ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 71 Nr kol. 656

Adam KOWALCZYK

Politechnika Rzeszowska

REGRESYJNA METODA POMIARU OPÓŹNIEŃ TRANSPORTOWYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę pomiaru opóźnień transportowych za pomocą normalnych sygnałów stochastycznych wykorzystującą zależności regresyjne. Podano realizację układu pomiarowego oraz wykazano niektóre zalety metody w porównaniu do metody korelacyjnej.

1. Wstęp

Znajomość opóźnień transportowych przy przechodzeniu sygnałów stochastycznych między umownym wejściem i wyjściem fizycznych układów opóźniających jest często potrzebne zarówno w warunkach laboratoryjnych jak i przemysłowych. Znane metody pomiaru opóźnień, oparte na analizie funkcji korelacji wzajemnej sygnału wejściowego i wyjściowego, ze względu na stosunkowo trudną realizację praktyczną pomiaru nie znalazły powszechnego zastosowania.

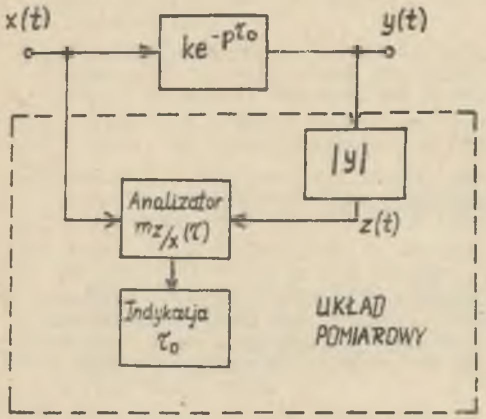
Dalej przedstawiono metodę pomiaru opóźnienia transportowego opartą na zależnościach regresyjnych sygnałów. Metoda ta zapewnia bardziej ekonomiczną realizację pomiaru niż metoda korelacyjna.

2. Opis metody

Do dalszych rozważań przyjmuje się, że sygnały wejściowy i wyjściowy są sygnałami stacjonarnymi o łącznym rozkładzie normalnym i zerowych wartościach średnich, a układ fizyczny ma transmitancję operatorową $G(p) = ke^{-p\tau_0}$.

Schemat blokowy układu do pomiaru opóźnienia przedstawia rys. 1. W układzie pomiarowym analizowana jest zależność regresyjna pomiędzy sygnałami $x(t)$ i $z(t) = |y(t)|$, którą można zapisać wyrażeniem:

$$m_{z/x} = \int_0^{\infty} zp(z/x)dz \tag{1}$$



Rys. 1

gdzie:

$p(z/x)$ - jest warunkowym rozkładem sygnału $z(t)$ przy warunku $x(t) = x$.

Dla przyjętych założeń prawdopodobieństwo warunkowe $p(y/x)$ przyjmuje postać:

$$p(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}\sqrt{1-\varrho_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{y-k\varrho_{xy}x}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)}\right\} \qquad (2)$$

przy czym:

σ_y - odchylenie standardowe sygnału y,

ϱ_{xy} - unormowana funkcja korelacji wzajemnej sygnałów x i y.

Na podstawie własności nieliniowego przekształcenia $z = |y(t)|$, które jest dokonywane na sygnale $y(t)$ można napisać [2]:

$$p(z/x) = \begin{cases} \left|\frac{dy}{dz}\right| \left[p(+z) + p(-z)\right], & z \geqslant 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

przy czym:

$$p(+z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}\sqrt{1-\varrho_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{(z-k\varrho_{xy}x)^2}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)}\right\} \qquad (4)$$

$$p(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}\sqrt{1-\varrho_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{(z+k\varrho_{xy}x)^2}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)}\right\} \qquad (5)$$

Podstawiając wzory (3), (4) i (5) do (1) otrzymujemy:

$$m_{z/x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}\sqrt{1-\varrho_{xy}^2}} \int_0^{\infty} z \left[\exp\left\{ -\frac{(z-k\varrho_{xy}x)^2}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)} \right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{ -\frac{(z+k\varrho_{xy}x)^2}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)} \right\} \right] dz \tag{6}$$

Po rozwiązaniu całki metodą podstawienia, wyrażenie (6) przyjmuje postać:

$$m_{z/x} = \sigma_y \sqrt{\frac{2}{\pi}(1-\varrho_{xy}^2)}\, \exp\left\{ -\frac{k^2\varrho_{xy}^2x^2}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)} \right\} +$$

$$+ \; k\varrho_{xy}x \left[1-2\,\phi\left(-\frac{k\varrho_{xy}x}{\sigma_y\sqrt{1-\varrho_{xy}^2}}\right) \right] \tag{7}$$

gdzie:

$$\phi\left(-\frac{k\varrho_{xy}x}{\sigma_y\sqrt{1-\varrho_{xy}^2}}\right) = \phi(s_o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s_o} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$$

- jest całką prawdopodobieństwa.

Łatwo wykazać, że dla warunku $X = 0$

$$m_{z/x} = \sigma_y \sqrt{\frac{2}{\pi}(1-\varrho_{xy}^2)}, \tag{8}$$

Funkcja korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$ może być określona za pomocą wyrażenia [1]:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, R_x(\tau-t)\,dt \tag{9}$$

przy czym

$R_x(\tau)$ - funkcja korelacji sygnału wejściowego,

$g(t)$ - odpowiedź impulsowa układu.

Dla układu o transmitancji

$$G(p) = ke^{-p\tau_o}$$

i odpowiedzi impulsowej

$$g(t) = k\delta(t-\tau_o)$$

gdzie:

$\delta(t-\tau_o)$ jest impulsem Diraca dla $t = \tau_o$

wyrażenie (9) przyjmuje postać

$$R_{xy}(\tau) = kR_x(\tau - \tau_o), \tag{10}$$

a dla odpowiednich unormowanych funkcji korelacji:

$$\varrho_{xy}(\tau) = \varrho_x(\tau-\tau_o), \tag{11}$$

Po uwzględnieniu wyrażeń (8) i (11) otrzymujemy:

$$m_{z/x=0} = \sigma_y\sqrt{\frac{2}{\pi}\left[1 - \varrho_x^2(\tau-\tau_o)\right]} \tag{12}$$

Wprowadzamy funkcję unormowaną

$$m_z = \frac{m_{z/x=0}}{(m_{z/x=0})_{max}} = \sqrt{1 - \varrho_x^2(\tau-\tau_o)} \tag{13}$$

Otrzymana funkcja $m_z = f(\tau)$ (jej minimum dla $\tau = \tau_o$) umożliwia identyfikację opóźnienia transportowego τ_o. Dokładność określenia τ_o zależy od stromości funkcji $m_z(\tau)$ w pobliżu punktu ekstremalnego.
Stromość ta może być określona jako

$$S_m(\tau) = \frac{dm}{d\tau} = -\sqrt{\frac{\varrho_{xy}^2}{1-\varrho_{xy}^2}} \cdot \frac{d\varrho_{xy}}{d\tau} = k_1(\tau)\ S_\varrho(\tau) \tag{14}$$

przy czym $S_\varrho(\tau)$ - określa stromość funkcji korelacji wzajemnej.
Zachodzi pytanie kiedy $S_m(\tau) \geqslant S_\varrho(\tau)$.
Po rozwiązaniu nierówności:

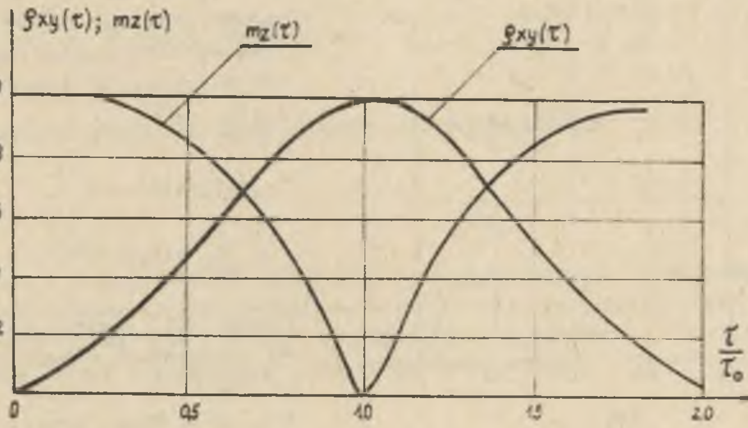
$$|k_1(\tau)| \geqslant 1$$

otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \varrho_{xy} \leqslant 1.$$

W otoczeniu punktu głównego ekstremum funkcja $m_z(\tau)$ jest bardziej stroma, aniżeli funkcja korelacji wzajemnej, co jest zaletą ze względu na dokładność identyfikacji.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowo funkcje $\varrho_{xy}(\tau)$ i $m_z(\tau)$ dla sygnału wejściowego o unormowanej funkcji korelacji $\varrho_x(\tau) = e^{-\tau^2}$ przy opóźnieniu w układzie równym τ_0.



Rys. 2

Wariancja warunkowej wartości średniej podanej równaniem (8) wynosi

$$D(z/x=0) = \int_0^{\infty} (z-m_{z/x=0})^2 \, p(z/x=0)dz. \tag{15}$$

Zgodnie z wzorami (2) i (3) warunkowa gęstość prawdopodobieństwa dla $X=0$ ma postać:

$$p(z/x=0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_y \sqrt{1-\varrho_{xy}^2}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma_y^2(1-\varrho_{xy}^2)}\right\} \tag{16}$$

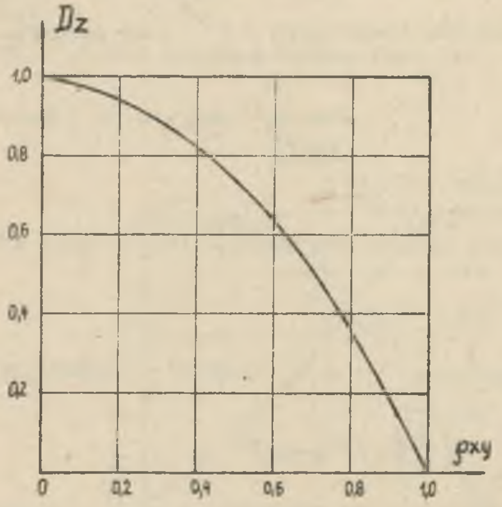
Po wstawieniu wyrażeń (8) i (16) do (15) i wykonaniu obliczeń otrzymuje się ostatecznie:

$$D(z/x=0) = \sigma_y^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(1-\varrho_{xy}^2) \tag{17}$$

i w postaci unormowanej

$$D_z = \frac{D(z/x=0)}{\sigma_y^2(1-\frac{\ }{\ })} = 1 - \varrho_{xy}^2 \tag{18}$$

Zależność $D_z = f(\varrho_{xy})$ przedstawiona jest na rys. 3.



Rys. 3

Minimalna (zerowa) wariancja dla $\varrho_{xy} = 1$ umożliwia dokładne wyznaczenie minimum charakterystyki dla argumentu $\tau = \tau_0$.

Podana wyrażeniem (12) warunkowa wartość oczekiwana może być otrzymana w sposób dyskretny [4]:

$$m_{z(t+\tau)/x(t)} = 0$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z(t_i+\tau)/x(t) = 0 \tag{19}$$

Sygnał z(t) zostaje próbkowany w momentach odległych o τ od chwil, w których sygnał X(t) przechodzi przez wartość zerową. Dla odpowiednio dużej liczby próbek, które zostają uśrednione otrzymuje się estymator szukanej wartości oczekiwanej.

W badaniach wykonanych w Zakładzie Metrologii Elektrycznej i Elektronicznej Politechniki Rzeszowskiej do uśredniania zastosowano analogowy filtr dolnoprzepustowy. Sygnał impulsowy na wyjściu układu próbkującego z pamięcią charakteryzuje się w przybliżeniu stałym czasem trwania impulsów i przypadkowymi wartościami amplitud. Uśrednienie takiego sygnału przy odpowiednim doborze parametrów filtru dolnoprzepustowego daje w efekcie poszukiwany estymator warunkowej wartości średniej. Dla ciągłej i automatycznej rejestracji opóźnienia w wykonanym modelu zastosowano różnicowy układ regulacji ekstremalnej.

3. Wnioski końcowe

Realizacja praktyczna pomiaru w oparciu o przedstawioną metodę jest znacznie łatwiejsza aniżeli w metodzie korelacyjnej.

Z tego względu odpowiednie układy pomiarowe mogą znaleźć zastosowanie do wyznaczenia takich wielkości jak prędkość, przepływ itp.; wszędzie tam, gdzie jedynymi sygnałami niosącymi informację pomiarową są sygnały stochastyczne.

LITERATURA

[1] Bendat J.S., Piersol A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych PWN Warszawa 1976.

[2] Gorianow W.T., Żurawlew A.G., Tichonow W.I.: Primiery i zadaczi po statisteczeskoj radiotiechnikie. Sowietskoje radio. Moskwa 1970.

[3] Hagel R.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1975.

[4] Mirskij G.J.: Apparaturnoje opriecielenje charakteristik słuczajnych processow. Energia, Moskwa 1972,

РЕГРЕССИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ

Р е з ю м е

В статье рассматривается метод измерения транспортных запаздываний при помощи нормальных стохастических сигналов, используя регрессионные зависимости. Приводится измерительная схема, а также предлагаются некоторые преимущества метода в сравнении с корреляционным методом.

A REGRESSION METHOD OF MEASUREMENT OF CARRYING DELAYS

S u m m a r y

In this paper a method of measuring the carrying delays by means of standard stochastic pulses using the regression relationship has been presented. Furthermore, a measurent system and some features of this method as compared to that based upon correlation have also been described.