ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1982

Seria: ELEKTRYKA z. 79 Nr kol. 713

Bernard BARON

Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

SYNTEZA SCHEMATU ZASTĘPCZEGO CEWKI ZAWIERAJĄCEJ WALEC PRZEWODZĄCY O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI W SZCZELINIE OBWODU MAGNETYCZNEGO

Streszczenie. W pracy wyznaczono rozkład pola magnetycznego wewnątrz krótkiego walca przewodzącego, umieszczonego w szczelinie obwodu magnetycznego cewki. Określono impedancję operatorową cewki przeprowadzając równocześnie syntezę jej schematu zastępczego w klasie elementów skupionych typu RL.

1. WSTĘP

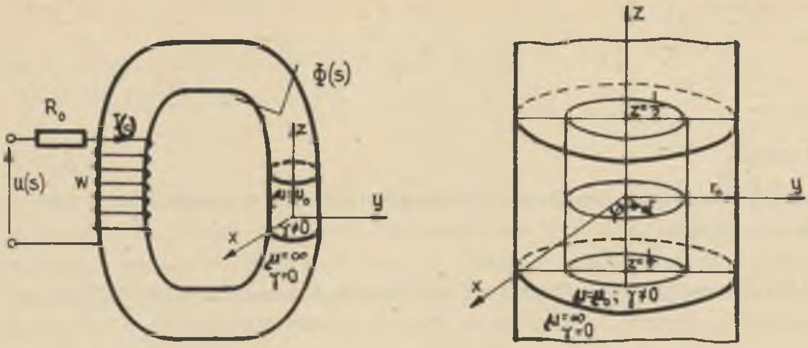
Znajomość zmian impedancji w przewodach wiodących prąd zmienny jest bardzo istotna ze względów technicznych. Dlatego też dla większości stosowanych układów opracowano metody obliczeniowe oraz podano wzory umożliwiające określenie w stanie ustalonym, przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym, zmian rezystancji R i indukcyjności L.

W stanach nieustalonych parametry R i L są funkcją czasu zależną od wymuszenia. Problem określenia zmian tych parametrów dla przewodu walcowego [4],[6] linii dwuprzewodowej [8] oraz w żłobkach maszyn indukcyjnych [9] został rozwiązany przez wprowadzenie schematów zastępczych, będących modelami impedancji układu. W pracy [5] przeprowadzona natomiast została synteza modelu RL odpowiadającego zmianom impedancji cewki kulistej z umieszczoną wewnątrz kulą przewodzącą.

W przedstawionej pracy przeprowadzona została synteza schematu zastępczego cewki zawierającej walec przewodzący w szczelinie obwodu magnetycznego. Zmiany impedancji związane są z indukowanymi prądami wirowymi w walcu pod wpływem wymuszonego przepływu strumienia magnetycznego w rozpatrywanym obwodzie magnetycznym cewki.

2. POLE MAGNETYCZNE UKŁADU

W szczelinie obwodu magnetycznego cewki (rys. 1) znajduje się walec przewodzący o konduktywności γ oraz przenikalności magnetycznej $\mu = \mu_0$. Promień walca wynosi r_0, natomiast jego długość odpowiadająca równocześ-



Rys. 1. Walec przewodzący o promieniu r_o i długości l w szczelinie obwodu magnetycznego cewki o w zwojach

nie długości szczeliny obwodu magnetycznego wynosi l. Przenikalność ferromagnetyka, z którego wykonany jest obwód magnetyczny przyjęto jako nieskończenie duża ($\mu = \infty$), natomiast jego konduktywność założono jako zerową ($\gamma = 0$). Przy tym założeniu dla impedancji operatorowej cewki decydujące znaczenie będą miały efekty zjawiska dyfuzji pola magnetycznego do walca przewodzącego umieszczonego w szczelinie obwodu magnetycznego, wymuszonego pod wpływem przepływu wI(s). Wystarczy więc ograniczyć analizę pola magnetycznego do walca przewodzącego. Ze względu na symetrię układu pole magnetyczne wewnątrz walca przewodzącego można opisać potencjałem wektorowym zależnym tylko od zmiennych (r, z) oraz czasu t. Potencjał ten spełnia przy pominięciu prądu przesunięcia następujące równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \mu_o \gamma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

Działając operatorem Laplace'a $\mathcal{L}\{\ \}$ na prawą i lewą stronę równania (1) otrzymuje się równanie Helmholtza w postaci

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} - s\mu_o\gamma A_\varphi + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

gdzie:

$$A_\varphi(r,z,s) = \mathcal{L}\left\{A_\varphi(r,z,t)\right\}$$

W dalszych rozważaniach zakłada się, że dla $r = r_o$ potencjał wektorowy A_φ jest niezależny od zmiennej z i wynosi

$$A_{\varphi}(r_o,z,s) = \frac{\Phi(s)}{2\pi r_o}, \tag{3}$$

gdzie $\Phi(s)$ jest transformatą Laplace'a głównego strumienia magnetycznego $\Phi(t)$ wymuszonego w obwodzie magnetycznym cewki pod wpływem przepływu $wi(t)$.
Przyjęcie warunku brzegowego (3) do rozwiązania równania (2) oznacza równocześnie pominięcie strumienia rozproszenia, który będzie tym mniejszy, im mniejszy będzie stosunek l/r_o. Inaczej mówiąc: całkowity strumień główny obwodu magnetycznego cewki przepływa również przez walec przewodzący. Dla $z = \pm\frac{l}{2}$ warunek brzegowy rozpatrywanego zagadnienia bazować będzie na ciągłości pola elektrycznego $E_{\varphi}(r,z,s) = -sA_{\varphi}(r,z,s)$, a tym samym potencjału wektorowego A_{φ} oraz na niezależność indukcji

$$B_z(r,z,s)\Big|_{z=\pm\frac{l}{2}} = \frac{\Phi(s)}{\pi r_o^2}$$

od zmiennej r, co wynika z założenia nieskończenie dużej przenikalności magnetycznej ($\mu = \infty$) ferromagnetyka stykającego się z walcem przewodzącym (rys. 1). Wynika z tego, że warunek brzegowy dla potencjału A spełniający równanie (2) dla $z = \pm\frac{l}{2}$ wynosi

$$A_{\varphi}\left(r, \pm\frac{l}{2}, s\right) = \frac{\Phi(s)}{\pi r_o^2}\cdot\frac{r}{2} \tag{4}$$

W celu powiązanie strumienia magnetycznego $\Phi(s)$ występującego w warunkach brzegowych (3) i (4) rozpatrywanego zagadnienia z prądem cewki $I(s)$ wystarczy skorzystać z prawa przepływu. Istotnie pomijając spadek napięcia magnetycznego w ferromagnetyku ($\mu = \infty$) otrzymuje się

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} H_z(r_o,z,s)dz = wI(s), \tag{5}$$

gdzie

$$H_z(r,z,s) = \frac{1}{\mu_o}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rA_{\varphi})}{\partial r}. \tag{6}$$

Ogólne rozwiązanie równania (2) można uzyskać tworząc superpozycję rozwiązań elementarnych (por. [10])

$$A_\varphi(r,z,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1\left(\sqrt{-\lambda_n^2 - s\mu_0\gamma}\,r\right)\cos\lambda_n z + c_n J_1(\vartheta_n r)\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\vartheta_n^2 + s\mu_0\gamma}\,z\right) \tag{7}$$

gdzie:

J_1 - funkcja Bessela rzędu pierwszego.

W celu spełnienia warunków brzegowych (3) i (4) należy dobrać ciąg wartości λ_n i ϑ_n, tak aby

$$\cos\lambda_n\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0; \quad J_1(\vartheta_n r_o) = 0 \tag{8}$$

Otrzymuje się

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l} \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{9}$$

$$\vartheta_n = \frac{x_n}{r_o} \tag{10}$$

gdzie:

x_n - zera funkcji Bessela rzędu pierwszego ($J_1(x_n) = 0$; $x_n \neq 0$).

Uwzględniając warunek brzegowy (3) oraz ciąg wartości (9) i (10) w rozwiązaniu ogólnym otrzymuje się

$$A_\varphi(r_o,z,s) = \frac{\Phi(s)}{2\pi r_o} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}\,r\right)\times$$

$$\times \cos\frac{(2n-1)\pi}{l} z = \sum_{n=1} a'_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{l} z \tag{11}$$

Współczynniki a'_n otrzymuje się z rozwinięcia funkcji $A_\varphi(r_o,z,s) = \frac{\Phi(s)}{2\pi r_o}$ w przedziale $-\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$ w szereg Fouriera

$$a'_n = \frac{2}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\Phi(s)}{2\pi r_o}\cos\frac{(2n-1)\pi}{l} z\,dz = \Phi(s)\,\frac{(-1)^{n-1}2}{(2n-1)\pi^2 r_o} \tag{12}$$

Na mocy równań (11) i (12) współczynniki a_n przyjmą postać

$$a_n = \Phi(s)\frac{(-1)^{n-1}\,2}{(2n-1)\pi^2 r_o J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_o\gamma}\, r_o\right)} \tag{13}$$

Uwzględniając z kolei warunek brzegowy (4) oraz ciąg wartości (9) i (10) w rozwiązaniu ogólnym (7) otrzymuje się

$$A_\varphi\left(r, \pm\frac{l}{2}, s\right) = \frac{\Phi(s)}{2\pi r_o^2}\, r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1\left(\frac{x_n}{r_o} r\right) \mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma}\,\frac{l}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c'_n J_1\left(\frac{x_n}{r_o} r\right), \tag{14}$$

gdzie współczynniki c'_n można wyznaczyć rozwijając funkcję $\frac{\Phi(s)}{2\pi r_o^2} r$ w szereg Fouriera-Bessela w przedziale $0 \leqslant r \leqslant r_o$. Zachodzi [7]

$$c'_n = \frac{2}{r_o^2\left[J_2(x_n)\right]^2}\int_0^{r_o} \frac{\Phi(s)}{2\pi r_o^2}\, r^2 J_1\left(\frac{x_n}{r_o} r\right) dr \tag{15}$$

Dokonując dla całkowania (15) podstawienia $u = \frac{x_n}{r_o} r$ oraz korzystając z związków całkowych dla funkcji Bessela [1]

$$\int u^2 J_1(u)\,du = u^2 J_2(u)$$

otrzymuje się

$$c'_n = \frac{\Phi(s)}{\pi r_o x_n J_2(x_n)} \tag{16}$$

Na mocy równań (14) i (16) współczynniki c_n przyjmą postać

$$c_n = \frac{\Phi(s)}{\pi r_o x_n J_2(x_n)\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma}\,\frac{l}{2}\right)} \tag{17}$$

Podstawiając współczynniki (13) i (17) do rozwiązania ogólnego (7) równania Hemholtza (2) otrzymuje się

$$A_{\varphi}(r,z,s) = \Phi(s)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}\,2}{(2n-1)\pi^2 r_o}\cdot\frac{J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_o\gamma}\; r\right)}{J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_o\gamma}\; r_o\right)}\right.$$

$$\left.\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}z + \frac{1}{\pi r_o x_n}\cdot\frac{J_1\left(\frac{x_n}{r_o}r\right)}{J_2(x_n)}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma}\; z\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma}\;\frac{l}{2}\right)}\right] \tag{18}$$

W celu określenia związku między strumieniem magnetycznym $\Phi(s)$ a prądem $I(p)$ cewki należy skorzystać z warunku (5) dla składowej H_z pola magnetycznego określonego wzorem (6). Podstawiając rozwiązanie na potencjał wektorowy o składowej A_{φ} danej wzorem (18) do wzoru (6) oraz uwzględniając własność funkcji Bessela [1]

$$\frac{dJ_1(u)}{du} + \frac{J_1(u)}{u} = J_o(u)$$

otrzymuje się następujący wzór na składową H_z pola magnetycznego

$$H_z(r,z,s) = \frac{1}{\mu_o}\Phi(s)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}\,2\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_o\gamma}}{(2n-1)\pi^2 r_o J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_o\gamma}\; r\right)}\right.$$

$$J_o\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_o\gamma}\; r\right)\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}z +$$

$$\left. + \frac{J_o\left(\frac{x_n}{r_o}r\right)}{\pi r_o^2 J_2(x_n)}\cdot\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma}\; z\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma}\;\frac{l}{2}\right)}\right] \tag{19}$$

Stosując wzór (19) w warunku brzegowym (5) otrzymuje się następującą relację między transformatą Laplace'a prądu $I(p)$ i strumienia magnetycznego $\Phi(s)$ cewki

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} H_z(r_o,z,s)dz = \frac{1}{\mu_o}\Phi(s)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4l\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}-s\mu_o\gamma}}{(2n-1)^2\pi^3 r_o}\right.$$

$$\frac{J_o\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}-s\mu_o\gamma}\, r_o\right)}{J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}-s\mu_o\gamma}\, r_o\right)} - \frac{2}{\pi r_o^2\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2+s\mu_o\gamma}}$$

$$\left.\operatorname{tg}\left(\sqrt{\left(\frac{x_n}{r_o}\right)^2+s\mu_o\gamma}\ \frac{l}{2}\right)\right] = wI(p) \qquad (20)$$

3. IMPEDANCJA CEWKI

Całkowita impedancja cewki określona jest jako

$$Z(s) = R_o + sL_r + Z_1(s), \qquad (21)$$

gdzie:

R_o - rezystancja przy prądzie stałym,

L_r - indukcyjność rozproszenia,

$Z_1(s)$ - impedancja związana ze strumieniem głównym Φ (s) obwodu magnetycznego.

Impedancję $Z_1(s)$ można wyrazić wzorem

$$Z_1(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{ws\Phi(s)}{I(s)}. \qquad (22)$$

W dalszych rozważaniach wygodniej będzie syntetyzować admitancję $Y_1(s)$ związaną ze strumieniem głównym Φ (s) cewki daną wzorem

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{I(s)}{ws\Phi(s)}. \qquad (23)$$

Uwzględniając relację między prądem $I(s)$ a strumieniem Φ (s) daną wzorem (20) we wzorze (23) otrzymuje się

$$Y_1(s) = \frac{1}{w^2\mu_0 s}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}}{(2n-1)^2\pi^3 r_0}\,\frac{J_0\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}\,r_0\right)}{J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}\,r_0\right)} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi r_0^2\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + s\mu_0\gamma}}\,\frac{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + s\mu_0\gamma}\,\frac{l}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + s\mu_0\gamma}\,\frac{l}{2}\right)}\right] \tag{24}$$

Wzór (24) na admitancję będzie podstawą syntezy schematu zastępczego cewki z walcem przewodzącym w szczelinie jej obwodu magnetycznego. W tym celu należy zbadać zachowanie się funkcji $Y_1(s)$ danej wzorem (24) na płaszczyźnie zespolonej "s".

W pierwszej kolejności należy zauważyć, że admitancja $Y_1(s)$ posiada biegun w zerze ($s = 0$). Pozostałość tej funkcji w tym biegunie wynosi

$$\alpha_0 = \lim_{s\to 0} sY_1(s) = \frac{w^2\mu_0\pi r_0^2}{l} = \frac{1}{L_0}, \tag{25}$$

gdzie:

L_0 - indukcyjność przy prądzie stałym związana ze strumieniem głównym cewki.

Następnie poszukiwane będą położenia biegunów każdego składnika sumy (24). Składniki pierwszej sumy we wzorze (24) oznaczono następująco

$$Y_n^{(1)}(s) = \frac{1}{w^2\mu_0 s}\cdot\frac{4l\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}}{(2n-1)^2\pi^3 r_0}\cdot\frac{J_0\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}\,r_0\right)}{J_1\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma}\,r_0\right)} \tag{26}$$

Można zauważyć, że oprócz bieguna w zerze ($s = 0$) funkcja (26) posiada bieguny w tych punktach, w których funkcja Bessela $J_1 = 0$. Jak wiadomo [1] funkcje Bessela rzędu całkowitego, a więc J_0, J_1,... posiadają tylko zera dla argumentów rzeczywistych.

Jeżeli więc x_m jest zerem funkcji $J_1(x_m) = 0$, $(x_m \neq 0)$ $(m = 1,2,\ldots)$, to przyjmując równość

$$\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma r_o} = x_m \tag{27}$$

otrzymujemy następujący wzór na położenie biegunów funkcji (26)

$$s_{nm}^{(1)} = -\frac{1}{\mu_0\gamma}\left[\left(\frac{x_m}{r_o}\right)^2 + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}\right] \quad (n,m = 1,2,3\ldots) \tag{28}$$

Ze wzoru tego wynika, że bieguny funkcji (26) znajdują się tylko na ujemnej półosi rzeczywistej. We wzorze (27) założono, że $x_m \neq 0$, mimo że $J_1(0) = 0$.
Wynika stąd, że dla $x_o = 0$

$$s_{no}^{(1)} = -\frac{1}{\mu_0\gamma}\cdot\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} \tag{29}$$

funkcja (26) nie posiada bieguna ze względu na występowanie w jej liczniku członu

$$\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma},$$

który się również zeruje dla argumentów danych wzorem (29).
Dla pełnego zbadania zachowania się funkcji (26) należy wyznaczyć położenie jej zer. Jak widać zera te wynikają z zerowania się funkcji Bessela

$$J_o\left(\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma r_o}\right) = 0$$

Jak już wspomniano zera funkcji J_o występują tylko dla argumentów rzeczywistych. Jeżeli więc y_m jest zerem funkcji $J_o(y_m) = 0$, to przyjmując równość

$$\sqrt{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} - s\mu_0\gamma r_o} = y_m \quad (n,m = 1,2,\ldots)$$

otrzymujemy wzór na położenie zer funkcji (26).

$$s_{nm}^{(1')} = -\frac{1}{\mu_0\gamma}\left[\left(\frac{y_m}{r_o}\right)^2 + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}\right]$$

Ze wzoru (30) wynika, że zera funkcji (26) leżą na ujemnej półosi rzeczywistej. Ponieważ zera funkcji Bessela J_1 i J_0 występują na przemian, wynika z tego, że na ujemnej półosi rzeczywistej zera i bieguny funkcji (26), przeplatają się. W takiej sytuacji można rozwinąć funkcję (26) na ułamki proste [3]. W tym celu niezbędne będzie obliczenie pozostałości funkcji (26) w poszczególnych biegunach. Wynoszą one

$$\alpha^{(1)}_{n,m} = \operatorname*{Res}_{s=s^{(1)}_{nm}} Y^{(1)}_n(s) = \frac{81(x_m)^2}{w^2\mu_0(2n-1)^2\pi^3 r_0^2} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{x_m}{r_0}\right)^2 + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2}\right]} \tag{31}$$

Składniki drugiej sumy admitancji (24) oznaczono następująco

$$Y^{(2)}_k(s) = -\frac{}{w^2\mu_0\pi r_0^2 s\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + s\mu_0\gamma}} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + s\mu_0\gamma}\,\frac{l}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + s\mu_0\gamma}\,\frac{l}{2}\right)} \tag{32}$$

Bieguny funkcji (32) występują w tych punktach s, w których

$$\sqrt{-\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 - s\mu_0\gamma}\,\frac{l}{2} = \frac{(2i-1)\pi}{2} \qquad (k,i = 1,2,3,\ldots) \tag{33}$$

Rozwiązując równanie (33) ze względu na s otrzymuje się

$$s_{ki} = -\frac{1}{\mu_0\gamma}\left[\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + \frac{(2i-1)^2\pi^2}{l^2}\right] \qquad (k,i = 1,2,3,\ldots) \tag{34}$$

Ze wzoru (34) wynika, że bieguny funkcji (32) występują na ujemnej półosi rzeczywistej.
Zera funkcji (32) występują w takich punktach s, dla których

$$s^{(2)}_{ki} = -\frac{1}{\mu_0\gamma}\left[\left(\frac{x_k}{r_0}\right)^2 + \frac{(2i-2)^2\pi^2}{l^2}\right] \qquad \begin{matrix}(k = 1,2,3,\ldots)\\(i = 2,3,\ldots)\end{matrix} \tag{35}$$

Ze wzoru (35) wynika również, że zera funkcji (32) występują tylko na ujemnej półosi rzeczywistej i są przeplatane biegunami.

Dla $i = 1$ wzór (35) przyjmie postać

$$s_{k1}^{(2)} = -\frac{1}{\mu_o\gamma}\cdot\frac{x_k}{r_o} \tag{36}$$

Dla argumentu s określonego wzorem (36) zeruje się funkcja sh występująca w liczniku funkcji (32), lecz nie zeruje się funkcja $Y_k^2(s)$ ze względu na występowanie w mianowniku tej funkcji członu

$$\sqrt{\left(\frac{x_k}{r_o}\right)^2 + s\mu_o\gamma},$$

który również przyjmuje wartość zerową dla tego argumentu. W celu pełnego zbadania funkcji operatorowej $Y_k^{(2)}(s)$ określonej wzorem (32) należy obliczyć pozostałości tej funkcji w biegunach określonych wzorem (34). Wynoszą one

$$\alpha_{ki}^{(2)} = \operatorname*{Res}_{s=s_{ki}^{(2)}} Y_k^{(2)}(s) = \frac{8}{w^2\mu_o\pi r_o^2 l}\cdot\frac{1}{\left[\left(\frac{x_k}{r_o}\right)^2 + \frac{(2i-1)^2\pi^2}{l^2}\right]} \quad (k,i = 1,2,3,\ldots) \tag{37}$$

4. SYNTEZA SCHEMATU ZASTĘPCZEGO CEWKI

Z badania admitancji operatorowej $Y_1(s)$ określonej wzorem (24) wynika, że można ją rozwinąć na ułamki proste

$$Y_1(s) = \frac{\alpha_o}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_{nm}^{(1)}}{s + s_{nm}^{(1)}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_{ki}^{(2)}}{s + s_{ki}^{(2)}}, \tag{38}$$

gdzie:

$s_{nm}^{(1)}$, $s_{ki}^{(2)}$ – bieguny admitancji określone odpowiednio wzorami (35) i (43),

$\alpha_{nm}^{(1)}$, $\alpha_{ki}^{(2)}$ – pozostałość funkcji $Y_n^{(1)}(s)$ i $Y_k^{(2)}(s)$ w biegunach,

α_o – pozostałość funkcji $Y_1(s)$ w zerze.

Porównując wzory (28) i (34) można zauważyć, że

$$s_{nm}^{(1)} = s_{ki}^{(2)} \quad \text{dla} \quad m = k;\quad n = i;\quad m,n,k,i = 1,2,3,\ldots$$

Przyjmując więc oznaczenie

$$s_{nm}^{(1)} = s_{mn}^{(2)} = s_{nm} = -\frac{1}{\mu_0\gamma}\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2}{l^2} + \left(\frac{x_m}{r_o}\right)^2\right] \qquad (39)$$

oraz ustalając kolejność sumowania we wzorze (38) po wskaźnikach $m = k$, $n = i$, $m,n = 1,2,3,\dots$ otrzymuje się

$$Y_1(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha_{mn}}{s + s_{nm}}, \qquad (40)$$

gdzie

$$\alpha_{nm} = \alpha_{nm}^{(1)} + \alpha_{mn}^{(2)} = \frac{1}{w^2\mu_0\pi r_o^2}\cdot\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \qquad (41)$$

Jak wiadomo [3] każdy składnik sumy (40) można traktować jako admitancje dwujnika składającego się z szeregowego połączenia rezystancji R_{nm} i indukcyjności L_{nm}, przy czym

$$L_o = \frac{1}{\alpha_0}; \qquad L_{nm} = \frac{1}{\alpha_{nm}}; \qquad \frac{R_{nm}}{L_{nm}} = -s_{nm} \qquad (42)$$

Ze wzorów (39), (40) i (42) wynika:

$$L_{nm} = L_o\,\frac{(2n-1)^2\pi^2}{8} = L_n; \qquad L_o = \frac{w^2\mu_0\pi r_o^2}{l};$$

$$R_{nm} = \frac{w^2\pi^3(2n-1)^2}{8\gamma l}\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2 r_o^2}{l^2} + (x_m)^2\right], \qquad (n,m = 1,2,3,\dots) \qquad (43)$$

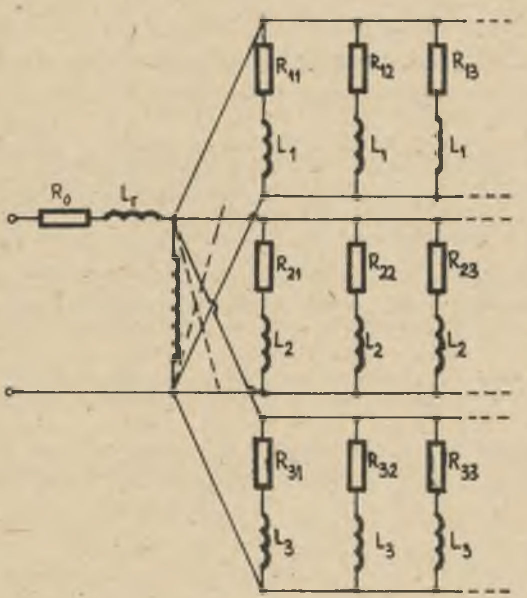
gdzie miejsce zerowe x_m funkcji Bessela $J_1(x_m) = 0$ można określić wzorem [1]

$$x_m = \beta - \frac{3}{8\beta}\left[1 - \frac{1}{(4\beta)^2} + \frac{2358}{15(4\beta)^4} - \frac{1961209}{105(4\beta)^6} + \dots\right], \qquad (44)$$

przy czym

$$\beta = \left(\frac{1}{2} + 2m\right)\frac{\pi}{2}$$

Całkowitej impedancji cewki Z(s) określonej wzorem (21) odpowiada więc schemat przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Schemat zastępczy impedancji cewki

5. ZAKOŃCZENIE

W przedstawionej pracy podano schemat zastępczy o impedancji równoważnej dla impedancji cewki zawierającej walec przewodzący w szczelinie obwodu magnetycznego. W rozważaniach ograniczono się do przypadku walca nieferromagnetycznego.

Przyjęcie $\mu \neq \mu_0$ oznacza niewielkie zmiany warunku brzegowego (5) i obliczeniowo nie powoduje większych trudności. W przypadku stanu ustalonego sinusoidalnie zmiennego przyjęcie stałej przenikalności magnetycznej $\mu \neq \mu_0$ wewnątrz walca przewodzącego nie powoduje dla wielu zagadnień przy ograniczonych amplitudach wektora indukcji magnetycznej poważniejszych błędów. Natomiast zastosowanie otrzymanych przy $\mu \neq \mu_0$ modeli do analizy stanów nieustalonych jest niedopuszczalne.

LITERATURA

[1] Antonowicz J.: Tablice funkcji. PWN, Warszawa 1969.

[2] Glinka T.: Analiza równania permeancji szeregowego obwodu magnetycznego ze szczeliną powietrzną przy uwzględnieniu prądów wirowych indukowanych w rdzeniu. Archiwum Elektrotechniki t. XXVIII 1979, z. 4.

[3] Guillemin E.A.: Synthesis of Passive Networks: Wiley, New York 1957.

[4] Hryńczuk J.: Schematy zastępcze dla impedancji pola elektromagnetycznego. Archiwum Elektrotechniki, 12 (1963), z. 1.

[5] Lipiński W.: Zastępczy schemat impedancji cewki z umieszczoną wewnątrz kulą przewodzącą. Rozprawy Elektrotechniczne t. 24 (1978) z. 1.

[6] Mocanau C.I.: Die Ersatzschaltungen mit konstanten Parameters des kreisformigen, zylindrischen Leiters, unter Berucksichtigung des Ubergangsskineffektes bei zugefuhrtem Strom. ETZ-A (1972), ss. 57-116.

[7] Moon P., Spencer D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[8] Sikora R., Lipiński W.: Model RL impedancji linii dwuprzewodowej z uwzględnieniem wypierania prądu. Archiwum Elektrotechniki, tom 24, (1975), z. 2.

[9] Sikora R., Lipiński W.: Schemat zastępczy impedancji żłobkowej uwzględniający dwuwymiarowe wypieranie prądu. Archiwum Elektrotechniki, t. 24 (1975) z. 1.

[10] Sikora R., Lipiński W.: Stała czasowa procesów dyfuzyjnych w walcu o skończonej długości. Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1975, z. 3.

Wpłynęło do redakcji 8 VI 1981 r.

Recenzent: prof. dr inż. Ryszard Sikora

СИНТЕЗ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ КАТУШКИ С ВАЛКОМ-ПРОВОДНИКОМ С КОНЕЧНОЙ ДЛИНОЙ В ЗАЗОРЕ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ

Р е з ю м е

В работе определено распределение магнитного поля внутри короткого валка-проводника, помещенного в зазоре магнитной цепи катушки. Определено операторное полное сопротивление катушки, совершая одновременно синтез ее схемы замещения в классе скопленных элементов типа R L.

SYNTHESIS OF THE EQUIVALENT CIRCUIT OF THE COIL WITH A SHORT CONDUCTIVE CYLINDER IN THE AIR GAP OF THE MAGNETIC CIRCUIT

S u m m a r y

The magnetic field in the short conductive cylinder placed in the air gap of the magnetic circuit of the coil was calculated. The impedance of the coil was computed and its equivalent RL circuit was obtained.