(x,p) = 2\bar{\mu}_0(p)\bar{\varepsilon}_{ij}(x,q(p)) + \delta_{ij}\bar{\lambda}_0(p)\bar{e}(x,q(p))$$

gdzie

$$(11.32)\quad 2\bar{\mu}_0(p) = (p+B\sqrt{p})\frac{E_1}{p}, \qquad \bar{\lambda}(p) = (p+B\sqrt{p})\frac{E_2-E_1}{3p}, \qquad q(p) = p+B\sqrt{p}.$$

Funkcje (11.32) będą pomocne przy rozwiązywaniu odpowiednich zadań w teorii starzenia.
Wykonujemy teraz transformację Laplace'a na rozwiązaniu sprężystym

$$(11.33)\quad \bar{u}_i(x,p) = \frac{p_1}{24\pi p\mu_0}\left[\frac{4}{r}\delta_{ij} - r^2\left(\frac{x_3}{r^3}\right)_{,i}\right],$$

i realizujemy podstawienie zgodnie z analogią $\mathcal{H}_2$.
Otrzymujemy równość

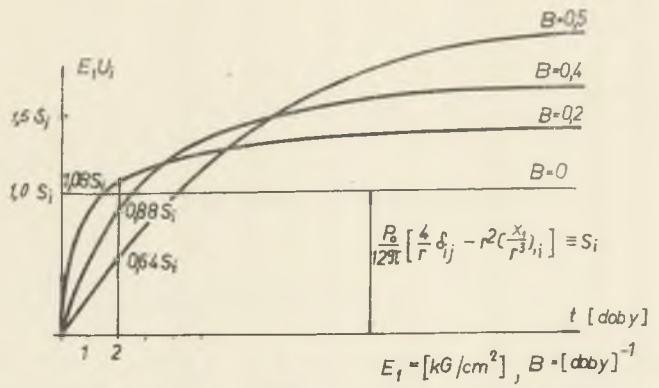
$$(11.34)\quad \bar{u}_i(x,p+B\sqrt{p}) = \frac{p_1}{24\pi p\left[\frac{E_1}{2p}(p+B\sqrt{p})\right]}\left[\frac{4}{r}\delta_{ij} - r^2\left(\frac{x_3}{r^3}\right)_{,i}\right]$$

Mnożąc obustronnie (11.33) przez $\frac{1}{p}$ i retransformując uzyskujemy równanie całkowe

$$(11.35)\quad \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{B\tau}{2\sqrt{t-\tau}}\right) u_i(x,\tau)d\tau = \frac{p_1}{12\pi E_1}\int_0^t e^{-\tau B^2}\operatorname{erfc}(B\sqrt{\tau})d\tau$$

$$\left[\frac{4}{r}\delta_{ij} - r^2\left(\frac{x_i}{r^3}\right)_{,i}\right],$$

Wykresy z numerycznego rozwiązania tego równania (parametrycznie zależnego od stałych E_1 i B) przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Przemieszczenia w nieograniczonym ośrodku podlegającym procesom starzenia się

Na rysunku tym przedstawiono przemieszczenia ośrodka jako funkcje czasu. W przypadku sprężystym (B = 0) uzyskujemy stałe w czasie przemieszczenia, natomiast dla (B > 0) przemieszczenie będzie zmienne; rosnące i dążące do pewnej ustalonej wartości.

Część II

PRZEPŁYWY MASY I CIEPŁA W CIELE LEPKOSPRĘŻYSTYM

ROZDZIAŁ IV

TERMODYFUZJA LEPKOSPRĘŻYSTA

12. Równania termodyfuzji lepkosprężystej

Przepływy masy w ciele stałym i wynikające z nich stany naprężeń stanowią zjawiska mniej znane w mechanice ciała odkształcalnego, a aktualnie intensywnie rozwijane.

W zakresie sprężystym znane są opracowania tej tematyki m.in. z prac S. Podstrigacza i W. Pawliny, a pełny i usystematyzowany wykład problematyki zawierają także prace W. Nowackiego. Natomiast w zakresie lepkosprężystym były uczynione pierwsze próby postawienia zagadnień ogólnych (prace S. Podstrigacza i Pawliny). W niniejszym rozdziale przedstawimy propozycję ujęcia tej problematyki, przyjmując za punkt wyjścia równania bilansu masy, energii i entropii z liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych (por. [1,3,5,6,7,10,11,21,15,18]. W wyniku otrzymujemy równania tworzące określające tensor stanu naprężenia, entropię, koncentrację oraz strumień masy w dwuskładnikowej mieszaninie ciał stałych. Sposób postępowania jest tutaj podobny do reprezentowanego przez R.M. Christensena i P. Naghdie'go w pracy [4]. Pragniemy na tej drodze otrzymać sprzężone równanie termodyfuzji lepkosprężystej oraz przeanalizować ich własności z punktu widzenia ogólnej liniowej mechaniki ciał odkształcalnych.

Należy także podkreślić, że analizowana w tym rozdziale problematyka stanowi określone przybliżenie w ogólnej teorii mieszanin zapoczątkowanej przez C. Truesdella [17] a rozwiniętej w pracach A.E.Greena, P.M. Nagdhdiego, T.R. Steela i in. (por. [7,8,16]).

Punktem wyjściowym rozważań będą równania wynikające z bilansu przepływu masy i ciepła oraz produkcji entropii. W układzie współrzędnych prostokątnych mają one postać następującą:

$$\frac{d}{dt}\int_V C\,dV = \int_V r_2\,dV - \int_S j_i\,n_i\,dS, \tag{12.1}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho(U + \tfrac{1}{2}\dot{u}_i\dot{u}_i)dV = \int_V (\varrho r_1 + M.\dot{C} + X_i\dot{u}_i)dV + \int_S (P_i\dot{u}_i - q_i n_i)dS, \tag{12.2}$$

(12.3) $$\frac{d}{dt}\int_V \varrho S\,dV \geq \int_V \frac{1}{T}(\varrho r_1 - M\dot{c})dV - \int_S \frac{1}{T}(q_i + Mj_i)n_i\,dA$$

Odpowiednie związki lokalne przedstawiają zależności

(12.1') $$\dot{c} + j_{i,i} = r_2$$

(12.2') $$\varrho\dot{U} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \varrho r_1 + M\dot{C} - q_{i,i}$$

(12.3') $$\varrho\dot{S} - \varrho\frac{r_1}{T} + \frac{q_{i,i}}{T} - \frac{q_i}{(T)^2}T_{,i} - j_i\left(\frac{M}{T}\right)_{,i} \geq 0$$

W równaniach (12.1) - (12.3') U jest energią wewnętrzną jednostki masy mieszaniny, C - koncentracją masy domieszkowej (ilość masy dyfundującego składnika mieszaniny w jednostce objętości), ϱS - entropią, M - potencjałem chemicznym mieszaniny, T - temperaturą, ϱ - gęstością, q_i, ϱr_1 i j_i, r_2 są odpowiednio strumieniami i źródłami ciepła i masy.

W bilansie masy uwzględniono jedynie wpływ źródła masy i strumienia na koncentrację, pomijając przepływ masy wynikający z różnicy stanów przemieszczeń w obu składnikach mieszaniny. Uwzględnienie tego czynnika wpłynęłoby na dalsze rozbudowanie teorii.

Eliminując z równań (12,2') i (12.3') źródło ciepła uzyskujemy następującą nierówność

(12.4) $$-\varrho\dot{U} + \varrho S\dot{T} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + M\dot{C} - q_i\frac{T_{,i}}{T} - j_i\left(\frac{M}{T}T_{,i} - M_{,i}\right) \geq 0$$

lub po podstawieniu energii swobodnej $\varrho A = \varrho U - \varrho TS$

(12.5) $$-\varrho\dot{A} - \varrho S\dot{\Theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + M\dot{C} - T_0\left[\frac{q_i}{T_0^2}\Theta_{,i} + j_i\left(\frac{M}{T_0}\right)_{,i}\right] \geq 0$$

Nierówność (12.5) musi być spełniona dla każdego procesu deformacji, zmiany temperatury $\Theta = T - T_0$ i koncentracji $(C = C_1 - C_0)$.

Energię swobodną będziemy traktowali jako zależny od historii tensora deformacji, temperatury i koncentracji funkcjonał, który zgodnie z twierdzeniem Stone'a - Weierstrassa można równomiernie aproksymować wielomianem ze zbioru rzeczywistych i ciągłych funkcjonałów.

Następnie wykorzystując twierdzenie Riesza uzyskujemy funkcjonał ϱA - energię swobodną w liniowym ciele lepkosprężystym w którym występuje przepływ ciepła i masy

$$\varrho A = \varrho A_0 + \int_{-\infty}^{t} D_{ij}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} p(t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} \hat{\vartheta}(t-\tau)\dot{C}(\tau)d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} B_{ij\,kl}(t-\tau, t-\tau')\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau')d\tau d\tau' - \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \varphi_{ij}(t-\tau, t-\tau')\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\dot{\Theta}(\tau')d\tau d\tau'$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} m(t-\tau,t-\tau')\dot{\Theta}(\tau)\dot{\Theta}(\tau')d\tau'd\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} n(t-\tau,t-\tau')\dot{C}(\tau')\dot{C}(\tau)\,d\tau'd\tau -$$

(12.6)

$$-\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} l(t-\tau,t-\tau')\dot{C}(\tau)\dot{\Theta}(\tau')d\tau'd\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \Phi_{ij}(t-\tau,t-\tau')\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)\dot{C}(\tau')d\tau'd\tau + O(\varepsilon^3)$$

Założymy przy tym, że dla $t \to -\infty$, $\varepsilon_{ij} \to 0$, $T \to T_o$, $C_1 \to C_o$ (T_o i C_o temperatura i koncentracja stanu naturalnego), a ε_{ij}, Θ/T_o i C/C_o są wielkościami rzędu $O(\varepsilon)$.

Funkcje relaksacji $\beta, \hat{\gamma}, m, n, l, D_{ij}, \Phi_{ij}, \varphi_{ij}$ i E_{ijkl} - jądra związków całkowych są ciągłe dla $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$ i równe zeru dla $\tau < 0$ i $\tau_2 < 0$.

Po wykonaniu różniczkowania energii swobodnej (12.6), podstawieniu do (12.5) i uporządkowaniu, otrzymamy następujące równania tworzące:

$$\rho S = \beta(0) + \int_{-\infty}^{t} \varphi_{ij}(t-\tau,0)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} m(t-\tau,0)\dot{\Theta}(\tau)d\tau +$$

(12,7)

$$+ \int_{-\infty}^{t} l(t-\tau,0)\dot{C}(\tau)d\tau ,$$

$$\sigma_{ij} = D_{ij}(0) + \int_{-\infty}^{t} E_{ijkl}(t-\tau,0)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} \varphi_{ij}(0,t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau +$$

(12.8)

$$+ \int_{-\infty}^{t} \Phi_{ij}(0,t-\tau)\dot{C}(\tau)d\tau ,$$

$$M = \hat{\gamma}(0) + \int_{-\infty}^{t} n(0,t-\tau)\dot{C}(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} l(0,t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} \Phi_{ij}(t-\tau,0)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau \quad (12.9)$$

oraz nierówność z pozostałych składników wyrażenia (12.5)

$$-\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \beta(t-\tau)\dot{\Theta}(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\gamma}(t-\tau)\dot{C}(\tau)d\tau +$$

$$+\Lambda - T_o\left[\frac{q_i}{(T_o)^2}\Theta_{,i} + j_i\left(\frac{M}{M_o}\right)_{,i}\right] \geq 0, \quad (12.10)$$

gdzie

$$\Lambda = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t} E_{ijkl}(t-\tau,t-\tau')\,\dot{c}_{ij}(\tau)\dot{c}_{kl}(\tau')\,d\tau'\,d\tau +$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{ij}(t-\tau,t-\tau')\dot{c}_{ij}(\tau)\dot{\Theta}(\tau')d\tau'd\tau + \tag{12.11}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t} m(t-\tau,t-\tau')\dot{\Theta}(\tau)\dot{\Theta}(\tau')d\tau'\,d\tau - \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{ij}(t-\tau,t-\tau')\dot{c}_{ij}(\tau)\dot{C}(\tau')d\tau'\,d\tau$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t} n(t-\tau,t-\tau')\dot{C}(\tau)\dot{C}(\tau')d\tau'\,d\tau + \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t} l(t-\tau,t-\tau')\dot{C}(\tau)\dot{\Theta}(\tau')d\tau'\,d\tau .$$

Ponadto funkcje E_{ijkl}, m i n powinne spełniać warunki symetrii

$$E_{ijkl}(t-\tau,t-\tau') = E_{kl\,ij}(t-\tau',t-\tau), \quad m(t-\tau,t-\tau') = m(t-\tau',t-\tau), \tag{12.12}$$

$$n(t-\tau,t-\tau') = n(t-\tau',t-\tau).$$

Jak już wspomniano, nierówność (12.5), a więc i (12.10) musi być prawdziwa dla każdego procesu deformacji, zmiany temperatury i koncentracji, stąd

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(t-\tau) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\beta(t-\tau) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\vartheta}(t-\tau) = 0. \tag{12.13}$$

Dla jednorodnego pola temperatur ($\Theta_{,i} = 0$) i potencjału chemicznego $(\frac{M}{T})_{,i} = 0$, musi zachodzić

$$\Lambda \geqslant 0 \tag{12.14}$$

Jest to podstawowe ograniczenie nałożone na energię dysypacji w procesie. Wobec ograniczenia (12.14) nierówność (12.10) będzie spełniona jeżeli

$$-q_i\,(\Theta_{,i}/T_o) \geqslant 0. \quad \text{lub} \quad -j_i\,(\frac{M}{T_o})_{,i}\cdot T_o \geqslant 0 \tag{12.15}$$

Przyjmując z kolei, że strumień ciepła q_i jest liniowym funkcjonałem historii gradientu temperatury

$$q_i = -\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-\tau)\,\dot{\Theta}_{,j}(\tau)d\tau . \tag{12.16}$$

otrzymujemy po dalszych przekształceniach (z uwzględnieniem (12.15)) ostateczną postać równania tworzącego (12.16)

$$q_i = -K_{ij}\,\Theta_{,j}, \qquad K_{ij} = K_{ji}, \tag{12.17}$$

gdzie symetryczny tensor K_{ij} będziemy uważali za niezależny od zmian temperatury i koncentracji.

Podobnie przedstawimy strumień masy j_i jako liniowy funkcjonał zależny od historii gradientu potencjału chemicznego $M_{,i}$

$$j_i = -\int_{-\infty}^{t} K'_{ij}(t-\tau)\dot{M}_{,j}(\tau)d\tau. \tag{12.18}$$ *)

Powrócimy teraz do zasady zachowania energii i masy z których uzyskamy sprzężone z polem mechanicznym równania przewodnictwa cieplnego i transportu masy.

Jeżeli w bilansie (12.2') uwzględnimy równości (12.6) (12,7), (12.8), (12.9), (12,13), (12.17) oraz odrzucimy człony nieliniowe (Λ) to uzyskamy następujące równanie przewodnictwa cieplnego

$$\varrho r_1 - T_o \frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_{-\infty}^{t} \varphi_{ij}(t-\tau,0)\dot{\varepsilon}_{ij}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} m(t-\tau,0)\,\dot{\Theta}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} l(t-\tau,0)\dot{C}(\tau)d\tau\Big] + (K_{ij}\,\Theta_{,j})_{,i} = 0. \tag{12.19}$$

Natomiast z równania przepływu masy otrzymamy po uwzględnieniu (12.18) równanie sprzężonej z polem mechanicznym termodyfuzji

$$\begin{aligned}\dot{C} &- K'_{ij}\int_{-\infty}^{t} n(0,t-\tau)\dot{C}_{,ji}(\tau)d\tau - \\ &- K'_{ij}\int_{-\infty}^{t} l(t-\tau,0)\,\dot{\Theta}_{,ij}(\tau)d\tau + \\ &+ K'_{ij}\int_{-\infty}^{t} \Phi_{kl}(t-\tau,0)\dot{\varepsilon}_{kl,ij}(\tau)d\tau = r_2\end{aligned} \tag{12.20}$$

W ośrodku izotropowym równania (12.19) i (12.20) przyjmą postać

$$\varrho r_1 - T_o \frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_{-\infty}^{t} \varphi(t-\tau,0)\dot{\varepsilon}_{kk}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} m(t-\tau,0)\,\dot{\Theta}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} l(t-\tau,0)\,\dot{C}(\tau)\,d\tau\Big] + k\,\Theta_{,ij} = 0,$$

*) $\int_{-\infty}^{t} K'_{ij}(t-\tau)\dot{M}_{,j}(\tau)d\tau\, M_{,i} \geqslant 0 \Rightarrow j_i = -K'_{ij}\,M_{,j}$

$$\dot{c} - k^{o}\int_{-\infty}^{t} n(0,t-\tau)\dot{c}_{,ii}(\tau)d\tau + k^{o}\int_{-\infty}^{t} l(t-\tau,0)\dot{\Theta}(\tau)_{,ii}\,d\tau +$$

(12.20')

$$+ k^{o}\int_{-\infty}^{t}\Phi(t-\tau,0)\dot{u}_{k,kjj}(\tau)d\tau = r_2$$

W równaniach (12.19') i (12.20') założono, że

$$k_{ij} = k^{o}\,\delta_{ij},\quad K_{ij} = k\,\delta_{ij},\quad \varphi_{ij}(t,\tau) = \varphi(t,\tau)\delta_{ij},\quad \Phi_{ij}(t,\tau) = \Phi(t,\tau)\delta_{ij}$$

oraz

$$j_i = - k^{o} M_{,i}.$$

Do równań przepływu ciepła i masy w izotropowym ciele lepkosprężystym dołączymy:

- równania ruchu

(12.21)
$$\sigma_{ij,j} + X_i = \varrho\ddot{u}_i,\qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

- równania geometryczne

(12.22)
$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i},$$

- równania fizyczne

(12.23)
$$\sigma_{ij} = 2\mu * d\varepsilon_{ij} + \lambda * \left[d\varepsilon_{ll} - 3\alpha_T\, d\Theta - 3\alpha_c\, dC\right]\delta_{ij},$$

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{t} f_1(t-\tau)df_2(\tau).$$

Równania tworzące (12.23) otrzymamy z równania (12.8) po dokonaniu następujących podstawień

$$E_{ijkl}(t-\tau,0) = \mu(t-\tau)\left[\delta_{jl}\,\delta_{ik} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right] + \lambda(t-\tau)\delta_{ij}\delta_{kl}$$

(12,24)
$$\varphi_{ij}(0,t-\tau) = \varphi(0,t-\tau)\delta_{ij} = - 3\alpha_T\,\lambda(t-\tau)\delta_{ij} = - \vartheta_T(t-\tau)\delta_{ij},$$

$$\Phi_{ij}(0,t-\tau) = \Phi(0,t-\tau)\delta_{ij} = + 3\alpha_c\,\lambda(t-\tau)\delta_{ij} = + \vartheta_c(t-\tau)\delta_{ij},$$

gdzie: α_T jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej przy stałej koncentracji i naprężeniu a α_c jest współczynnikiem rozszerzalności dyfuzyjnej wyznaczonym przy ustalonej temperaturze i stałym naprężeniu.

Równania ruchu, związki fizyczne, geometryczne, równania przepływu masy i ciepła pozwalają ostatecznie podać równania sprzężonej termodyfuzji.

$$\mu * du_{i,jj} + (\lambda+\mu) * du_{j,ji} + X_i - \vartheta_c * dc_{,i} - \vartheta_T * d\Theta_{,i} = \varrho \ddot{u}_i \tag{12.25}$$

$$k\,\Theta_{,jj} - T_o \frac{\partial}{\partial t}\left[m * d\Theta + l * dc - \vartheta_T * de\right] = -\varrho r_1 \tag{12.26}$$

$$\dot{C} - k_o \left[-l * d\Theta_{,ii} - n * dc_{,ii} + \vartheta_c * de_{,jj}\right] = r_2 \tag{12.27}$$

$$(e = u_{k,k})$$

Do uzyskanego układu równań liniowej termodyfuzji lepkosprężystej dołączymy warunki brzegowe i początkowe.

Warunki początkowe określone są zależnościami:

$$\begin{aligned} u_i(x,0^+) &= \underset{o}{u_i}(x), & \dot{u}_i(x,0^+) &= \underset{o}{\dot{u}_i}(x), \\ \Theta(x,0^+) &= \underset{o}{\Theta}(x), & c(x,0^+) &= \underset{o}{c}(x). \end{aligned} \tag{12.28}$$

Natomiast warunki brzegowe podamy jedynie dla równań (12.26) i (12.27)

$$\begin{aligned} \Theta(x\ t)\Big|_{x\in S_3} &= \underset{3}{\Theta}(x\ t), \\ \Theta_{,i}(x\ t)n_i\Big|_{x\in S_4} &= -\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}}\left[\Theta(x\ t) - \underset{z\,4}{\Theta}(x\ t)\right], \end{aligned} \tag{12.29}$$

$$\begin{aligned} M(x\ t)\Big|_{x\in S_5} &= D(\underset{5}{x}\ t), \\ j_i(x\ t)n_i\Big|_{x\in S_6} &= E(\underset{6}{x}\ t). \end{aligned} \tag{12.30}$$

Warunki brzegowe (12.29) i (12.30) nie wyczerpują wszystkich możliwych sformułowań zadań brzegowych. W (12.29) α jest współczynnikiem przejmowania ciepła, $\tilde{\lambda}$ - współczynnikiem przewodzenia ciepła w otoczeniu kontaktu, a D, E i Θ_z znanym potencjałem chemicznym otoczenia, strumieniem masy i temperaturą.

Układ warunków brzegowych (12.29), (12.30) uzupełniony warunkami brzegowymi dla równania (12.25) i początkowymi określają zadania początkowo-brzegowe sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej.

Spróbujemy teraz udzielić odpowiedzi na pytanie:
kiedy równania (12.25) i (12.26, 12.27) można rozwiązywać niezależnie od siebie.

Okazuje się, że spełnienie następujących warunków:

$$(12.31)\quad -T_o \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_T * de = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{u}_i = 0 \quad \text{lub} \quad u_{k,k} = (d\,\vartheta_T)^{-1} f(x),$$

$$(12.32)\quad -k_o\, \vartheta_c * de_{,jj} = 0 \quad \Longrightarrow \quad e_{,jj} = 0,$$

nałożonych na pole przemieszczeń doprowadza do rozsprzężenia równań. W równaniu (12.31) $f(x)$ jest dowolną funkcją a $(d\,\vartheta_T)^{-1}$ oznacza, że $d\,\vartheta_T * (d\,\vartheta_T)^{-1} = \text{const}$. Zwróćmy tu uwagę na różnicę w warunkach rozsprzężenia pola przemieszczeń z przepływem ciepła i przepływem masy.

Interesować nas będzie również odpowiedniość jaka występuje między rozwiązaniami zadań brzegowych w termodyfuzji sprężystej i lepkosprężystej. Problem ten prowadzi do analogii, którą należy uważać za rozszerzenie rezultatu $\mathcal{K}_3$ na sprzężone zadania termodyfuzji. Przed jej sformułowaniem przytoczymy równania termodyfuzji sprężystej z pracy W. Nowackiego [14], przy identycznych oznaczeniach.

Równania sprężystej termodyfuzji (wg równań (1.5), (1.6) i (1.7) z pracy [14])

$$(12.33)\quad \mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ji} + X_i - \vartheta_T \Theta_{,i} - \vartheta_c c_{,i} = \varrho \ddot{u}_i$$

$$(12.34)\quad \Theta_{,kk} - T_o \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{T_o \mathcal{K}_1} \Theta - \frac{a}{k} C + \frac{\vartheta_T}{k} u_{k,k} \right] = \frac{\varrho}{k} r_1$$

$$(12.35)\quad \dot{C} - D\, C_{,ii} - \beta D\, \Theta_{,ii} - \varepsilon D\, u_{i,ijj} = - D\varepsilon$$

Będziemy rozpatrywali analogiczne zadania brzegowe określone warunkami (12.29) i (12.30) oraz zerowymi warunkami początkowymi w ośrodku sprężystym i lepkosprężystym.

Wykonanie transformacji Laplace'a na rozpatrywanych układach równań i warunkach brzegowych oraz porównanie otrzymanych zależności prowadzi do następującej analogii:

Jeżeli w transformatach Laplace'a równań (12.34 - 12.36) oraz ich rozwiązaniach (pola: $\bar{u}_i$, $\bar{\Theta}$, $\bar{C}$)

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i(x\ p;\ \Omega), \qquad \bar{\Theta} = \bar{\Theta}(x\ p;\ \Omega),$$

$$(12.36)\quad \bar{C} = \bar{C}(x\ p;\ \Omega),$$

$$\Omega = \left\{ \lambda, \mu, \vartheta_T, \vartheta_c, \frac{1}{T_o \mathcal{K}_1}, a, D, \beta D, \varepsilon D \right\},$$

dokonamy podstawień:

$$\mu \longrightarrow p\bar{\mu}(p), \qquad \lambda \longrightarrow p\bar{\lambda}(p), \qquad \vartheta_T, \vartheta_c \longrightarrow p\bar{\vartheta}_T(p),\ p\bar{\vartheta}_c(p)$$

$$\frac{1}{T_o \vartheta_1} \longrightarrow \frac{p}{k}\bar{m}(p), \qquad -d \longrightarrow p\bar{l}(p), \qquad -D \longrightarrow k_o \bar{l}(p)$$

$$-\Theta D \longrightarrow k_o p\bar{n}(p), \qquad \Theta D \longrightarrow k_o p\bar{\vartheta}_c(p),$$

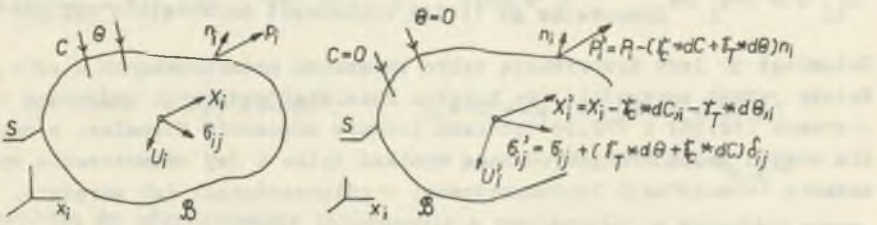
$$\bar{u}_i \longrightarrow \bar{u}_i(x\ p;\omega), \qquad \bar{\Theta} \longrightarrow \bar{\Theta}(x\ p;\omega), \qquad \bar{c} \longrightarrow \bar{c}\ (x\ p;\omega),$$

$$\omega = \left\{ p\bar{\lambda}(p),\ p\bar{\mu}(p),\ p\bar{\vartheta}_T(p), p\bar{\vartheta}_c(p),\ \frac{p}{k}\bar{m}(p), -p\bar{l}(p),\ -k_o p\bar{l}(p), -k_o p\bar{n}(p), L_o p\bar{\vartheta}_c(p) \right\}$$

oraz powrócimy do oryginałów, to otrzymane pola u_i, Θ i c są rozwiązaniami zadań sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej.

Z uzyskanego rezultatu wynikają w szczególności analogie dla zadań niesprzężonych, których nie będziemy tutaj formułowali.

Dla zadań niesprzężonych słuszne jest rozszerzenie analogii Duhamela-Neumanna, którą przedstawiają dwa zadania lepkosprężyste:



Rys.5. Analogia między rozwiązaniami lepkosprężystymi a zadaniami brzegowymi w niesprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej

o identycznych stanach przemieszczenia $u_i'(x\ t) = u_i\ (x\ t)$ a różnych obciążeniach i naprężeniach. Analogia ta wynika z analizy równania niesprzężonej termodyfuzji (równanie (12.25)) oraz odpowiednich warunków brzegowych.

Podobnie jak w poprzednich rozdziałach pracy można określić również grupy oraz algebry rozwiązań podobnych dla określonych zadań brzegowych sprzężnej termodyfuzji lepkosprężystej.

Problematyki tej nie będziemy jednak rozwijali, ograniczając się jedynie do podania podstawowej macierzy generującej rozwiązania podobne w nieograniczonej przestrzeni.

Macierz operatorów równań (12.25 - 12.27)

$$(12.38)\quad \begin{bmatrix} \delta_{ij}(d\mu * \partial_{jj} - \varrho \partial_{tt}) + (d\lambda + d\mu) * \partial_{ij} ; & d\vartheta_T * \partial_i ; & d\vartheta_c * \partial_i \\ T_o \partial_t \circ d\vartheta_T * ; & k\partial_{jj} - T_o \partial_t \circ dm * ; & -T_o \partial_t \circ dl * \\ -k_o\, d\vartheta_c * \partial_{ill} ; & k_o\, dl * \partial_{ii} ; & k_o dn * \partial_{jj} - \partial t \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{A} \circ \boldsymbol{X} = \mathbf{C}$, $x^T = \left[u_i, \Theta, c\right]$, $C^T = \left[-X_i, -\varrho r_1, r_2\right]$, oraz macierz $\mathbf{B}$ postaci:

$$(12.39)\quad \begin{bmatrix} \delta_{ij}(\Phi_{,jj} d\mu * - \varrho \partial_{tt}) + \Phi_{ij}(d\lambda + d\mu) * ; & \Phi_{,i}\, d\vartheta_T * ; & \Phi_{,i}\, d\vartheta_c * \\ \Phi\, T_o \partial_t \circ d\vartheta_T * ; & k\Phi_{,jj} - T_o \Phi \partial_t \circ dm * ; & -T_o \Phi \partial_t \circ dl * \\ -k_o \Phi_{,ill}\, d\vartheta_c * ; & k_o \Phi_{,ii}\, dl * ; & k_o \Phi_{,ii}\, dn * - \partial_t \end{bmatrix},$$

którą wyznaczono przy spełnieniu warunków $u_i(0)=0$, $\Theta(0) = C(0) = 0$, stanowią podstawę do określenia algebry i rodziny rozwiązań podobnych.

W macierzach (12.38) i (12.39) wprowadzono oznaczenia:

$$\partial_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j, \qquad \partial_t = \partial/\partial t, \qquad \partial_{tt} = \partial^2/\partial t^2, \qquad \partial_t \circ dl * = \frac{\partial}{\partial t}\left[dl * \dots\right]$$

Natomiast Φ jest dystrybucją tylko zmiennych przestrzennych $\Phi = \Phi(x_1 x_2 x_3)$. Należy jednak podkreślić, że algebra rozwiązań podobnych zbudowana na macierzach (12.38) i (12.39) posiada jedynie znaczenie formalne, a rozwiązania nowych zadań brzegowych mogą wynikać tylko z jej rozszerzenia np. na zadania termodyfuzji lepkosprężystej w półprzestrzeni lub warstwie.

13. Twierdzenia o wzajemności

Podamy obecnie twierdzenia o wzajemności dla sprzężonych i niesprzężonych zadań termodyfuzji lekosprężystej. Otrzymane twierdzenia można traktować również jako przejaw pewnej symetrii równań sprzężonej termodyfuzji w tym sensie, że są one niezmiennikami określonych przekształceń zadań początkowo-brzegowych. Pierwsze z tych zadań oznaczymy symbolem $\{\dots\}'$, a drugie $\{\dots\}''$.

Punktem wyjściowym rozważań będzie oczywista tożsamość:

$$(13.1)\qquad \sigma'_{ij} * d\varepsilon''_{ij} = \sigma''_{ij} * d\varepsilon'_{ij}$$

zachodząca dla każdej pary pól $\left\{\sigma'_{ij}, \varepsilon'_{ij}\right\}$ i $\left\{\sigma''_{ij}, \varepsilon''_{ij}\right\}$ w tym samym ośrodku odkształcalnym $\mathcal{B}$.

Po uwzględnieniu w (13.1) równań tworzących (12.23) scałkowaniu po całej objętości V ciała S otrzymujemy zależność

$$\int_V \sigma'_{ij} * d\varepsilon''_{ij}\, dV - \int_V (\vartheta_T * d\Theta' + \vartheta_c * dC') * du''_{k,k}\, dV =$$

(13.2)

$$= \int_V \sigma''_{ij} * d\varepsilon'_{ij}\, dV - \int_V (\vartheta_T * d\Theta'' + \vartheta_c * dC'') * du'_{k,k}\, dV$$

a po dalszych przekształceniach równość

$$\int_V X'_i * du''_i \, dV - \int_S p'_i * du''_i\, dS - \int_S (\vartheta_T * d\Theta' + \vartheta_c * dC') * du''_k\, n_k\, dS +$$

(13.3)

$$+ \int_V (\vartheta_T * d\Theta'_{,k} + \vartheta_c * dC'_{,k}) * du''_k \, dV = \int_V X''_i * du'_i \, dV - \int_S p''_i * du'_i\, dS -$$

$$- \int_S (\vartheta_T * d\Theta'' + \vartheta_c * dC'') * du'_k\, n_k\, dS + \int_V (\vartheta_T * d\Theta''_{,k} + \vartheta_c * dC''_{,k}) * du'_k\, dV,$$

która przedstawia twierdzenie o wzajemności dla niesprzężonych zadań termodyfuzji lepkosprężystej, tj. zadań spełniających warunki (12.31) i (12.32).

Szczególnym przypadkiem tożsamości (13.1) są zależności

(13.4) $\vartheta_T * d\Theta' * de'' = \vartheta_T * d\Theta'' * de'$, $\qquad \vartheta_c * dC' * de'' = \vartheta_c * dc'' * de'$,

$(e = u_{k,k})$,

które posłużą do sformułowania twierdzenia o wzajemności w zadaniach sprzężonych.

W zadaniach sprzężonych musimy dokonać jednak pewnych wstępnych przekształceń równania przewodnictwa cieplnego (12.26) (mnożenie splotowe (12.26) przez H), a w miejscu równania (12.27) będziemy analizowali równanie transportu masy (12.1) oraz równania tworzące (12.9 i 12.18) określające strumień masy j_i i potencjał chemiczny mieszaniny M.

Dla zerowych warunków początkowych otrzymujemy z (12.26) równanie

(13.5) $$\frac{k}{T_o} H * \Theta'_{,jj} - m * d\Theta' - 1 * dC' + \vartheta_c * du'_{k,k} - \frac{\varrho}{T_o} H * r'_1 = 0$$

Jeżeli rozpatrywać będziemy dwa układy pól $\{u_i', \Theta', c'\}$ i $\{u_i'', \Theta'', c''\}$ to po przemnożeniu równania (13.5) przez $* d\Theta''$ i dalszych przekształceniach uzyskamy zależności:

$$\int_V \vartheta_T * d\Theta' * du''_{k,k}\, dV = -\int_V \frac{k}{T_o} H * \Theta'_{,jj} * d\Theta'' dV + \int_V l * dc' * d\Theta'' dV - \frac{\varrho}{T_o}\int_V H * r'_1 * d\Theta'' dV$$

(13.6)

$$\int_V \vartheta_T * d\Theta'' * du'_{k,k}\, dV = -\int_V \frac{k}{T_o} H * \Theta''_{,jj} * d\Theta' dV + \int_V l * dc'' * d\Theta' dV - \frac{\varrho}{T_o}\int_V H * r''_1 * d\Theta' dV$$

które podstawione do tożsamości (13.2) stanowią część twierdzenia o wzajemności wynikająca z równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{k}{T_o}\int_S (H * \Theta'_{,j} * d\Theta'' - H * \Theta''_{,j} * d\Theta')n_j dS + \int_V (l * dc' * d\Theta'' - l * dc'' * d\Theta')dV$$

$$-\frac{\varrho}{T_o}\int_V (H * r'_1 * d\Theta'' - H * r''_1 * d\Theta')dV - \int_V (\vartheta_T * d\Theta'' * du'_{k,k} - \vartheta_T * d\Theta'' * du''_{k,k})dV = 0$$

Trzecią część składowa twierdzenia o wzajemności uzyskamy w wyniku nieco odmiennego postępowania. Punktem wyjściowym nie będą równania dyfuzji (12.17), lecz równania tworzące określające potencjał chemiczny M strumień masy j_i oraz równania bilansu masy.

Biorąc pod uwagę dwa różne potencjały chemiczne w ciele izotropowym

$$M' = n * dc' - l * d\Theta' + \vartheta_c * du'_{k,k}$$

(13.7)

$$M'' = n * dc'' - l * d\Theta'' + \vartheta_c * du''_{k,k}$$

otrzymamy po przemnożeniu pierwszego z nich przez $* dC''$ a drugiego przez $* dc'$ i porównaniu tożsamość

$$M' * dc'' + l * d\Theta' * dc'' - \vartheta_c * du'_{k,k} * dc'' =$$

(13.8)

$$M'' * dc' + l * d\Theta'' * dc' - \vartheta_c * du''_{k,k} * dc' .$$

Następnie z równań bilansu masy (12,1') uzyskamy zależności

$$M'' * dc' = M'' * r'_2 - M'' * j_{i,i},$$

(13.9)

$$M' * dc'' = M' * r''_2 - M' * j_{i,i},$$

które podstawimy do (13.8). W wyniku uporządkowania i scałkowania po r otrzymujemy z (13.8), po uwzględnieniu (13.9), tożsamość

$$\int_V (M' * r_2'' - M'' * r_2')\,dV - \int_V (M' * j_{i,i}'' - M'' * j_{i,i}')\,dV +$$

(13.10)

$$+ \int_V (1 * d\Theta' * dc'' - 1 * d\Theta'' * dc')\,dV - \int_V (\vartheta_c * du_{k,k}' * dc'' - \vartheta_c * du_{k,k}'' * dc')\,dV = 0.$$

Analizując drugi składnik (13.10) zauważamy, że zachodzi (13.11)

$$\int_V (M' * j_{i,i}'' - M'' * j_{i,i}')\,dV = \int_V \left[M' * j_i'' - M'' * j_i'\right]_{,i} dV - \int_V (M'_{,i} * j_i'' - M''_{,i} * j_i')\,dV$$

(13.11)

Druga całka równości (13.11) jest równa zeru, ponieważ $j_i = -k_o M_{,i}$. Końcową postać trzeciej części twierdzenia o wzajemności przedstawia związek

$$\int_S (M' * j_i'' - M'' * j_i')\,n_i\,dS + \int_V (1 * d\Theta' * dc'' - 1 * d\Theta'' * dc')\,dV -$$

(13.12)

$$- \int_V (M' * r_2'' - M'' * r_2')\,dV - \int_V (\vartheta_c * dc'' * du_{k,k}' - \vartheta_c * dc' * du_{k,k}'')\,dV = 0,$$

który po podstawieniu do (13.2) wraz z (13.6) daje poszukiwane twierdzenie o wzajemności w zadaniach sprzężonej termodyfuzji:

$$\int_V (X_i' * du_i'' - X_i'' * du_i')\,dV - \int_V (\ddot{u}_i' * du_i'' - \ddot{u}_i'' * du_i')\,dV - \int_S (p_i' * du_i'' - p_i'' * du_i')\,dS +$$

$$+ 2\int_V (1 * dc' * d\Theta'' - 1 * dc'' * d\Theta')\,dV + \frac{k}{T_o} \int_S (H * \Theta_{,j}' * d\Theta'' - H * \Theta_{,j}'' * d\Theta')\,n_j\,dS$$

(13.13)

$$- \frac{\varrho}{T_o} \int_V (H * r_1' * d\Theta'' - H * r_1'' * d\Theta')\,dV - \int_V (M' * r_2'' - M'' * r_2')\,dV - \int_S (M * j_i'' - M'' * j_i')\,n_i\,dS = 0$$

W twierdzeniu (13.13) biorą udział dwa układy pól:

$$\left\{X_i', p_i', u_i', \Theta', c', \Theta'(x\ t), \Theta_{,j}'\,n_j, M', j_i', r_1', r_2'\right\},$$

$$\left\{X_i'', p_i'', u_i'', \Theta'', c'', \Theta''(x\ t), \Theta_{,j}''\,n_j, M'', j_i'', r_1'', r_2''\right\},$$

występujące w równaniach sprzężonej termodyfuzji, wśród których $\Theta(x,t)$, $\Theta_{,i}n_i$, M, j_i mogą być użyte do formułowania warunków brzegowych nieme-

chanicznej części zadania, przy czym strumień masy j_1 i potencjał chemiczny M należy przyjąć w zgodzie z równaniami tworzącymi.

Należy podkreślić, że w równaniu (13.13) uwzględniono wszystkie ograniczenia termodynamiczne nakładane na procesy wymiany masy i ciepła w ciele lepkosprężystym. Istotnie, równania tworzące (12.7) - (12.9), (12.13), (12.16) - (12.18) spełniają te ograniczenia, a tym samym uzyskane twierdzenie, jako ich konsekwencja, także nie stoi w sprzeczności z postulatami termodynamiki ośrodka odkształcalnego.

Jak już zauważyliśmy, twierdzenie o wzajemności jest także przejawem symetrii liniowych zadań mechaniki ośrodka ciągłego - dodajmy przejawem najistotniejszym, posiadającym podstawowe znaczenie dla konstrukcji rozwiązań zadań brzegowych. Z algebrą rozwiązań podobnych (także wynik symetrii) łączy się ono o tyle, że sposoby wykorzystania obydwu własności zadań brzegowych są podobne. Na fakt ten zwracamy tutaj uwagę również dlatego, aby podkreślić konieczność dalszych badań ogólnych własności równań liniowej mechaniki ośrodka ciągłego.

Zaprezentowaliśmy w tym rozdziale bardzo skrótowo propozycję ujęcia problemów wymiany masy i ciepła w ciele lepkosprężystym. Wiele miejsca poświęcono przy tym omówieniu termodynamicznych podstaw zagadnienia, uzyskując na tej drodze komplet równań tworzących dla procesu sprzężonego. Autor zajmował się tą tematyką po napisaniu poprzednich rozdziałów, które stanowić miały w pierwotnym zamyśle całość pracy, jednak uzyskane wyniki zachęcały do dołączenia ich do pozostałych rezultatów. Okazało się m.in., że w przypadku sprzężonej termodyfuzji lepkosprężystej można określić rozszerzone analogie, grupy i algebry rozwiązań podobnych tak, aby wyniki poprzednie były ich przypadkami szczególnymi.

WNIOSKI KOŃCOWE

1. Pracę należy traktować jako próbę syntetycznego spojrzenia na równania liniowej mechaniki ośrodka odkształcalnego.

2. Eksponując algebraiczną strukturę równań analizowanych w pracy teorii miano na uwadze jej wartości poznawcze, które na tym etapie badań wnoszą wiele nowych idei i konkretnych wyników.

3. Konstrukcja grup przekształceń wykazała jak istotne i ciekawe właściwości wynikają z analizy splotu. Właściwości te przypisane są nie tylko równaniom mechaniki, ale również innym, liniowym równaniom fizyki, np. równaniu przewodnictwa cieplnego, dyfuzji itp.

4. Dalsze uogólnienia są możliwe przy wykorzystaniu metod analizy funkcjonalnej, przestrzeni Hilberta i algebry operatorów. W pracy niniejszej z uwagi na nowość problematyki korzystano z tradycyjnych pojęć rachunku przekształceń całkowych Laplace'a i Fouriera, które pozwalały na stosunkowo proste interpretacje fizykalne.

5. Istnieje możliwość dalszych uogólnień na:

   - zagadnienia nieliniowe fizykalnie,
   - mikropolarne teorie ośrodka odkształcalnego.

6. Wyniki uzyskane w pracy stanowią podstawę do konstruowania algebr rozwiązań podobnych dla zadań szczególnych, np. płyt, powłok, dwuwymiarowych zadań mechaniki itp.

7. Podano analogie między rozwiązaniami sprężystymi a starzejącym się oraz termosprężystymi a termo-starzejącymi się.

8. Uzyskano rozwiązania zamknięte dla kilku ważnych zadań brzegowych półprzestrzeni, m.in. dla ważkiej półprzestrzeni i działania centrum ściskania. Na podstawie tych rozwiązań sformułowano zadanie kontaktowe odpowiadające wzajemnemu oddziaływaniu konstrukcji z górotworem. Uzyskane wyniki po opracowaniu numerycznym będą miały istotne znaczenie w ocenie stanu zabezpieczeń konstrukcji przed skutkami ruchów górotworu.

9. Wyprowadzone z ogólnych zasad mechaniki i termodynamiki równania liniowej termodyfuzji lepkosprężystej stanowią podstawę do formułowania zadań brzegowych przepływu masy i ciepła w ciele lepkosprężystym. Uzyskane w punkcie 13 twierdzenie o wzajemności można uważać za pierwszy krok w kierunku poszukiwania metod rozwiązania zadań brzegowych tych problemów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

Część I

1. ALFREY T. - Non-homogeneous stresses in visco-elastic media, Quart. Appl.Math. 2, 2(1944), s. 113.
2. BABUŠKA J., HLAVAČEK J. - On the existense and uniqueness of solution in the theory of viscoelasticity, Arch. Mech. Stos. vol. 8, 1,(1966).
3. BENTHEM C.J.P. - On the affine transformation for aelotropic plane-stress and plane strain problems, Trans. ASME ser. E, J. Appl. Mech. vol. 30, 1 (1963).
4. BLAND D.E. - The Theory of Linear Viscoelasticity, Pergamon Press,Oxford 1960.
5. BOLTZMANN L. - Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. An.Phys. und Chem. 7, (1876).
6. BOLEY B.A, WEINER J.H. - Theory of Thermal Stresses, John Wiley, New York 1960.
7. BORKOWSKI SZ. - Przegląd prac dotyczących naprężeń cieplnych w ciałach stałych (lata 1965-1967). Mech. Teor. i Stos. 2, 7(1969),107-153
8. BOURBAKI N. - Algébre, Hermann,Paris 1964.
9. BOURBAKI N. - Algébre commutative, Hermann,Paris 1965.
10. CURTIS C., REINER J. - Representation theory of finite groups and associative algebras. Intersc. Publ. New York 1962.
11. COLEMAN B., NOLL W. - Foundations of linear viscoelasticity, Rev. Modern Phys. 2, 33(1962).
12. COLEMAN B. - Thermodynamics of materials with memory, Arch.Rat. Mech. and Anal. 17(1964) 1-46.
13. DOMAŃSKI S., PISKOREK A. - Matrices of fundamental solutions for the system of quasi - static equations of thermoelasticity and the system of dynamic equations of thermal stresses, AMS, 2, 23(1971).
14. DROBOT S. - Analiza wymiarowa. Zast.Mat. 1(1954).
15. ERINGEN A.C. - Non-linear Theory of Continuons Media, Mc Graw-Hill, New York 1962.
16. FLÜGGE W. (ed.) Handbook of Engineering Mechanics, Mc-Graw-Hill, New York 1962.
17. FUNG Y.C. - Foundations of Solid Mechanics, N. Yersey (1967)(tł.pol.: Podstawy mechaniki ciała stałego).
18. GRAHAM G.A.C. - Contact problems in the linear theory of viscoelasticity, North Carolina State University, Raleigh 1965.
19. GRAHAM G.A.C. - On the solution of mixed boundary value problems,that involve time - dependent boundary regions, for viscoelastic bodies with temperature - dependent properties, North Carolina State University, Raleigh 1967.

20. GREEN A.E., RIVLIN R.S., SPENCER A.J.M. - The mechanics non-linear materials with memory, Part. II, Arch.Rat. Mech. and Anal. 3, 1(1959).

21. GROSS B. - Mathematical structure of the theories of visccelasticity, Herman, Paris 1953.

22. GURTIN M.E., STERNBERG E. - On the linear theory of viscoelasticity, Arch. Rat.Mech. and Anal. 11(1962), 291-356.

23. HILTON H.H. - Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature - dependent riscoelastic properties of the Kelvin type, Proc. Second U.S. Nat.Cong. Appl. Mech. (1954).

24. HILTON H.H., RUSSEL H.G. - An extension of Alfrey's analogy to thermal stress problems on temperature dependent linear viscoelastic media, J. Mech. Phys. Solids 9(1961), 152.

25. KNOX R.S., GOLD A. - Symmetry in the Solid State, W.A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam 1964.

26. KUBIK J. - O pewnych zamkniętych rozwiązaniach zadań brzegowych półprzestrzeni lepkosprężystej, Rozpr. inż. (w red.).

27. KUCHARZEWSKI M. - Elementy teorii obiektów geometrycznych (skrypt),Katowice, 1969.

28. KUPRADZE V.D. - Progress in solid mechanics, vol. 3, Dynamical Problems in Elasticity, Amsterdam 1963.

29. LAMBEK J. - Lecturs on Rings and Modules, Waltham, Messachusetts,1966

30. LEADERMAN H. - Elastic and creep properties of filamentous materials, Textile Foundation, Washington D.C. 1943.

31. LEE E.H. - Stress analysis in visco-elastic bodies, Quart. Appl.Math. 2, 13(1955), 183.

32. MAURIN K. - Metody przestrzeni Hilberta, PWN- Warszawa, 1964.

33. MEIXNER J. - On the theory of linear viscoelasticity behavior, Rheologica Acta 4 (1965), 77-85.

34. MIKUSIŃSKI J. - Rachunek operatorów, PWN Warszawa 1957, MM 30.

35. MIKUSIŃSKI J., SIKORSKI R. - Elementarny wstęp do teorii dystrybucji. PWN, Warszawa, 1963.

36. Metody geometryczne w fizyce i technice (pr. zbiorowa) NT, Warszawa, 1968.

37. MORLAND L., LEE E.H. - Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation. Trans. Soc. Pheology 4 (1960), 223.

38. MOZRZYMAS J. - Zastosowanie teorii grup w fizyce współczesnej, PWN, Warszawa, 1957.

39. MÜLLER L. - Teoria podobieństwa w mechanice. Warszawa 1961.

40. NOLL W. - A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media, Arch. Rat. Mech. Anal., 2,(1958), 197.

41. NOLL W., TRUESDELL - The non-Linear Field Theories of Mechanics, Encyclopedia of Physic, Vol. III/3, Springer-Verlag, 1965.

42. NOWACKI W. - Thermal stresses due to the action of heat sources in a viscoelastic space. AMS 1, 11 (1959), 111.

43. NOWACKI W. - Mixed boundry problems of elastodynamics, Bull. Acad.Pol. Sci. Serie Sci. Techn. 3, 12(1964).

44. NOWACKI W. - Mixed boundry problems of thermoelasticity, Bull. Acad. Pol. Sci. Serie Sci. Techn. 11, 12(1964).

45. NOWACKI W. - Teoria spełzania. Arkady, Warszawa, 1963.

46. NOWACKI W. - Dynamiczne zagadnienia termosprężystości. PWN, Warszawa, 1966.

47. NOWACKI W. - Teoria sprężystości. PWN, Warszawa, 1971.

48. NOWACKI W. - Transient thermal stresses in viscoelastic bodies,I.AMS, 11, 5,(1959).

49. OLESIAK Z. - Dynamiczne zagadnienia ciał o właściwościach lekosprężystych, Rozpr. Inż. 3, 9(1961).

50. OLESIAK Z. - O pewnych własnościach naprężeń cieplnych. Mechn.Teor. i Stos. 5, 2, 1967.

51. OSIOWSKI Z. - Zarys rachunku operatowego. WNT, Warszawa, 1965.

52. PIEKARSKI Z. SZEFER G. - Pełzanie półpłaszczyzny przy mieszanych warunkach brzegowych, Rozpr. Inż., 4, 18, 1970.

53. PIEKARSKI Z., SZEFER G. - O pewnym przypadku pełzania półpłaszczyzny z nieciągłymi warunkami brzegowymi, Rozpr. Inż., 1, 18, 1970.

54. REINER M. - Reologia teoretyczna. PWN, Warszawa 1958.

55. PRAGER W. - Introduction to Mechanics of Continua, Ginn. Boston 1961.

56. ROGERS T.G. - Asymetric relaxation and complience materices in linear viscoelasticity. Z. Angew. Math. und Phys., 14, 4, (1963).

57. SCHWARZL F., STAVERMAN A.J. - Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior, J. Appl. Phys. 23(1952).

58. SIEDOW L.J. - Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice,WNT, Warszawa, 1968.

59. SPENCER A.J.M.- Theory of Invariants, Continuum Phisics, vol. I, New York 1971.

60. SPENCER A.J.M., RIVLIN R.S. - The invariants of six symmetric 3 x 3 matrices. Arch.Rat. Mech. and Anal. 1, 7,(1961).

61. SOKOLNIKOFF J.S. - Mathematical Theory of Elasticity, John Wiley, New York, 1956.

62. SOKOLNIKOFF J.S. - Tensor Analysis, John Wiley, New York, 1964.

63. SOMMERFELD A. - Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Über d. D. Math. Vereinigung, 21 (1912), 309-353.

64. STERNBERG E. - Naprężenia cieplne w ciałach lepkosprężystych. Mech. Teor. i Stos. z.1, (1963).

65. STREIZWOLF W.A. - Gruppentheorie in der Festkörperphysik, Leipzig, 1967.

66. STRZAŁKOWSKI A. - Zasady zachowania w fizyce. PWN Warszawa, 1970.

67. TOUPIN R.A., TRUESDELL C. - The Clasical Field Theories. Encyclopedia of Physics, vol. III/1, Berlin 1960.

68. TSIEN H.S. - A generalization of Alfrey's theorem for viscoelastic media, Quart. Appl. Math. 1, 8(1956), 104.

69. WEYL H. - The Clasical Groups, their Invariants and Representations, Princeton 1946.

70. TRUESDELL C. - Sześć wykładów nowoczesnej filozofii przyrody,PWN,Warszawa, 1969.

71. WEYL H. - Symetria, PWN, Warszawa, 1960.

72. WIGNER E. - Symmetries and Reflections, Indiana University Press,Bloomington 1970.

73. WHITE L., TOKITA NABORE - An additive functional theory of viscoelastic deformation with application to amorphous polymers, solutions and vulcanizates, J. Phys. Soc. Japan, 3, 22, (1967).

74. WOŹNIAK CZ. - Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych. PWN, Warszawa, 1969.

75. WESOŁOWSKI Z., WOŹNIAK CZ. - Teoria sprężystości. PWN.Warszawa, 1970.

76. VOLTERRA V. - Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell' elasticita. Atti della Real. Accademia dei Lincei, Vol. 18, 2(1909).

77. VOLTERRA V. - Leçons sur les functions de liques. Paris, 1913.

78. ZIGLER H. - Thermodynamik und reologische Probleme. Ing.-Arch. 25. (1957).

79. АРНОЛЬД В.И. - Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва 1971 г.

80. АРУТЮНЯН Н.Х. - Некоторые вопросы теории ползучести, Москва 1972 г.

81. ЕФМОВ Н.В. - Высшая геометрия, Москва 1971 г.

82. ГЕЛЬФАНД И.М - Лекции по линейной алгебре, Москва 1971 г.

83. ГРОМОВ В.Г. - Альгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязко-упругости, Д.А.Н. СССР Т. 182, 1, 1968

84. ДЕМИДОВИЧ Б.П., МАРОН И.А. - Основы вычислительной математики, Москва 1979.

85. КЛЯЧКО С.Д. - Аффинное подобие в задачах теории упругости и пластичности, Сб "Прочность и пластичность", Москва 1971 г.

86. КЛЯЧКО С.Д. - Об аффинности решения задач теории упругости, Тр. Новосибирского ИН-ТА Инж. жел-дор. тр. вып. 62, 1967 г.

87. КУПРАДЗЕ В.Д. и др. - Трехмерные задачи математической теории упругости, Тбилиси 1968 г.

88. КУРОШ А.Г. - Теория групп, Москва 1967 г.

89. МАРТЫНЕНКО В.С - Операционные исчисление, Киев 1968 г.

90. МОНАХЕНКО Д.В. - Моделирование изотермических задач линейной наследственной теории ползучести М.Т.Т. 1 1972 82-84.

91. ЛОМАКИН В.А., БЕЗУХОВ В.Н., КОЛТУНОВ М.А. - Вопросы подобия и моделирования процесов деформации вязко-упругих оред, Мех. пол. 1 1967 .

92. ЛЮБАРСКИЙ Г.Я. - Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат 1957

93. ПОБЕДРИЯ Б.Е. - Основы математической теории термовязко-упругости, Москва 1970 г.

94. РЖАНИЦЫН А.Р. - Теория ползучести, Москва 1968.

95. СЕДОВ Л.И. - Механика сплошной среды Т. 1, 2, Москва 1969 г.

96. ГАНТМАХЕР Ф.Р. - Теория матриц, Москва 1954 г.

Część II

1. BIOT M.A. - Linear thermodynamics and the mechanics of solids,Proc.of the Third V.S. National Congress of Applied Mechanics, Brown University 1958.

2. BREUER S., ONAT E.T. - On the determination of free energy in linear viscoelastic solids, Z. Angew. Math. Phys., 15, 184, 1964.

3. CARSLAW H.S., JAEGER J.S - Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, Oxford 1959.

4. CHRISTENSEN R.M., NAGHDI P.M. - Linear non - isothermal viscoelastic solids, Acta Mechanica, 1, 1968.

5. CHRISTENSEN R.M. - Theory of Viscoelasticity, Academic Press,New York 1971.

6. ERINGEN A.C. - A unified theory of thermomechanicol materials,Int. J. Eng. Sci., vol. 4, 2, 1966.

7. ERINGEN A.C., INGRAM J.D. - A continuum theory of chemically reacting media - I, Int. J.Eng. Sci., vol. 3, 2, 1965.

8. GREEN A.E., NAGHDI P.M. - A theory of mixtures, Arch. Rat. Mech.Anal. vol. 24, 4, 1967.

9. GURTIN M.E., HERRERA I. - On dissipation inequalites and linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math. 23, 235, 1965.

10. GROOT S.R., MAZUR P. - Non - Equilibrium Thermodynamics, North - Holland, Amsterdam 1962.

11. TER HAAR D., WERGELAND H. - Elements of Thermodynamics, Addison - Wesley Publishing Company, Massachusetts 1967.

12. MEIXNER J., REIK H.G. - Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, Handbuch der Physik, Band III/2, Springer Verlag, Berlin 1959.

13. MEIXNER J. - On the theory of linear viscoelastic behavior, Rheologia Acta 4, 1965.

14. NOWACKI W. - Certain problems of thermodiffusion in solids, A.M.S. 23. 6, 1971.

15. PRIGODINE L. - Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes, John Wiley, New York 1962.

16. STEEL T.R. - Applications of a theory of interacting continua, Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. 20, N1, 1967.

17. TRUESDELL C. - Sulle basi della termomeceanica, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 8, vol. 22, 1957.

18. WIŚNIEWSKI S., STANISZEWSKI B., SZYMANIK R. - Termodynamika procesów nierównowagowych, PWN Warszawa 1973.

19. ПОДСТРИГАЧ Я.С., ПАВЛИНА В.С - Диффузионные процессы в упруго-вязко деформируемом теле, Прикл. Мех. (10), 5, 1974

ANALOGIE I PODOBIEŃSTWO W LINIOWYCH OŚRODKACH ODKSZTAŁCALNYCH

S t r e s z c z e n i e

Część I

W rozdziale I wprowadzono pojęcie przestrzeni rozwiązań w mechanice ośrodka odkształcalnego oraz określono zakres analizowanych w pracy teorii ośrodka odkształcalnego. W szczególności, wiele miejsca poświęcono analizie wzajemnych relacji zachodzących między rozwiązaniami w poszczególnych teoriach, uzyskując w wyniku analogię między rozwiązaniami sprężystymi (termosprężystymi) a pewną klasą rozwiązań w teorii starzenia się (termostarzenia). Podane analogie są uogólnieniami analogii Lee - Alfrey'a i Hiltona na ciała podlegające procesom starzenia się.

W odróżnieniu od pierwszego rozdziału, w którym badano związki występujące między rozwiązaniami w różnych teoriach mechaniki, w tym rozdziale (II) skupiono uwagę na własnościach ustalonej przestrzeni rozwiązań. Do opisu tych własności wykorzystano pojęcia i twierdzenia teorii grup, pierścieni i algebr liniowych. Wprowadzono mianowicie takie grupy przekształceń i algebry, względem których operatory równań mechaniki są niezmiennicze. W wyniku otrzymujemy rodziny rozwiązań podobnych. Wszystkie rozwiązania, należące do wzmiankowanej rodziny, uzyskujemy przez wykonanie prostej operacji algebraicznej na ustalonym rozwiązaniu. W ten sposób znalezienie wszystkich rozwiązań np. w teorii sprężystości sprowadza się do zagadnienia nieco prostszego - wyszukania wszystkich rozwiązań wzajemnie niepodobnych.

Rozdział III poświęcono zastosowaniom. W pierwszej kolejności sprecyzowano macierze i operatory generujące rozwiązania podobne w poszczególnych teoriach. Następnie, dla różnych zadań brzegowych półprzestrzeni zbudowano analogię, która pozwoliła wykorzystać klasyczne rozwiązanie Boussinesqa do określenia stanów przemieszczeń w kilku innych zadaniach. W szczególności, uzyskano rozwiązanie zamknięte dla ważkiej półprzestrzeni oraz działania centrum ściskania na brzegu. Ostatni wynik zastosowano do wyznaczenia stanu przemieszczeń w bezpośrednim sąsiedztwie posadowienia konstrukcji budowlanych na górotworze.

Część II

Problematyką analizowaną w tej części pracy jest termodyfuzja w ciele lepkosprężystym. Równania opisujące zagadnienie uzyskuje się z rozważań termodynamicznych. W efekcie końcowym, oprócz równań przemieszczeniowych uzyskujemy sprzężone równania przepływu masy i ciepła w ciele lepkosprężystym. Określono także warunki rozsprzężenia równań, analogię z odpowiednio postawionymi zadaniami termodyfuzji sprężystej oraz twierdzenia o wzajemności.

АНАЛОГИИ И РОДОБИЕ В ЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

В первой главе настоящей работы введено понятие пространства решений в линейной механике сплошной среды. Это понятие использовано для определения решений в особых механических теориях (линейная теория упругости, вязкоупругости и др.). Излагаются также исследования связей происходящих между решениями в разных линейных теориях. С помощью вышеуказанных исследований было получено расширение аналогии Ли - Алфрея (аналогии Π_1, Π_2).

Во второй главе рассматриваются свойства данного пространства решений. Для описания этих свойтсв были использованы понятия и положения теории групп и линейных алгебр. Введено такие линейные алгебры, что операторы краевых задач относительно этих алгебр остались инвариантными.

В третьей главе показано применение введенного раньше формального аппарата. Сначала были определены операторы и матрицы генерирующие подобные решения. Затем, для различных краевых задач полупространства была составлена аналогия, которая позволила определить несколько новых решений на основании классического результата Боуссинеско(Boussinesq). Были получены аналитические решения для дествия центра сжатия на крае полупространства.Этот результат был использован для определения состояния смещений при непосредственном соприкосновении конструкции с горной породой.

Четвертая глава рассматривает основные проблемы течения массы и тепла во вязко-упругом теле. Основой рассуждений являлись здесь уравнения баланса массы, энергии, момента количества движения и количества движения. Рассуждения помогли определить уравнения сопряжённой вязкоупругой термодиффузии.

Здесь определены также условия рассопряжения уравнений, аналогии и теорема о взаимности.

ANALOGIES AND A RESEMBLANCE
IN LINEAR THEORIES OF A STRAIN MEDIUM

S u m m a r y

In chapter one of the paper the solutions space term in linear mechanics has been introduced. The term served for determining the solutions in specific mechanics theories. The relations between solutions in various linear theories has been also examined. In this way the extension of Lee Alfrey's analogy to growing old materials has been got.

In the second chapter the attension has been paid to the properties of a steady solutions space. Terms and theorems of the group theory and linear algebra have been utilized to describe these properties.
There had been such linear algebras introduced that the operators of boundary tasks have been unvariable to them.

In the third chapter the applications of, introduced before, formal apparatus has been given. In the first place the operators and matrices generating similar solutions have been precised. Next the analogy for various boundary tasks, which enabled the determining for new solutions on the basis of Boussinesq's result, has been built.
In particular the closed solution for the acting of compression centre on a half-space boundary has been obtained. The result was utilized to determine the displacement state in direct neighbourhood of contact of the construction and mountain composition.

Chapter four briefly formulates the fundamental problems of the heat and mass flow in a viscoelastic body. The equations of mass, energy, entropy, angular momentum and momentum balances make the basis for the considerations which result in the coupled equations of viscoelastic thermodiffusion.
The conditions for disjoining the equations and also the reciprocity theorem have been given.