ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: ELEKTRYKA z. 79 Nr kol. 713

Ewa SOWA

Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki Politechniki Śląskiej

WPŁYW ODKSZTAŁCEŃ PRZEBIEGÓW NAPIĘCIA I PRĄDU NA PRACĘ UKŁADU ELEKTRYCZNEGO

Streszczenie. Przedstawiono wpływ przebiegów odkształcenia na różne rodzaje mocy pobierane przez obciążenie w wybranym węźle układu elektrycznego oraz na wielkość współczynnika mocy. Wyprowadzono odpowiednie relacje dla funkcji korelacyjnych i powiązano je z wartościami skutecznymi przebiegów i poszczególnymi mocami.

Rozważmy przebiegi napięcia $u_k(t)$ i prądu $i_k(t)$ w pewnym k-tym węźle układu elektrycznego, dowolne lecz o skończonej mocy.

$u_o(t)$ i $i_o(t)$ niech będą przebiegami odniesienia takimi, jakie pożądane są w k-tym węźle (również o skończonej mocy) oraz związane ze sobą zależnością:

$$u_o(t) = z\, i_o(t), \tag{1}$$

gdzie:

z = constans.

Przebieg $u_k(t)$ rozłóżmy na dwa ortogonalne składniki:

$$u_k(t) = \lambda_k\, u_o(t) + u_{\phi k}(t), \tag{2}$$

gdzie:

λ_k – pewna stała,

$u_{\phi k}(t)$ – jest przebiegiem odkształcenia napięcia w k-tym węźle od przebiegu odniesienia.

Zakładamy zatem, że:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_o(t)\, u_{\phi k}(t)dt = 0 \tag{3}$$

Wyznaczając funkcję korelacji wzajemnej przebiegów $u_k(t)$ oraz $u_o(t)$ otrzymamy:

$$\varphi_{ko}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_k(t)u_o(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big[\lambda_k u_o(t) +$$

$$+ u_{\phi k}(t)\Big] u_o(t-\tau)dt =$$

$$= \lambda_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_o(t)\, u_o(t-\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_{\phi k}(t)\, u_o(t-\tau)dt =$$

$$= \lambda_k\, \varphi_o(\tau) + \varphi_{\phi ko}(\tau) \tag{4}$$

$\varphi_o(\tau)$ - jest autokorelacją napięcia odniesienia $u_o(t)$,
$\varphi_{\phi ko}(\tau)$ - jest korelacją wzajemną przebiegów: odkształcenia napięcia i odniesienia.

Dla $\tau = 0$ (uwzględniając (3)) zachodzi:

$$\varphi_{ko}(0) = \lambda_k\, \varphi_o(0) + \varphi_{\phi ko}(0) = \lambda_k\, \varphi_o(0) \tag{5}$$

Ponieważ:

$$\varphi_o(0) = U_o^2 \tag{6}$$

(U_o - wartość skuteczna przebiegu $u_o(t)$)
więc:

$$\lambda_k = \frac{\varphi_{ko}(0)}{\varphi_o(0)} = \frac{\varphi_{ko}(0)}{U_o^2} \tag{7}$$

oraz:

$$u_k(t) = \frac{\varphi_{ko}(0)}{U_o^2}\, u_o(t) + u_{\phi k}(t)$$

Postępując analogicznie względem przebiegu prądu $i_k(t)$ mamy:

$$i_k(t) = \varkappa_k\, i_o(t) + i_{\phi k}(t), \tag{9}$$

gdzie:
$\varkappa_k$ = constans,

$i_{\psi k}(t)$ - jest przebiegiem odkształcenia prądu w k-tym węźle układu od przebiegu odniesienia.

Zachodzi:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T i_o(t)\, i_{\psi k}(t)dt = 0 \tag{10}$$

Dla korelacji wzajernej przebiegów $i_k(t)$ oraz $i_o(t)$ otrzymamy:

$$\partial_{ko}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T i_k(t)\, i_o(t-\tau)dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[\varkappa_k\, i_o(t) + i_{\psi k}(t)\right] i_o(t-\tau)dt =$$

$$= \varkappa_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T i_o(t)\, i_o(t-\tau)dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T i_{\psi k}(t)\, i_o(t-\tau)dt =$$

$$= \varkappa_k\, \partial_o(\tau) + \partial_{\psi ko}(\tau) \tag{11}$$

$\partial_o(\tau)$ - jest autokorelacją prądu odniesienia $i_o(t)$.
$\partial_{\psi ko}(\tau)$ - jest korelacją wzajemną przebiegów: odkształcenia prądu i odniesienia.

Dla $\tau = 0$, (uwzględniając (10)) zachodzi:

$$\delta_{ko}(0) = \varkappa_k\, \delta_o(0) + \delta_{\psi ko}(0) = \varkappa_k \delta_o(0) \tag{12}$$

Ponieważ:

$$\delta_o(0) = I_o^2 \tag{13}$$

(I_o - wartość skuteczna przebiegu $i_o(t)$),
więc

$$\varkappa_k = \frac{\partial_{ko}(0)}{\partial_o(0)} = \frac{\partial_{ko}(0)}{I_o^2} \tag{14}$$

i stąd:

$$i_k(t) = \frac{\partial_{ko}(0)}{I_o^2}\, i_o(t) + i_{\psi k}(t) \tag{15}$$

Ze względu na (3) oraz (10) dla wartości skutecznych przebiegów zachodzi:

$$U_k^2 = \lambda_k^2 U_o^2 + U_{\psi k}^2 = U_o^2\left[\lambda_k^2 + \left(\frac{U_{\psi k}}{U_o}\right)^2\right] = U_o^2\left[\lambda_k^2 + f_k^2\right] \tag{16}$$

f_k nazwiemy współczynnikiem odkształcenia napięcia $u_k(t)$ od napięcia odniesienia $u_o(t)$ oraz:

$$I_k^2 = \varkappa_k^2 I_o^2 + I_{\psi k}^2 = I_o^2\left[\varkappa_k + \left(\frac{I_{\psi k}}{I_o}\right)^2\right] = I_o^2\left[\varkappa_k + g_k^2\right] \tag{17}$$

g_k nazwiemy współczynnikiem odkształcenia prądu $i_k(t)$ od prądu odniesienia $i_o(t)$.

Dla skompensowanych przebiegów odkształceń ($U_{\psi k} = 0$, $I_{\psi k} = 0$) otrzymamy:

$$U_k = \lambda_k U_o, \quad I_k = \varkappa_k I_o, \tag{18}$$

czyli

$$U_k = \frac{\varphi_{ko}(0)}{U_o^2}\, U_o = \frac{\varphi_{ko}(0)}{U_o}$$

i

$$I_k = \frac{\delta_{ko}(0)}{I_o^2}\, I_o = \frac{\delta_{ko}(0)}{I_o} \tag{19}$$

Rozważmy obecnie korelację wzajemną przebiegów napięcia i prądu w k-tym węźle układu elektrycznego. Mamy:

$$\vartheta_k(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_k(t)\, i_k(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \Big[\lambda_k\, u_o(t) +$$

$$+ u_{\psi k}(t)\Big]\Big[\varkappa_k\, i_o(t-\tau) + i_{\psi k}(t-\tau)\Big]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \lambda_k \varkappa_k\, u_o(t)\, i_o(t-\tau)dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \lambda_k\, u_o(t)\, i_{\psi k}(t-\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_{\psi k}(t)\,.$$

$$\varkappa_k\, i_o(t-\tau)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_{\psi k}(t)\, i_{\psi k}(t-\tau)dt$$

$$\vartheta_k(\tau) = \lambda_k \varkappa_k\, \vartheta_o(\tau) + \lambda_k \vartheta_{o\psi k}(\tau) + \varkappa_k \vartheta_{\psi ko}(\tau) + \vartheta_{\psi k}(\tau) \tag{20}$$

$\vartheta_o(\tau)$ - jest korelacją wzajemną przebiegów odniesienia.
$\vartheta_{o\psi k}(\tau)$ - korelacja wzajemna przebiegów $u_o(t)$ i $i_{\psi k}(t)$,
$\vartheta_{\psi ko}(\tau)$ - korelacja wzajemna przebiegów $u_{\psi k}(t)$ i $i_o(t)$.
$\vartheta_{\psi k}(\tau)$ - korelacja wzajemna przebiegów odkształceń $u_{\psi k}(t)$ i $i_{\psi k}(t)$.

Wykorzystując związki (1), (3) i (10) zachodzi:

$$\vartheta_{o\psi k}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T z\, i_o(t)\, i_{\psi k}(t)dt = 0 \tag{21}$$

oraz

$$\vartheta_{\psi ko}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_{\psi k}(t)\, \frac{1}{z}\, u_o(t)dt = 0$$

a równanie (20) przyjmie postać:

$$\vartheta_k(0) = \lambda_k \varkappa_k\, \vartheta_o(0) + \vartheta_{\psi k}(0) \tag{22}$$

i ma istotne znaczenie, ponieważ (jak łatwo pokazać):

$$\vartheta_k(0) = P_k. \tag{23}$$

P_k jest mocą czynną pobieraną przez obciążenie w k-tym węźle układu elektrycznego.
Równanie (22) określa zatem wielkość tej mocy.
Stąd:

$$P_k = \lambda_k \varkappa_k P_o + P_{\psi k} \tag{24}$$

P_o jest mocą czynną przebiegów odniesienia $u_o(t)$ i $i_o(t)$ $P_{\psi k}$ nazwiemy mocą czynną związaną wyłącznie z przebiegami odkształcenia $u_{\psi k}(t)$ i $i_{\psi k}(t)$.

Wyznaczmy moc bierną pobieraną przez obciążenie w wybranym k-tym węźle układu oraz wpływ przebiegów odkształceń na jej wielkość.

$$Q_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_k(t)H\left\{i_k(t)\right\}dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[\lambda_k u_o(t) + u_{\phi k}(t)\right] H\left\{\varkappa_k i_o(t) + i_{\phi k}(t)\right\}dt =$$

$$= \lambda_k \varkappa_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_o(t) H\left\{i_o(t)\right\}dt + \lambda_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_o(t) \cdot H\left\{i_{\phi k}(t)\right\}dt + \varkappa_k \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_{\phi k}(t) H\left\{i_o(t)\right\}dt +$$

$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u_{\phi k}(t) H\left\{i_{\phi k}(t)\right\}dt$$

$$Q_k = \lambda_k \varkappa_k Q_o + \lambda_k Q_{o\phi k} + \varkappa_k Q_{\phi ko} + Q_{\phi k} \tag{25}$$

Q_o - jest mocą bierną przebiegów odniesienia $u_o(t)$ i $i_o(t)$,
$Q_{\phi k}$ - nazwiemy mocą bierną przebiegów odkształceń $u_{\phi k}(t)$, $i_{\phi k}(t)$,
$Q_{o\phi k}$ - moc bierna przebiegów $u_o(t)$ i $i_{\phi k}(t)$,
$Q_{\phi ko}$ - moc bierna przebiegów $u_{\phi k}(t)$ oraz $i_o(t)$.
Jeśli przebiegi odniesienia są takie, że zachodzi związek (1), to:

$$Q_o = 0$$

oraz równanie (25) przyjmuje postać:

$$Q_k = \lambda_k Q_{o\phi k} + \varkappa_k Q_{\phi ko} + Q_{\phi k}. \tag{26}$$

Dla mocy modułowej uzyskujemy:

$$P_{mk} = U_k I_k = U_o\sqrt{\lambda_k^2 + f_k^2} \cdot I_o\sqrt{\varkappa_k^2 + g_k^2} =$$

$$= P_{mo}\sqrt{(\lambda_k^2 + f_k^2)(\varkappa_k^2 + g_k^2)} \tag{27}$$

Moc dystorsji w rozpatrywanym węźle:

$$D_k^2 = P_{mk}^2 - P_k^2 = P_{mo}^2(\lambda_k^2 + f_k^2)(\varkappa_k^2 + g_k^2) - (\lambda_k\varkappa_k P_o + P_{\psi k})^2 =$$

$$= \lambda_k^2\varkappa_k^2(P_{mo}^2 - P_o^2) + P_{mo}^2(\lambda_k^2 g_k^2 + f_k^2\varkappa_k^2 + f_k^2 g_k^2) - 2\lambda_k\varkappa_k P_o P_{\psi k} - P_{\psi k}^2 =$$

$$= \lambda_k^2\varkappa_k^2 D_o^2 + P_{mo}^2(\lambda_k^2 g_k^2 + f_k^2\varkappa_k^2 + f_k^2 g_k^2) - 2\lambda_k\varkappa_k P_o P_{\psi k} - P_{\psi k}^2 \qquad (28)$$

Dla założonych przebiegów odniesienia (1) zachodzi:

$$D_o = 0$$

więc:

$$D_k^2 = P_{mo}^2(\lambda_k^2 g_k^2 + f_k^2\varkappa_k^2 + f_k g_k^2) - 2\lambda_k\varkappa_k P_o P_{\psi k} - P_{\psi k}^2 \qquad (29)$$

Współczynnik mocy w k-tym węźle wynosi:

$$m = \frac{P_k}{P_{mk}} = \frac{\lambda_k\varkappa_k P_o - P_{\psi k}}{P_{mo}\sqrt{(\lambda_k^2 + f_k^2)(\varkappa_k^2 + g_k^2)}} =$$

$$= \frac{\lambda_k\varkappa_k}{\sqrt{(\lambda_k^2 + f_k^2)(\varkappa_k^2 + g_k^2)}}\, m_o + \frac{P_{\psi k}}{P_{mo}\sqrt{(\lambda_k^2 + f_k^2)(\varkappa_k^2 + g_k^2)}} \qquad (30)$$

Uwzględniając (1) mamy:

$$m_o = \frac{P_o}{P_{mo}} = 1$$

W przypadku gdy odkształconym od przebiegu odniesienia jest tylko przebieg prądu ($f_k = 0$) oraz zachodzi związek (1), otrzymujemy dla poszczególnych mocy:

$$P_{mk} = P_{mo}\lambda_k\sqrt{\varkappa_k^2 + g_k^2}$$

$$P_k = \lambda_k\varkappa_k P_o \qquad (31)$$

$$Q_k = \lambda_k Q_{o\psi k}$$

$$D_k = \lambda_k g_k P_{mo}$$

i współczynnika mocy:

$$m = \frac{\varkappa_k}{\sqrt{\varkappa_k^2 + g_k^2}} \tag{32}$$

Równania (22) - (30) przedstawiają wpływ przebiegów odkształcenia $u_{\phi k}(t)$ i $i_{\phi k}(t)$ na poszczególne moce w wybranym węźle układu oraz na wielkość współczynnika mocy.

Przykładowo, niech przebiegi w k-tym węźle układu będą:

$$u_k(t) = \sqrt{2}(U_1\cos\omega_1 t + U_3\cos\omega_3 t) \quad [V]$$

$$i_k(t) = \sqrt{2}\left[I_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + I_3\cos(\omega_3 t - \varphi_3)\right] \quad [A]$$

oraz przebiegi odniesienia:

$$u_o(t) = \sqrt{2}U_o\cos\omega_1 t \ \ldots\ [V], \qquad i_o(t) = \sqrt{2}I_o\cos\omega_1 t \ \ldots\ [A]$$

$$\varphi_{ko}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T u_k(t)\, u_o(t)dt = U_oU_1$$

$$\lambda_k = \frac{U_1}{U_o}, \qquad f_k = \frac{U_3}{U_o}$$

$$u_{\phi k}(t) = \sqrt{2}U_3\cos\omega_3 t \ \ldots \quad [V]$$

$$\delta_{ko}(0) = I_oI_1\cos\varphi_1, \qquad \varkappa_k = \frac{I_1}{I_o}\cos\varphi_1$$

$$i_{\phi k}(t) = \sqrt{2}\left[I_1\sin\varphi_1\sin\omega_1 t + I_3\cos(\omega_3 t - \varphi_3)\right] \ \ldots\ [A]$$

$$g_k = \frac{\sqrt{I_1^2\sin^2\varphi_1 + I_3^2}}{I_o}$$

Poszczególne moce wynoszą:

$$P_o = P_{mo} = U_oI_o$$

$$P_{\psi k} = \vartheta_{\psi k}(0) = U_3 I_3 \cos\varphi_3$$

$$P_k = \vartheta_k(0) = \frac{U_1}{U_o} \cdot \frac{I_1}{I_o} \cos\varphi_1 U_o I_o + U_2 I_3 \cos\varphi_3$$

$$Q_{o\psi k} = U_o I_1 \sin\varphi_1, \quad Q_{\psi ko} = 0, \quad Q_{\psi k} = U_3 I_3 \sin\varphi_3$$

$$Q_k = \frac{U_1}{U_o} U_o I_1 \sin\varphi_1 + U_3 I_3 \sin\varphi_3$$

$$P_{mk} = P_{mo}\sqrt{(\lambda_k^2 + f_k^2)(\varkappa_k^2 + g_k^2)}$$

Dla mocy dystorsji uzyskamy:

$$D_k^2 = (U_1 I_1 \sin\varphi_1)^2 + (U_3 I_3 \sin\varphi_3)^2 + U_3^2 I_1^2 +$$

$$+ U_1^2 I_3^2 - 2U_1 I_2 \cos\varphi_1 U_3 I_3 \cos\varphi_3$$

LITERATURA

[1] Nowomiejski Z., Sowa E.: Teoria mocy układów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka 49, 1977.

[2] Nowomiejski Z.: Ocena odkształceń przebiegów i ich wpływ na pracę systemu elektroenergetycznego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka 60, 1978.

Wpłynęło do redakcji 24 IV 1981 r.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПРОБЕГОВ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА
НА РАБОТУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе представлено влияние деформации пробегов на разные виды потребляемой мощности выбранным узлом электрической системы, а также на величину коэффициента мощности. Выведены соответственные отношения для корреляционных функций и установлена их связь с действующими значениями пробегов и отдельными мощностями.

THE EFFECT OF THE VOLTAGE AND CURRENT DISTORTIONS
ON THE ELECTRIC NETWORK

S u m m a r y

This paper presents the effect of the distortion signals on the different kinds of powers on the terminals of the electric network and on the power factor value.

The relations for the correlation functions were shown and connected with the r.m.s values of the signals as well as with the particular powers.