

Marian PASKO

Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki  
Politechniki Śląskiej

### WSZECHPRZEPUSTOWY FILTR Z WYKORZYSTANIEM ŻYRATORA RZECZYWISTEGO

**Streszczenie.** Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie wpływu rzeczywistego żyratora na charakterystykę wszechprzepustowego filtra drugiego rzędu.

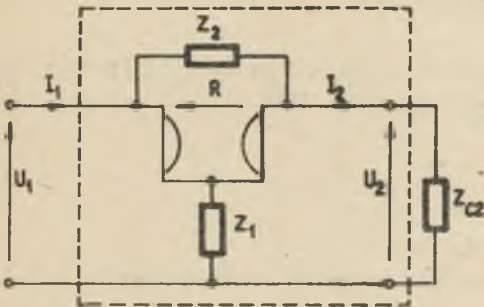
Rozważa się również wrażliwości  $S_{x_1}^Q$ ;  $S_{x_1}^{\omega_r}$ ;  $S_{x_1}^{K_u(j\omega)}$  wszechprzepustowego filtra zrealizowanego w oparciu o idealny żyrator.

### WPROWADZENIE

Właściwości wszechprzepustowego filtra z rzeczywistym żyratorem przedstawiono przy następujących założeniach:

- elementy pasywne ( $R_1$ ) są wszystkie jednakowe a wzmacniacze operacyjne są rzeczywiste,
- elementy pasywne ( $R_1$ ) są dobrane z pewną tolerancją, a wzmacniacze operacyjne są traktowane jako idealne.

W pracy będzie rozważany układ przedstawiony na rys. 1, zbudowany z żyratora i elementów RC. Układ przedstawiony na rys. 1 pozwala na realizację zer transmitancji leżących w prawej półpłaszczyźnie [3], [4].



Rys. 1

cję zer transmitancji leżących w prawej półpłaszczyźnie [3], [4].

## ANALIZA UKŁADU Z ŻYRATOREM IDEALNYM

Jeżeli żyrator jest idealny, tzn. o macierzy

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -R & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

gdzie:

$R$  - rezystancja żyracji,

to wówczas macierz łańcuchowa czwórnika z rys. 1 ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 Z_2 + R^2}{(Z_1 - R)Z_2 + R^2}; & \frac{Z_2 R^2}{(Z_1 - R)Z_2 + R^2} \\ \frac{Z_2}{(Z_1 - R)Z_2 + R^2}; & \frac{Z_1 Z_2 + R^2}{(Z_1 - R)Z_2 + R^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Impedancje charakterystyczne i współczynniki przenoszenia ( $\eta$ ) czwórnika określone są:

$$Z_{C_1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \quad \eta_{C_1} = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) \quad (3)$$

$$Z_{C_2} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}; \quad \eta_{C_2} = \ln(\sqrt{AD} - \sqrt{BC}) \quad (4)$$

W rozpatrywanym przypadku

$$Z_{C_1} = Z_{C_2} = R,$$

natomiast

$$\eta_{C_1} = \ln \frac{R^2 + Z_2(Z_1 + R)}{R^2 + Z_2(Z_1 - R)}$$

Ponieważ czwórnik z rys. 1 jest obciążony impedancją charakterystyczną, więc zachodzi:

$$K_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{Z_{C_2}=R} = e^{-\varphi C_1} = \frac{R^2 + Z_2(Z_1 - R)}{R^2 + Z_2(Z_1 + R)} \quad (5)$$

Jeżeli

$$Z_1 = \frac{1}{sC_1}; \quad Z_2 = \frac{1}{sC_2}.$$

to wówczas

$$K_U(s) = \frac{s^2 C_1 C_2 R^2 - RC_1 s + 1}{s^2 C_1 C_2 R^2 + RC_1 s + 1}, \quad (6)$$

natomiast

$$K_U(j\omega) = \frac{-j\omega C_1 R + 1 - \omega^2 C_1 C_2 R^2}{j\omega C_1 R + 1 - \omega^2 C_1 C_2 R^2} = 1e^{-j2\varphi(\omega)}, \quad (7)$$

gdzie:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega C_1 R}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R^2}.$$

Dla funkcji (7) dobreć bieguna i pulsacja, przy której  $2\varphi(\omega) = -\pi$ , dane są relacjami

$$Q = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}; \quad \omega_r = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{G}{\sqrt{C_1 C_2}}$$

Z relacji tych wynika, że można w prosty sposób zmieniać niezależnie  $Q$  i  $\omega_r$ , co ma duże znaczenie praktyczne.

#### WRAŻLIWOŚĆ

W przeprowadzonych rozważaniach określono wrażliwości  $S_{x_1}^Q$ ,  $S_{x_1}^{\omega_r}$ ,  $S_{x_1}^{K_U(j\omega)}$  w oparciu o klasyczną definicję wrażliwości [1], [4]

$$S_{x_1}^T = \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{x}{T} \quad (8)$$

1 otrzymano:

$$S_{C_1}^Q = -S_{C_2}^Q = \frac{1}{2}; \quad S_{C_1}^{\omega_r} = S_{C_2}^{\omega_r} = -\frac{1}{2}; \quad S_R^{\omega_r} = -1$$

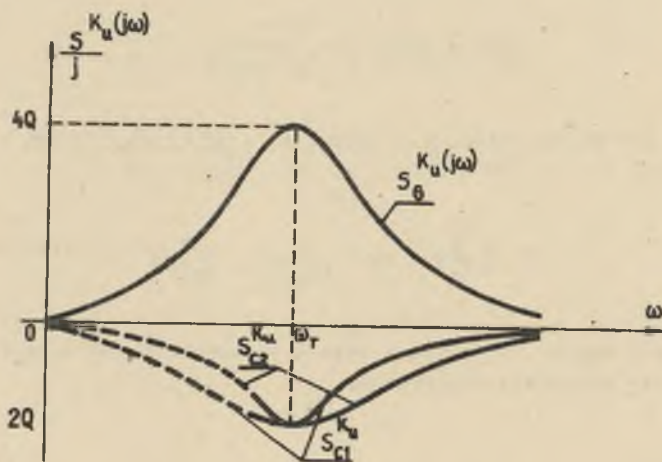
Natomiast wrażliwość funkcji przejścia dla  $s = j\omega$

$$S_{C_2}^{K_U(j\omega)} = -\frac{2j\omega^3 C_1^2 C_2 G}{(G^2 - \omega^2 C_1 C_2)^2 + (\omega C_1 G)^2}; \quad S_{C_2}^{K_U(j\omega_r)} = -2jQ$$

$$S_{C_1}^{K_U(j\omega)} = \frac{-2j\omega C_1 G^3}{(G^2 - \omega^2 C_1 C_2)^2 + (\omega C_1 G)^2}; \quad S_{C_1}^{K_U(j\omega_r)} = -2jQ$$

$$S_G^{K_U(j\omega)} = \frac{2j\omega C_1 G(G^2 + 2C_1 C_2)}{(G^2 - \omega^2 C_1 C_2)^2 + (\omega C_1 G)^2}; \quad S_G^{K_U(j\omega_r)} = 4jQ$$

Przebieg zmienności wrażliwości  $S_{x_1}^{K_U(j\omega)}$  podano na rys. 2.

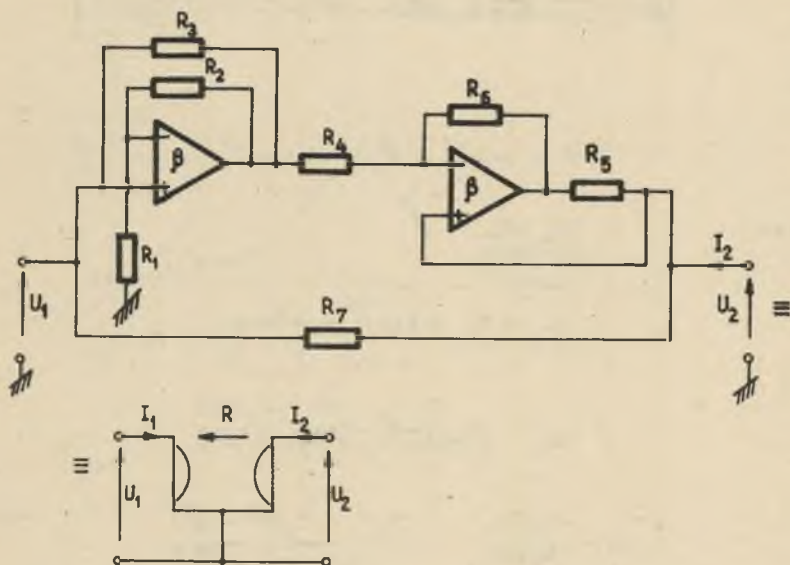


Rys. 2

Wrażliwości  $S_{x_1}^Q$ ;  $S_{x_1}^{\omega_r}$ ;  $S_{x_1}^{K_U(j\omega)}$  są porównywalne z wrażliwościami układów realizowanych za pomocą elementów RLC [5].

ANALIZA UKŁADU Z ŻYRATOREM RZECZYWISTYM

Do analizy przyjęto model żyratora przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3

Zakładając, że  $R_1 = R$ ,  $i \in (1, \dots, 7)$ , lecz  $\beta \neq \infty$ , wówczas macierz admitycyjna żyratora ma postać

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{4G}{2+\beta}; \\ \frac{\beta^2 - 4\beta - 4}{(2+\beta)^2} G; \frac{4G}{2+\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta; -G \\ G - \Delta g; \delta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie:

$$\delta = \frac{4G}{2+\beta} \approx \frac{4G}{\beta}; \quad \Delta g = \frac{8\beta + 8}{(2+\beta)^2} G \approx \frac{8G}{\beta} = 2\delta.$$

Macierz łańcuchowa układu z rys. 1 przy uwzględnieniu relacji (9) ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\delta + Y_2 + Z_1 |\Delta y|}{2\delta + Y_2 - G + Z_1 |\Delta y|}; & \frac{|\Delta z| |\Delta y|}{2\delta + Y_2 - G + Z_1 |\Delta y|} \\ \frac{|\Delta y|}{2\delta + Y_2 - G + Z_1 |\Delta y|}; & \frac{\delta + Y_2 + Z_1 |\Delta y|}{2\delta + Y_2 - G + Z_1 |\Delta y|} \end{bmatrix} \quad (10)$$

gdzie:

$$|\Delta y| = |\Delta z|^{-1} = G^2 \left(1 - \frac{8}{\beta}\right) = G^2 x^2$$

Natomiast:

$$z_{C_2} = z_{C_1} = \sqrt{|\Delta z|} = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{8}{\beta}}} \quad (11)$$

$$\eta_{C_1} = \ln \frac{\delta + Y_2 + Gx + Z_1 |\Delta y|}{2\delta + Y_2 - G + Z_1 |\Delta y|} \quad (12)$$

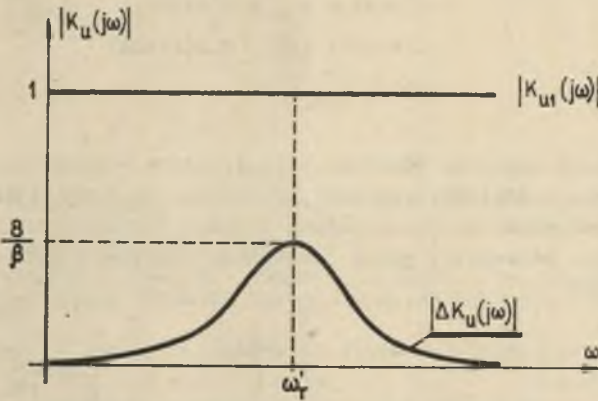
$$K_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{z_{C_2}} = \frac{Y_1 Y_2 - Y_1 G x^2 + G^2 x^2}{Y_1 Y_2 + Y_1 G + G^2 x^2} = \frac{Y_1 Y_2 - Y_1 G + G^2 x^2}{Y_1 Y_2 + Y_1 G + G^2 x^2} + \frac{8 Y_1 G}{\beta (Y_1 Y_2 + Y_1 G + G^2 x^2)} \quad (13)$$

Ponieważ  $Y_1 = sC_1$ ;  $Y_2 = sC_2$ , więc

$$K_U(s) = \frac{s^2 C_1 C_2 - G s C_1 + G^2 \left(1 - \frac{8}{\beta}\right)}{s^2 C_1 C_2 + G s C_1 + G^2 \left(1 - \frac{8}{\beta}\right)} + \frac{8 s C_1 G}{s^2 C_1 C_2 + G s C_1 + G^2 \left(1 - \frac{8}{\beta}\right)} = K_{U_1}(s) + \Delta K_U(s) \quad (14)$$

Funkcja  $K_U(s)$  jest superpozycją funkcji filtru wszechprzepustowego i filtru pasmowego (rys. 4).

Z relacji (14) wynika, że największe zniekształcenie modułu i fazy jest dla częstotliwości  $\omega_r' = \omega_r x$ . Przyjęcie  $\beta \neq \infty = \text{const}$  (niezależnego od częstotliwości) jest uzasadnione dla niskich częstotliwości. Dla wyższych częstotliwości należy przyjąć współczynnik wzmocnienia  $\beta(s)$  jako funkcję jednobiegunową



Rys. 4

$$\beta(s) = \frac{A_0}{s + \omega_0} \approx \frac{A}{s}$$

1 wówczas

$$K_u(s) = \frac{s^2 C_1 C_2 - (C_1 G - \frac{8G^2}{A})s + G^2}{s^2 C_1 C_2 + (C_1 G - \frac{8G^2}{A})s + G^2} + \frac{8Gs(sC_1 - 2G)}{A[s^2 C_1 C_2 + (C_1 G - \frac{8G^2}{A})s + G^2]}$$

$$= K_{u1}(s) + \Delta K_u(s) \tag{15}$$

Rozpatrując przypadek gdy  $\beta = \infty$ ; lecz oporniki wchodzące w skład zyratora z rys. 3 są dobierane z odpowiednią tolerancją, wówczas macierz admittancyjne zyratora ma postać:

$$Y = \begin{bmatrix} G_7 - \frac{G_1 G_3}{G_2} & -G_7 \\ -G_7 + \frac{G_4 G_5}{G_2 G_6} (G_1 + G_2); G_7 - \frac{G_4 G_5}{G_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Zakładając, że  $G_1 = G \pm \Delta G = G(1 \pm \epsilon)$  oraz biorąc pod uwagę najgorszy przypadek odchyień poszczególnych  $G_i$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 -4\epsilon G &\leq y_{11} < 4\epsilon G \\
 G(1-\epsilon) &\leq y_{12} \leq G(1+\epsilon) \\
 G(1-11\epsilon) &\leq y_{21} \leq G(1+10\epsilon) \\
 -4\epsilon G &\leq y_{22} \leq 4\epsilon G
 \end{aligned}$$

Wpływ na własności macierzy admitancyjnej zyratora wynika z doboru rezystancji z określoną dokładnością przy założeniu, że wzmacniacze operacyjne są idealne przedstawiono szczegółowo w pracy [2].

Przyjmując np. maksymalną górną odchyłkę, wówczas macierz zyratora przyjmuje postać:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4\epsilon G; & -G(1+\epsilon) \\ G(1+10\epsilon); & 4\epsilon G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sigma; & -G-\sigma \\ G+10\sigma; & 4\sigma \end{bmatrix} \quad (17)$$

i wówczas:

$$K_U(s) = \frac{s^2(C_1 C_2 + \frac{17C_1 C_2 \sigma}{2G}) - [(G + 10\sigma)C_1 + 17\sigma C_2]s + G^2 + 11\sigma G}{s^2(C_1 C_2 + \frac{17C_1 C_2 \sigma}{2G}) + [(G + 10\sigma)C_1 + 17\sigma C_2]s + G^2 + 11\sigma G}$$

M

$$- \frac{\sigma C_2 (17C_1 s^2 - 64Gs)}{2GH} = K_{U1}(s) + \Delta K_U(s) \quad (18)$$

$$\omega_r'' = \omega_r \sqrt{\frac{2G + 22\sigma}{2G + 17\sigma}} \quad (19)$$

Z relacji (14), (15), (18) wynika, że we wszystkich przypadkach następuje nałożenie na charakterystykę idealnego wszechprzepustowego filtra dodatkowej charakterystyki  $\Delta K_U(j\omega)$ , której wpływ uwidoczni się najsilniej dla pulsacji  $\omega_r''$ .

#### ZAKOŃCZENIE

Na podstawie przedstawionych wyników można oszacować wpływ poszczególnych założeń upraszczających przy projektowaniu opisanych filtrów, w zależności od zakresu częstotliwości roboczej posiadanych elementów i ich dokładności. Uwzględnienie wszystkich założeń jednocześnie prowadziłoby



do wyników nieprzejrzystych, co uniemożliwiłoby podanie końcowych wyników w zwięzłej postaci.

## LITERATURA

- [1] Białko M. i inni: Filtry aktywne RC, WNT Warszawa 1979.
- [2] Garczarczyk Z.: Własności niektórych żyratorów realizowanych za pomocą dwóch wzmacniaczy operacyjnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 60, 1978.
- [3] Garczarczyk Z.; Pasko M.: Realizacja korektorów fazowych przy zastosowaniu żyratora. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 46, 1975.
- [4] Huelaman L.P.: Theory and Design of Active RC Circuits. Mc Graw-Hill, New York 1968.
- [5] Pasko M.: Realizacja aktywnego korektora fazy drugiego rzędu ze stratną indukcyjnością. Materiały IV Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Ustroń 1980.

Wpłynęło do redakcji 10 V 1981 r.

Recenzent: doc. dr inż. Stanisław Bolkowski

## ВСЕПОЛОСОВОЙ ФИЛЬТР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕАЛЬНОГО ГИРАТОРА

## Р е з ю м е

В статье рассмотрено влияние реального гиратора на характеристику всеполосового фильтра второго порядка. Рассмотрена тоже чувствительность  $S_{x_1}^Q$ ,  $S_{\omega_r}^{(K_U(j\omega))}$ ,  $S_{x_1}$  этого фильтра.

## THE ALLPASS FILTER WITH THE USE OF THE REAL GYRATOR

## S u m m a r y

The influence of the real gyrator on the characteristic of the second order allpass filter was shown.

The sensitivities  $S_{x_1}^Q$ ;  $S_{\omega_r}^{K_U(j\omega)}$ ;  $S_{x_1}$  of the allpass filter with ideal gyrator were also concerned.