

Stanisław HANDZLIK

Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

BŁĄD SYSTEMATYCZNY KIERUNKOWEGO CZUJNIKA GRADIENTU
POTENCJAŁU WYNIKAJĄCY ZE SPOSOBU PODTRZYMANIA CZUJNIKA

Streszczenie. Przedstawiono sposób obliczania błędu systematycznego kierunkowego czujnika gradientu potencjału, wynikającego ze sposobu podtrzymanie czujnika.

1. WSTĘP

Kierunkowy czujnik gradientu potencjału umożliwia pomiar gradientu potencjału w zadanym kierunku wolnozmiennego pola elektrycznego.

Sygnałem tego czujnika jest prąd płynący w przewodzie łączącym półkolistą czaszę czujnika, które podtrzymywane są w polu elektrycznym za pomocą dielektrycznego walca.

Wartość skuteczna tego prądu wyraża się wzorem

$$I_0 = 3\pi\epsilon_0 r_0^2 \omega \frac{\partial V_0(x,y,z)}{\partial t} \quad (1)$$

I_0 jest proporcjonalna do gradientu potencjału w kierunku zorientowania czujnika w polu elektrycznym [1],

gdzie:

r_0 - promień czasz czujnika,

$V_0(x,y,z)$ - wartość skuteczna potencjału pola w punkcie umieszczenia czujnika.

Wzór (1) jest słuszny przy założeniu, że walec podtrzymujący czujnik wykonano z materiału o względnej przenikalności elektrycznej $\epsilon_r = 1$.

W rzeczywistości względna przenikalność elektryczna walca nie spełnia powyższego założenia i zachodzi $\epsilon_r > 1$.

Pomiar gradientu potencjału w takim przypadku będzie wykonany z błędem systematycznym zależnym od rodzaju materiału walca podtrzymującego czujnik.

Błąd ten zdefiniowano w następujący sposób

$$\delta_{\varepsilon} = \frac{I_0 - I_{\varepsilon}}{I_0} 100\%, \quad (2)$$

gdzie:

I_0 - prąd czujnika, w przypadku gdy materiał walca spełnia zależność:
 $\varepsilon_r = 1$,

I_{ε} - prąd czujnika, w przypadku gdy materiał walca spełnia zależność:
 $\varepsilon_r > 1$.

2. METODA OBLICZEŃ

2.1. Zależność prądu czujnika od rozkładu natężenia pola elektrycznego w jego otoczeniu

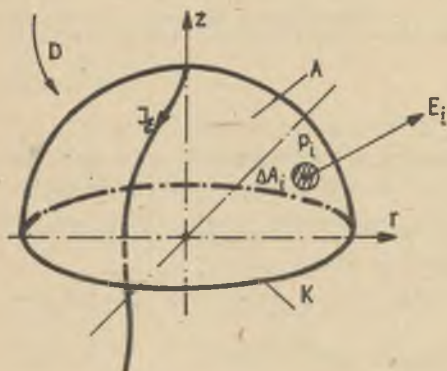
Z wyrażenia (2) wynika, że aby obliczyć błąd systematyczny δ_{ε} , należy znać wartości skuteczne prądów I_0 i I_{ε} .

Prąd I_0 można obliczyć ze wzoru (1).

Zakładając, że czujnik umieszczono w jednorodnym, sinusoidalnie zmiennym polu elektrycznym przy powierzchni ziemi, prąd I_{ε} płynący w przewodzie łączącym czaszę czujnika można określić stosując prawo Maxwella [2].

Zachodzi (rys. 1):

$$I_{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{n} = \omega \varepsilon_0 \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{n} \quad (3)$$



Rys. 1

Dla numerycznych metod obliczeniowych wzór (3) można przedstawić w postaci

$$I_{\varepsilon} = \omega \varepsilon_0 \sum_{i=1}^k \vec{E}_i \cdot \vec{n} \Delta A_i, \quad (4)$$

gdzie:

ΔA_i - element pola powierzchni czaszy (rys. 1),

\vec{E}_i - wektor natężenia pola w punkcie P_i elementu pola powierzchni ΔA_i .

Ze wzoru (4) wynika, że aby określić wartość skuteczną prądu I_g , należy znać rozkład natężenia pola elektrycznego na powierzchni czujnika, który jest uzależniony rodzajem materiału walca podtrzymującego czujnik. Chcąc znaleźć ten rozkład zastosowano tzw. metodę ładunków [3], [4], [5].

2.2. Obliczenie rozkładu natężenia pola na powierzchni czujnika

Powierzchnia przewodząca czujnika to przewodnik o zadanym potencjale, którego całkowity ładunek powierzchniowy równa się zero. Walec podtrzymujący czujnik jest dielektrykiem o nieznanym potencjale. Ze względu na umieszczenie czujnika w jednorodnym polu elektrycznym rozkład ładunku powierzchniowego czujnika i walca podtrzymującego zależy będzie od współrzędnych r i z (rys. 2).

Ładunki powierzchniowe zastąpiono dyskretnymi ładunkami pierścieniowymi Q_j , liniowymi o stałej gęstości. Jako punkty konturowe, dla których muszą być spełnione warunki brzegowe, przyjęto punkty P_i leżące na okręgach. Sposób dyskretyzacji przedstawia rys. 2.

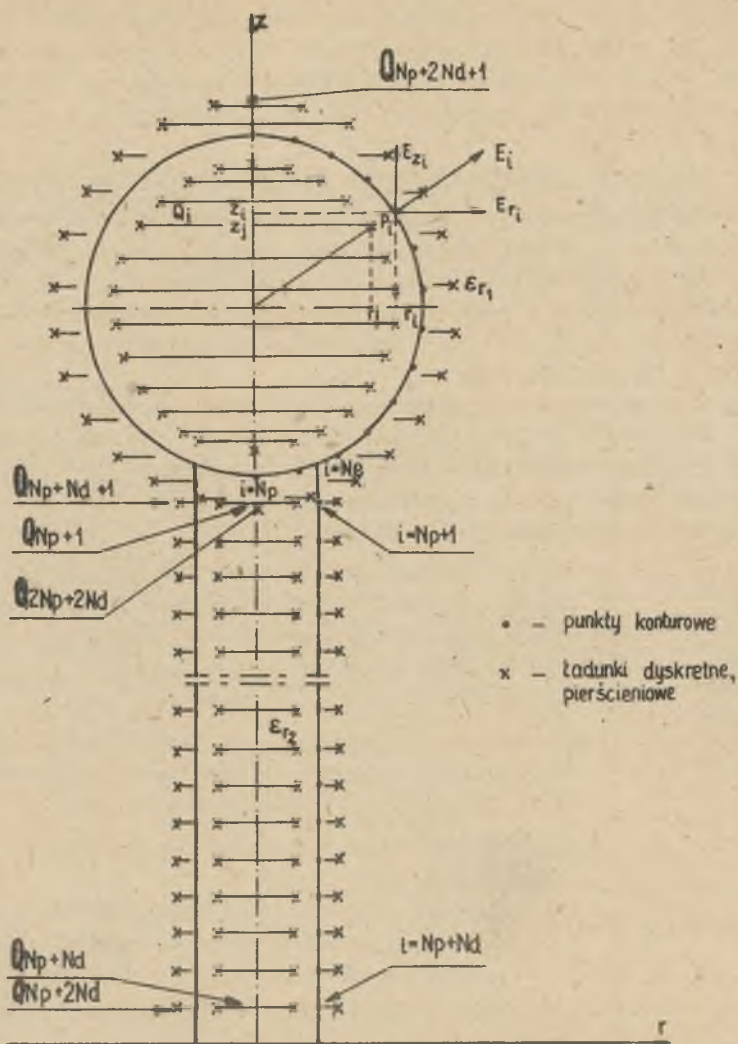
Wprowadzono oznaczenia:

- N_p - liczba punktów konturowych na powierzchni czujnika,
- N_d - liczba punktów konturowych na powierzchni walca,
- N_e - liczba punktów konturowych na powierzchni czujnika, graniczących z ośrodkiem dielektrycznym o przenikalności elektrycznej ϵ_{r_1} (powietrze),
- $(N_p - N_e)$ - liczba punktów konturowych na powierzchni czujnika graniczących z ośrodkiem dielektrycznym o przenikalności elektrycznej ϵ_{r_2} (walec dielektryczny),
- P_{ij} - współczynnik uwzględniający wpływ ładunku Q_j na potencjał w punkcie konturowym P_i ,
- $f_{rij}, f_{zij}, f_{nij}$ - współczynniki uwzględniające wpływ ładunku Q_j na składowe E_r, E_z i składową normalną wektora natężenia pola w punkcie konturowym P_i ,
- U_{oi} - potencjał w punkcie pola P_i przed umieszczeniem w nim czujnika,
- U - potencjał powierzchni przewodzącej czujnika, po umieszczeniu go w polu elektrycznym.

Dla punktów konturowych P_i muszą być spełnione następujące warunki:

- 1) potencjał punktów konturowych na powierzchni czujnika, graniczących z ośrodkiem o przenikalności ϵ_{r_1} i ϵ_{r_2} musi być równy

$$\sum_{j=1}^{N_p} Q_j P_{ij} + \sum_{j=N_p+1}^{N_p+N_d} Q_j P_{ij} + U_{oi} = U \quad i = 1 \dots N_e \quad (5)$$



Rys. 2

$$\sum_{j=1}^{N_p} Q_j P_{1j} + \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j P_{1j} + U_{01} = U \quad 1 = (N_e+1) \dots N_p \quad (6)$$

2) składowa normalna natężenia pola elektrycznego wewnątrz czujnika musi być równa zero,

$$\sum_{j=N_p+1}^{N_p+N_d} Q_j f_{n1j} + \sum_{j=N_p+2N_d+1}^{2N_p+2N_d} Q_j f_{n1j} = 0 \quad i = 1 \dots N_p$$

- 3) potencjał punktów konturowych P_1 na powierzchni dielektrycznego walca jest po stronie ośrodka o przenikalności dielektrycznej ϵ_{r2} taki sam jak po stronie ośrodka o przenikalności ϵ_{r1} , czyli zachodzi:

$$i = (N_p + 1) \dots (N_p + N_d)$$

$$\sum_{j=1}^{N_p} Q_j P_{1j} + \sum_{j=N_p+1}^{N_p+N_d} Q_j P_{1j} = \sum_{j=1}^{N_p} Q_j P_{1j} + \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j P_{1j}$$

co daje ostatecznie

$$\sum_{j=N_p+1}^{N_p+N_d} Q_j P_{1j} - \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j P_{1j} = 0 \quad (8)$$

- 4) składowe normalne wektora natężenia pola elektrycznego w każdym punkcie konturowym na powierzchni dielektrycznego walca spełniają związek:

$$i = (N_p + 1) \dots (N_p + N_d)$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_p} Q_j f_{n1j} + \sum_{j=N_p+1}^{N_p+N_d} Q_j f_{n1j}}{\sum_{j=1}^{N_p} Q_j f_{n1j} + \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j f_{n1j}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = \epsilon^w$$

prowadzi to do równania

$$(\epsilon^w - 1) \sum_{j=1}^{N_p} Q_j f_{n1j} + \epsilon^w \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j f_{n1j} - \sum_{j=N_p+1}^{N_p+N_d} Q_j f_{n1j} = 0$$

5) ponieważ U nie jest znane więc dodatkowym warunkiem jest

$$\sum_{j=1}^{N_p} Q_j = 0 \quad (10)$$

W ten sposób otrzymuje się układ równań (5), (6), (7), (8), (9), (10) o niewiadomych Q_j i U , przy czym ilość równań wynosi $n = 2N_p + 2N_d + 1$. Rozwiązując ten układ równań otrzymuje się poszukiwane ładunki dyskretne Q_j .

Natężenie pola elektrycznego na powierzchni czujnika oblicza się korzystając z zasady superpozycji.

$$E_i = \sqrt{E_{r_i}^2 + E_{z_i}^2}, \quad (11)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} E_{r_i} &= \sum_{j=1}^{N_p+N_d} Q_j f_{r1j} \\ E_{z_i} &= \sum_{j=1}^{N_p+N_d} Q_j f_{z1j} \end{aligned} \right\} \text{ dla } i = 1 \dots N_e$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} E_{r_i} &= \sum_{j=1}^{N_p} Q_j f_{r1j} + \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j f_{r1j} \\ E_{z_i} &= \sum_{j=1}^{N_p} Q_j f_{z1j} + \sum_{j=N_p+N_d+1}^{N_p+2N_d} Q_j f_{z1j} \end{aligned} \right\} \text{ dla } i = (N_e + 1) \dots N_p$$

O dokładności wyznaczenia rozkładu natężenia pola na powierzchni czujnika decyduje ilość przyjętych ładunków dyskretnych Q_j , a tym samym liczba punktów konturowych P_1 . Dla jednego z punktów P_1 czujnika określa się tzw. „błąd potencjału” jako:

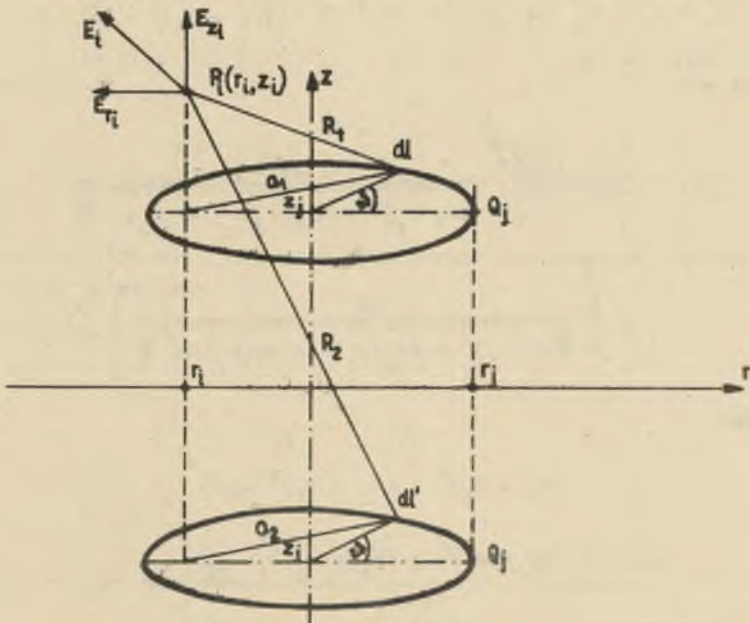
$$\delta_u = \frac{U - U_{obl}}{U} 100\%, \quad (12)$$

gdzie:

$$U_{obl} = \sum_{j=1}^{N_p + N_d} Q_j p_{ij} \quad \text{dla } i = 1 \dots N_e$$

$$U_{obl} = \sum_{j=1}^{N_p} Q_j p_{ij} + \sum_{j=N_p + N_d + 1}^{N_p + 2N_d} Q_j p_{ij} \quad \text{dla } i = (N_e + 1) \dots N_p$$

2.4. Obliczenie współczynników równań



Rys. 3

Dla określenia współczynników P_{ij} , f_{rij} , f_{zij} , f_{nij} oblicza się potencjał i natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie w pobliżu ładunku Q_j . Uwzględniając oddziaływanie ziemi oraz symetrię potencjału w punkcie P_i zależy tylko od współrzędnych z oraz r i wyraża się wzorem (rys. 3)

$$U_{0i} = U_{0i}(z_i, r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_j}{2\pi r_j} \left[\int \left(\frac{dl}{R_1} - \frac{dl'}{R_2} \right) \right], \quad (13)$$

gdzie:

r_j - promień dyskretnego ładunku pierścieniowego.

Uwzględniając, że

$$dl = dl' = r_j d\varphi'$$

$$R_1^2 = (z_i - z_j)^2 + a_1^2$$

$$R_2^2 = (z_i + z_j)^2 + a_2^2$$

$$a_1^2 = a_2^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j (\cos 180^\circ - \varphi') = (r_i + r_j)^2 - 4r_i r_j \sin^2 \frac{\varphi'}{2}$$

otrzymuje się

$$U_{0i} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_j}{\pi} \left[\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{(z_i - z_j)^2 + (r_i + r_j)^2 - 4r_i r_j \sin^2 \frac{\varphi'}{2}}} - \int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{(z_i + z_j)^2 + (r_i + r_j)^2 - 4r_i r_j \sin^2 \frac{\varphi'}{2}}} \right]$$

Oznaczając

$$(z_i - z_j)^2 + (r_i + r_j)^2 = \alpha_1^2$$

$$(z_i + z_j)^2 + (r_i + r_j)^2 = \alpha_2^2$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{r_i r_j}}{\alpha_1}; \quad k_2 = \frac{2\sqrt{r_i r_j}}{\alpha_2}$$

oraz podstawiając $\frac{d\varphi}{\Sigma} = \varphi$, $d\varphi = 2d\varphi$ i zmieniając granice całkowania otrzymuje się

$$U_{01} = U(r_1, z_1) = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{K(k_1)}{\alpha_1} - \frac{K(k_2)}{\alpha_2} \right], \quad (14)$$

gdzie

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju [6].

Oznaczając

$$P_{1j} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{K(k_1)}{\alpha_1} - \frac{K(k_2)}{\alpha_2} \right] \quad (15)$$

wzór (14) można napisać w uproszczonej postaci

$$U_{01} = U_{01}(z_1, r_1) = Q_j P_{1j} \quad (16)$$

Składowe natężenia pola elektrycznego w punkcie P_1 oblicza się korzystając ze związków

$$E_{r1} = - \frac{\partial U(r_1, z_1)}{\partial r_1}; \quad E_{z1} = - \frac{\partial U(r_1, z_1)}{\partial z_1}$$

Uwzględniając je otrzymuje się następujące wzory na składowe natężenia pola elektrycznego w punkcie P_1

$$E_{r1} = f_{r1j} Q_j, \quad (17)$$

$$E_{z1} = f_{z1j} Q_j, \quad (18)$$

gdzie:

$$f_{r1j} = - \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{\pi r_1} \left[\frac{(r_1^2 - r_1^2 + (z_1 - z_1)^2) E(k_1) - \beta_1^2 K(k_1)}{\alpha_1 \beta_1^2} - \frac{(r_1^2 - r_1^2 + (z_1 + z_1)^2) E(k_2) - \beta_2^2 K(k_2)}{\alpha_2 \beta_2^2} \right] \quad (19)$$

$$f_{zij} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{(z_1 - z_j) E(k_1)}{\alpha_1 \beta_1^2} + \frac{(z_1 + z_j) E(k_2)}{\alpha_2 \beta_2^2} \right] \quad (20)$$

$$\beta_1 = \sqrt{(r_1 + r_j)^2 + (z_1 - z_j)^2}; \quad \beta_2 = \sqrt{(r_1 - r_j)^2 + (z_1 + z_j)^2}$$

$E(k)$ - całka eliptyczna zupełna drugiego rodzaju [6].

Wzory (15), (19) i (20) określają poszukiwane współczynniki p_{ij} , f_{rij} , f_{zij} . Współczynnik f_{nij} określa się w zależności od kształtu powierzchni, na której leżą punkty P_i .

Dla punktów P_i ; $i = (N_p + 1) \dots (N_p + N_d)$

$$f_{nij} + f_{rij}$$

Dla punktów P_i , $i = 1 \dots N_p$

$$f_{nij} = \sqrt{f_{rij}^2 + f_{zij}^2}$$

3. OBLICZENIE BŁĘDU δ_ϵ CZUJNIKA

Stosując wzory (1), (2), (4) oraz (11) można obliczyć błąd systematyczny δ_ϵ kierunkowego czujnika gradientu potencjału, umieszczonego przy powierzchni ziemi w jednorodnym polu elektrycznym.

4. WNIOSKI

Przedstawiony sposób obliczenia błędu systematycznego δ_ϵ pozwala na opracowanie programów obliczeń numerycznych, mających na celu taki dobór wymiarów i rodzaju materiału dielektrycznego walca podtrzymującego czujnik, aby błąd czujnika δ_ϵ , wynikający z zastosowanego rodzaju podparcia był minimalny.

LITERATURA

- [1] Handzlik S.: Funkcja przetwarzania kierunkowego czujnika gradientu potencjału pola elektrycznego, wolnozmiennego. Materiały IV Międzynarodowego Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Gliwice - Ustroń 1980.
- [2] Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.
- [3] Singer H., Steinbigler H., Weiss P.: A charge simulation method for the calculation of high voltage fields. - IEEE PAS-93, 1974 s. 1660-1667.
- [4] Weiss P.: Feldstarkeeffekte bei Zweistoffdielektrika. Bull. SEV 63 (1972/11).
- [5] Report on results of electric field measurements made by members and guests of CIGRE Working Group 36-01. Arnhem, April 1976.
- [6] Ryżyk M., Gradsztajn S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa 1964.

Wpłynęło do redakcji 2 VI 1981 r.

Recenzent: prof. dr inż. Ryszard Sikora

СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ ОШИБКА ПРИБОРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ГРАДИЕНТА ПОТЕНЦИАЛА К УКАЗАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ, ВЫТЕКАЮЩАЯ ИЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРИБОРА

Р е з ю м е

Представлен способ расчёта систематической ошибки прибора для измерения градиента потенциала к указанному направлению, вытекающей из диэлектрической поддержки прибора.

THE SYSTEMATIC ERROR OF A DIRECTIONAL GRADIENT POTENTIAL MEASURING DEVICE RESULTING FROM A DIELECTRIC SUPPORT OF DEVICE

S u m m a r y

The method of computation the systematic error of a directional gradient potential measuring device resulting from a dielectric support of device was shown.